УДК 517.98

©2014 р. **Загороднюк А.В., Тарас О.Г.**

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

ОПЕРАТОР МУЛЬТИПЛІКАТИВНОЇ ЗГОРТКИ В ПРОСТОРІ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА БАНАХОВІЙ АЛГЕБРІ

В роботі розглянуто оператор мультиплікативної згортки на множині характерів алгебри аналітичних функцій обмеженого типу на деякій банаховій алгебрі A та її симетричному тензорному степені. Досліджено частинні випадки зображення цього оператора і зроблено висновок стосовно дистрибутивності відносно операції адитивної згортки.

We consider an operator of multuplicative convolution on the set of characters of bounded type entire functions on a Banach algebra A and its symmetric tensor power. We obtaine some conclusion about the distributive rule with respect to the additive convolution. We are investigating special cases of the representation of this operator.

Вступ

Нехай A – банахова алгебра, $B(A)$ – простір обмежених лінійних операторів на A, $H_b(A)$ – алгебра аналітичних функцій обмеженого типу, $M_b(A)$ – множина комплексних гомоморфізмів (характерів) алгебри $H_b(A)$.

Відомо, що операцію множення на A можна продовжити до операції множення на A^{**} наступним чином: для довільних $x, y \in A^{**}$
$$x \cdot y = \lim_{\alpha} \lim_{\beta} x_\alpha y_\beta,$$
де x_α, y_β – напрямленості, збіжні до x та y відповідно у $*$-слабкі топології простору A^{**}. Таке продовження називається продовженням Аренса. Використовуючи продовження Арона-Бернера ([1],[2],[3]), кожну функцію $f \in H_b(A)$ можна продовжити до деякої функції $\widetilde{f} \in H_b(A^{**})$ так, що оператор продовження буде топологічним гомоморфізмом алгебри $H_b(A)$ в $H_b(A^{**})$. Таким чином, $H_b(A)$ можна розглядати як підалгебру в $H_b(A^{**})$.

Нехай T_a – лінійний оператор множення на елемент алгебри $a \in A^{**}$, $T_a \in B(A^{**})$. Для функціоналів $\phi, \psi \in (H_b(A))^*$ означимо оператор мультиплікативної згортки
$$(\phi \star \psi)(f) = \phi(\psi(f(x \cdot y))),$$
$$f \in H_b(A), x, y \in A.$$

Позначимо $(\Lambda_T \phi)(f) = \phi(f \circ T(x))$, де $f \in H_b(A)$, $\phi \in (H_b(A))^*$, $T \in B(A^{**})$. Очевидно, що $\Lambda_T \phi \in (H_b(A))^*$. Зауважимо, що якщо $\phi \in M_b(A)$, то $\Lambda_T \phi \in M_b(A)$.

Якщо у згортці $\phi \star \psi$ функціонал ϕ визначено як значення функції у точці $a \in A^{**}$ ($\phi(f) = \widetilde{\delta}_a(f) = \widetilde{f}(a)$), то дана згортка запишеться в термінах оператора $\Lambda_{T_a}\phi$:
$$(\phi \star \psi)(f) = (\widetilde{\delta}_a \star \psi)(f) = \widetilde{\delta}_a(\psi(\widetilde{f}(x \cdot y))) =$$
$$\psi(f(ay)) = \psi(\widetilde{f} \circ T_a(x)) = (\Lambda_{T_a}\psi)(f),$$
де $f \in H_b(A)$, $\psi \in M_b(A)$, $\widetilde{\delta}_a(f) = \widetilde{f}(a)$.

Зауважимо, що в літературі є добре відомою, також, *адитивна* згортка $\phi * \psi$, яка визначена на $M_b(A)$ за допомогою адитивного зсуву
$$(\phi * \psi)(f) = \phi(\psi(f(x + y))), \qquad f \in H_b(A)$$
(див. [2], [3]).

Позначимо $\mathcal{P}(^nA)$ – простір n-однорідних поліномів на A, $\mathcal{P}(^{\leq n-1}A)$ – простір поліномів степеня не більшого за n на A, $\mathcal{A}_{n-1}$ – замикання алгебри породженої поліномами з $\mathcal{P}(^{\leq n-1}A)$, I_{n-1} – ідеал, породжений n-однорідними поліномами з $\mathcal{A}_{n-1}$. Нам потрібна наступна теорема, яка описує структуру множини $M_b(A)$.

Теорема 1. [4] *Для довільного комплексного гомоморфізму $\phi \in M_b(A)$ існує послідовність спряжених банахових просторів $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ і послідовність відображень δ^n : $E_n \to M_b$ таких що $E_1 = A^{**}, E_n =$*

$\mathcal{P}(^nA)^* \bigcap I_{n-1}^{\perp}$ *і* $\delta^{(1)} = \widetilde{\delta}$, *що* ϕ *має зображення*

$$\phi = \mathop{\circledast}_{n=1}^{\infty} \delta^{(n)}(u_n) := \delta^{(1)} * \delta^{(2)} * \cdots,$$

для деяких $u_n \in E_n, n = 1, 2, \ldots$.

