УДК 517.983

©2014 р. Ю.С. Лінчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ФОРМУЛИ ДЛЯ ПОХІДНОЇ ДОБУТКУ

Описано всі пари лінійних функціоналів, які задовольняють узагальнення формули для похідної добутку n множників.

We describe all pairs of linear functionals that satisfy a generalized formula for the derivative of the product.

Нехай G – довільна область комплексної площини і $\mathcal{H}(G)$ – простір усіх аналітичних в G функцій, що наділений топологією компактної збіжності. В [1] Л.А. Рубел, узагальнюючи формулу для диференціювання добутку двох функцій, поставив і розв'язав задачу, про знаходження всіх пар лінійних неперервних функціоналів L та M на просторі $\mathcal{H}(G)$, які задовольняють співвідношення

$$L(fg) = L(f)M(g) + L(g)M(f) \qquad (1)$$

для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G)$. Пізніше в [2] Н.Р. Нандакумар розв'язав задачу Рубела в класі лінійних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$. В [3] досліджені розв'язки узагальненого рівняння Рубела, а в [4] описано всі пари лінійних неперервних операторів, які діють у просторі $\mathcal{H}(G)$ і задовольняють співвідношення, яке є операторним аналогом класичного рівняння Рубела.

В даній статті розв'язана задача про опис пар лінійних функціоналів на певних просторах аналітичних функцій, які задовольняють деяке співвідношення, що є аналогом формули знаходження похідної від добутку n множників.

Нехай F – довільна множина комплексних чисел. Через H позначимо векторний простір, який складається з аналітичних на множині F функцій і володіє наступними властивостями:

1°) простір H містить усі многочлени;

2°) для довільної функції $f \in H$ і довільної точки $z_0 \in F$ функція

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \text{ при } z \neq z_0, \\ f'(z_0) \text{ при } z = z_0. \end{cases}$$

належить до простору H;

3°) для довільної точки $z_1 \notin F$ функція $f(z) = \frac{1}{z-z_1}$ належить до простору H;

4°) добуток будь-яких двох функцій з простору H належить H.

Через H^* позначатимемо простір усіх лінійних функціоналів на просторі H. Наведемо спочатку допоміжне твердження стосовно опису мультиплікативних функціоналів для n множників.

Лема. *Для того, щоб ненульовий функціонал $L \in H^*$ задовольняв співвідношення*

$$L\left(\prod_{j=1}^{n} f_j\right) = \prod_{j=1}^{n} L(f_j) \qquad (2)$$

для деякого натурального $n \geqslant 2$ і довільних функцій $f_j \in H$, $j = 1, 2, \ldots, n$, необхідно і достатньо, щоб L зображався у вигляді

$$L(f) = exp\left(\frac{2\pi i}{n-1}k\right) f(z_0), \qquad (3)$$

де z_0 – деяка точка з множини F, а k – деяке число, $k = \overline{0, n-2}$.

Доведення. При $n = 2$ твердження леми є правильним і доводиться аналогічно, як і відповідна теорема з [5] стосовно опису мультиплікативних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$.

Нехай далі n – довільне натуральне число, яке більше або рівне за 3 і ненульовий функціонал $L \in H^*$ задовольняє співвідношення (2). Покладаючи в (2) $f_3 = f_4 = \ldots = f_n = 1$, одержимо, що для довільних функцій $f_1, f_2 \in H$ виконується рівність

$$L(f_1 f_2) = a^{n-2} L(f_1) L(f_2), \qquad (4)$$

де $a = L(1)$. З (4) при $f_1 = f_2 = 1$ випливає, що $a^n = a$. Оскільки $a \neq 0$, то $a = exp\left(\frac{2\pi i}{n-1}k\right)$ для деякого k, $k = \overline{0, n-2}$. З (4) випливає, що функціонал $L_1 = a^{n-2}L$ є мультиплікативним. Значить існує точка $z_0 \in F$ така, що $L_1(f) = f(z_0)$ для $f \in H$. Тому функціонал L зображається у вигляді (3), де z_0 – деяка точка з F. Оскільки кожен функціонал (3) є ненульовим і задовольняє (2), то лема доведена.

Дослідимо узагальнення рівняння Рубела, яке породжене правилом диференціювання добутку n множників. Нехай n – довільне фіксоване натуральне число, причому $n \geqslant 2$. Знайдемо всі пари функціоналів $L, M \in H^*$, які задовольняють співвідношення

$$L\left(\prod_{j=1}^{n} f_j\right) = \sum_{j=1}^{n} M(f_1)\dots M(f_{j-1})$$

$$L(f_j)M(f_{j+1})\dots M(f_n) \qquad (5)$$

для довільних функцій $f_1, f_2, \dots, f_n$ з H.

При $n = 2$ рівняння (5) збігається з класичним рівнянням Рубела (1). Методом, запропонованим в [3], одержуємо, що є правильним наступне твердження.

Теорема 1. *Для того, щоб лінійні на просторі H функціонали L та M задовольняли співвідношення* (1), *необхідно і достатньо, щоб пара цих функціоналів визначалася однією з наступних чотирьох умов:*

1) $L = 0$, M – довільний лінійний функціонал на H;

2) $L(f) = Cf(z_0)$, $M(f) = \frac{1}{2}f(z_0)$, де $z_0 \in F$, $C \in \mathbb{C}$;

3) $L(f) = C\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}$, $M(f) = \frac{1}{2}(f(z_1) + f(z_2))$, де $z_1, z_2 \in F$, $C \in \mathbb{C}$;

4) $L(f) = Cf'(z_0)$, $M(f) = f(z_0)$, де $z_0 \in F$, $C \in \mathbb{C}$.

Нехай тепер $n \geqslant 3$. Припустимо, що пара лінійних функціоналів L та M з H^* задовольняє рівність (5).

Підставляючи в (5) $f_1 = f_2 = \dots = f_n = 1$, отримуємо, що $(M(1))^{n-1} = \frac{1}{n}$ або $L(1) = 0$. Розглянемо спочатку випадок, коли $(M(1))^{n-1} = \frac{1}{n}$ і $L(1) \neq 0$. Тоді $M(1) = \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}} \exp\left(\frac{2\pi i m}{n-1}\right)$, де m – деяке число, $m = \overline{0, n-2}$. Покладаючи в (5) $f_1 = f$, $f_2 = f_3 = \dots = f_n = 1$, одержимо, що

$$L(f) = \tilde{C} \sqrt[n-1]{n} \exp\left(-\frac{2\pi i m}{n-1}\right) M(f),$$

де $\tilde{C} = L(1)$, $f \in H$. Оскільки $\tilde{C} \neq 0$, то рівність (5) набуде вигляду:

$$M\left(\prod_{j=1}^{n} f_j\right) = n \prod_{j=1}^{n} M(f_j).$$

Тому функціонал $M_1 = \sqrt[n-1]{n}M$ задовольняє співвідношення виду (2). Оскільки $M \neq 0$, то, використовуючи лему, одержимо, що

$$M(f) = \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}} \exp\left(\frac{2\pi i k}{n-1}\right) f(z_0), \qquad (6)$$

де k – деяке число, $k = \overline{0, n-2}$.

З (6) випливає, що

$$L(f) = Cf(z_0), \qquad (7)$$

де $C = \tilde{C} \exp\left(\frac{2\pi i(k-m)}{n-1}\right)$

Отже, у випадку $(M(1))^{n-1} = \frac{1}{n}$, пара функціоналів L та M з H^*, яка задовольняє співвідношення (5), визначається формулами (6) і (7), де k – деяке число, $k = \overline{0, n-2}$, $z_0 \in F$, а C – деяке комплексне число.

Нехай тепер $L(1) = 0$. Підставляючи у (5) $f_3 = f_4 = \dots = f_n = 1$, одержимо, що

$$L(f_1 f_2) = (M(1))^{n-2}(L(f_1)M(f_2) + L(f_2)M(f_1))$$

для довільних функцій $f_1, f_2 \in H$. Якщо $M(1) = 0$, то функціонал L є нульовим. У випадку $L = 0$, для будь-якого функціонала $M \in H^*$, пара функціоналів $L = 0$, M задовольняє співвідношення (5).

Надалі вважатимемо, що $L \neq 0$. Тоді $M(1) \neq 0$. У цьому випадку пара функціоналів L, $\tilde{M} = (M(1))^{n-2}M$, задовольняє рівняння (1), загальний розв'язок якого описується теоремою 1. Розглянемо всі можливі пари функціоналів L та $\tilde{M}$, які одержуються з використанням теореми 1.