Згідно цієї теореми, довільний комплексний гомоморфізм $\phi \in M_b(A)$ можна розглядати як послідовність елементів u_n:

$$\phi = (u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots), \quad u_n \in E_n \subset (\otimes_{s\pi}^n A)^{**}.$$

Зауваження 1. *Якщо* $\phi \in M_b(A)$ *визначається як значення функції у точці* $u \in A$ ($\phi = \delta_u$), *то* $\phi = (u, 0, \ldots, 0, \ldots)$, *де* $u \in A$.

Нехай функціонали $\phi, \psi \in M_b(A)$ мають зображення $(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$, $(v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots)$ відповідно. Як було доведено у [5] згортка $\phi \star \psi$ також належить до $M_b(A)$, тому $\phi \star \psi$ має зображення

$$(w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots), \qquad w_n \in E_n \subset (\otimes_{s\pi}^n A)^{**}.$$

Оператор мультиплікативної згортки для симетричного добутку банахових алгебр

Нехай $\bigotimes_{s,\pi}^n A$ – симетричний тензорний добуток n копій банахової алгебри A, поповнений у проективній топології. Відомо, що операцію множення, визначену на A, можна продовжити до операції на $\bigotimes_{s,\pi}^n A$ так, що $\bigotimes_{s,\pi}^n A$ буде банаховою алгеброю за формулою

$$x_1 \otimes_s \ldots \otimes_s x_n \cdot y_1 \otimes_s \ldots \otimes_s y_n = \\ = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_1 y_{\sigma(1)} \otimes_s \ldots \otimes_s \quad x_n y_{\sigma(n)},$$

де S_n – група підстановок на множині $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Твердження 1. [4] *Нехай* $P \in \mathcal{P}(^{mn}X)$ *для деяких натуральних чисел* m, n. *Тоді існує поліном* $P_{(m)} \in \mathcal{P}(^m \bigotimes_{s,\pi}^n X)$ *такий, що* $P_{(m)}(x \otimes \ldots \otimes x) = P(x)$.

Нехай $H_b(\bigotimes_{s,\pi}^n A)$ – алгебра цілих аналітичних функцій обмеженого типу на $\bigotimes_{s,\pi}^n A$. Розглянемо відображення

$$\Delta_n : H_b(\bigotimes_{s,\pi}^n A) \ni f \to f(x \otimes \ldots \otimes x), x \in A.$$

Оскільки множина $\{x \otimes \ldots \otimes x : x \in A\}$ є підмножиною в $\bigotimes_{s,\pi}^n A$, то оператор Δ_n є оператором звуження на n-й тензорний степінь $\bigotimes_{s,\pi}^n A$. Очевидним є наступне твердження.

Твердження 2. *Оператор* Δ_n *є гомоморфізмом з алгебри* $H_b(\bigotimes_{s,\pi}^n A)$ *в* $H_b(A)$. *При цьому, якщо* Q_m *–* m*-однорідний поліном в* $H_b(\bigotimes_{s,\pi}^n A)$, *то* $\Delta_n(Q_m)$ *–* nm*-однорідний поліном. Якщо* $\psi \in M_b(A)$, *то* $\widetilde{\psi} = \psi \circ \Delta_n \in H_b(\bigotimes_{s,\pi}^n A)$.

Нехай $\psi \in M_b(A)$ – характер, який має зображення $(0, 0, \ldots, 0, v_n, 0, \ldots)$. Згідно з [4] існує елемент $w \in (\bigotimes_{s,\pi}^n A)^{**}, w \neq 0$ такий, що $\psi(P_{mn}) = \widetilde{\psi}(P_{(m)}) = \tilde{P}_{(m)}(w)$ для кожного mn-однорідного полінома $P_{mn} \in H_b(A)$, де $\tilde{P}_{(m)}$ – продовження Арона-Бернера полінома $P_{(m)}$ з $\bigotimes_{s,\pi}^n A$ на $(\bigotimes_{s,\pi}^n A)^{**}$ такого, що $P_{(m)}(x \otimes \ldots \otimes x) = P_{mn}(x)$ (тобто $\Delta_n(P_{(m)}) = P_{mn}$). Таким чином, кожному характеру $\psi \in M_b(A)$ відповідає характер $\widetilde{\psi} \in M_b(\bigotimes_{s,\pi}^n A)$ такий, що $\psi(P_{mn}) = \widetilde{\psi}(P_{(m)})$ для кожного mn-однорідного полінома $P_{mn} \in H_b(A)$.

Для довільного $n \in \mathbb{N}$ позначимо $J(n)$ – множину всіх дільників числа n. Нехай $\psi \in M_b(A)$, ψ_n – звуження ψ на $\mathcal{P}(^nA)$ і ψ має зображення $(v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots)$. Тоді ψ є звуженням характера $\mathop{\circledast}_{k \in J(n)} \delta^{(k)}(u_k)$ на простір $\mathcal{P}(^nA)$ [4].