1) $L = 0$; $\tilde{M}$ – довільний лінійний функціонал на S. Цей випадок неможливий, оскільки $L \neq 0$.

2) $L(f)=Cf(z_0)$, $\tilde{M}(f)=\frac{1}{2}f(z_0)$, $z_0\in F$, $C\in\mathbb{C}$. З умови $L(1)=0$ випливає, що $C=0$, а, отже, $L=0$, що також неможливо.

3) $L(f)=C\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}$, $\tilde{M}(f)=\frac{1}{2}(f(z_1)+f(z_2))$, де $z_1,z_2\in F$, $z_1\neq z_2$, $C\in\mathbb{C}$, причому $C\neq 0$.

Тоді $M(p)=\frac{1}{2(M(1))^{n-2}}(f(z_1)+f(z_2))$. Звідси отримуємо, що $(M(1))^{n-1}=1$. Для знайдених функціоналів L та M співвідношення (5) набуває вигляду

$$\frac{C}{z_1-z_2}\left(\prod_{j=1}^{n}f_j(z_1)-\prod_{j=1}^{n}f_j(z_2)\right)=$$

$$=\frac{C}{2^{n-1}(z_1-z_2)}\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{n}(f_k(z_1)+(-1)^{\delta_{k,j}}f_k(z_2)),$$

де $\delta_{k,j}$ – символ Кронекера. Але при $f_j(z)=\frac{z-z_2}{z_1-z_2}$, $j=1,2,\ldots,n$ звідси одержимо, що $\frac{C}{z_1-z_2}=\frac{n}{2^{n-1}}\frac{C}{z_1-z_2}$, що не так, оскільки $C\neq 0$ і $n\geqslant 3$.

4) $L(f)=Cf'(z_0)$, $\tilde{M}(f)=f(z_0)$, де $z_0\in F$, $C\in\mathbb{C}$. Тоді $M(f)=\frac{1}{(M(1))^{n-2}}f(z_0)$. Тому $(M(1))^{n-1}=1$ і ми одержуємо пари функціоналів $L(f)=Cf'(z_0)$, $M(f)=\exp\left(\frac{2\pi ik}{n-1}\right)f(z_0)$, де k – деяке ціле число, $k=\overline{0,n-2}$.

Таким чином, ми довели необхідність умов наступної теореми.

Теорема 2. *Для того, щоб лінійні на просторі H функціонали L та M задовольняли співвідношення (5) при $n\geqslant 3$, необхідно і достатньо, щоб пара цих функціоналів визначалася однією з наступних чотирьох умов:*

1) $L=0$, M – довільний лінійний функціонал на H;

2) $L(f)=Cf(z_0)$, де $z_0\in F$, $C\in\mathbb{C}$; $M(f)=\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}\exp\left(\frac{2\pi ik}{n-1}\right)f(z_0)$, $k=\overline{0,n-2}$;

3) $L(f)=Cf'(z_0)$, де $z_0\in F$, $C\in\mathbb{C}$; $M(f)=\exp\left(\frac{2\pi ik}{n-1}\right)f(z_0)$, $k=\overline{0,n-2}$.

Достатність умов теореми 2 встановлюється безпосередньою перевіркою.

Теореми 1 та 2 можна застосувати для просторів аналітичних функцій $\mathcal{H}(G)$, $\mathcal{H}(\overline{G})$ [6] та $H^\infty(G)$ [7], де G – довільна область комплексної площини, оскільки для них виконуються умови 1°)–4°).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *L. A. Rubel* Derivation pairs on the holomorphic functions // Funkcial. Ekvac. – 1967. – №10. – P. 225-227.

2. *N. R. Nandakumar* A Note on Derivation Pairs // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – №21. – P. 535–539.

3. *Лінчук Ю.С.* Узагальнене рівняння Рубела // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. – 2011. – **4**. – №1. – С. 88-90.

4. *Лінчук Ю.С.* Операторне узагальнення одного результата Рубела // Укр. матем. журнал.– 2011.– **63**, №12. – С. 1710-1716.

5. *John B. Garnett* Bounded analytic functions. – Academic Press, New York, 1981. – 468 p.

6. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie // J. reine und angew. Math. – 1953. – **191**. – S.30 – 49.

7. *Kehe Zhu* Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2005. – 280 p.