Теорема 2. *Нехай* $\psi \in M_b(A)$, $\psi = (v_1, v_2, \ldots)$. *Тоді* $\widetilde{\psi} = \psi \circ \Delta_n$ *має зображення* $(w_1, w_2, \ldots, w_m, \ldots)$ *і* $\widetilde{\psi}|_{\mathcal{P}(^m \otimes_{s,\pi}^n A)} = w_m$ *– лінійний функціонал на* $\mathcal{P}(^nA)$ *такий, що*

$$w_m = \Big(\mathop{\circledast}_{\substack{k \in J(nm), \\ k > n(m-1)}} \delta^{(k)}(v_k)\Big) \circ \Delta_n.$$

Доведення. Нехай $P_{mn} \in \mathcal{P}(^{mn}A)$. Тоді

$$\psi(P_{(m)}) = \psi(P_{mn}) = \mathop{\circledast}_{k \in J(nm)} \delta^{(k)}(u_k)(P_{mn}) =$$

$$\mathop{\circledast}_{m=1}^{\infty}\Big(\mathop{\circledast}_{\substack{k\in J(nm),\\ k>n(m-1)}}\delta^{(k)}(u_k)\Big)(P_{mn})=\mathop{\circledast}_{m=1}^{\infty}w_m(P_{(m)}).$$

За побудовою, $\delta^{(m)}(w_m)$ дорівнює нулю на однорідних поліномах степеня меншого за m на $\bigotimes_{s,\pi}^n A$. Тому $\psi=(w_1,w_2,\ldots,w_m,\ldots)$.

Теорема 3. *Нехай $\psi,\theta\in M_b(A)$. Тоді $\widetilde{\psi}\star\widetilde{\theta}=\widetilde{\psi\star\theta}$.*

Доведення. Якщо $\widetilde{\psi},\widetilde{\theta}\in M_b(\bigotimes_{s,\pi}^n A)$, то за означенням $\widetilde{\psi}=\psi\circ\Delta_n$, $\widetilde{\theta}=\theta\circ\Delta_n$. Для елементів $w_1,w_2\in\bigotimes_{s,\pi}^n A$ розглянемо згортку

$$\begin{gathered}(\widetilde{\psi}\star\widetilde{\theta})(P)=\widetilde{\psi}(\widetilde{\theta}(P(w_1\cdot w_2)))=\\ =\widetilde{\psi}(\theta\circ\Delta_n(P(w_1\cdot w_2)))=\\ =\widetilde{\psi}(\theta(P(w_1\cdot y\otimes\ldots\otimes y)))=\\ =\psi\circ\Delta_n(\theta(P(w_1\cdot y\otimes\ldots\otimes y)))=\\ =\psi(\theta(P(x\otimes\ldots\otimes x\cdot y\otimes\ldots\otimes y)))=\\ =\widetilde{\psi\star\theta}(P).\end{gathered}$$

Зображення мультиплікативної згортки

Розглянемо деякі часткові випадки функціоналів ϕ та ψ.

Твердження 3. *Нехай $\phi,\psi\in M_b(A)$ і $\phi=\widetilde{\delta}_{u_1},\psi=\widetilde{\delta}_{v_1}$, $u_1,v_1\in A^{**}$ тобто φ,ψ мають зображення $(u_1,0,\ldots)$, $(v_1,0,\ldots)$, відповідно. Тоді згортка $\phi\star\psi$ матиме вигляд*

$$\widetilde{\delta}_{u_1}\star\widetilde{\delta}_{v_1}=\widetilde{\delta}_{u_1v_1}.$$

Доведення. Для будь-якої $f\in H_b(A)$ маємо:

$$\begin{gathered}(\widetilde{\delta}_{u_1}\star\widetilde{\delta}_{v_1})(f)=\widetilde{\delta}_{u_1}(\widetilde{\delta}_{v_1}(f(x\cdot y)))=\\ \widetilde{\delta}_{u_1}(\widetilde{f}(x\cdot v_1))=\widetilde{f}(u_1\cdot v_1)=\widetilde{\delta}_{u_1v_1}(f).\end{gathered}$$

Розглянемо випадок, коли ϕ – довільний елемент з $M_b(A)$, і $\psi=(0,\ldots,v_k,0,\ldots),k>1$, тобто $v_{k-1}=v_{k-2}=\ldots=v_1=0$, де $v_i\in E_i=\mathcal{P}(^iA)^*\cap I_{i-1}^{\perp}$ для всіх $i=1,2,\ldots,k-1$. Це означає, що звуження функціонала ψ на однорідні поліноми степеня меншого за k дорівнює нулю.

Лема 3. *Нехай $\phi,\psi\in M_b(A)$ і $\phi=\widetilde{\delta}_a$, ψ має зображення $(0,\ldots,0,v_n,0,\ldots)$. Тоді згортка $\phi\star\psi$ матиме зображення $(0,\ldots,0,w_n,w_{n+1}\ldots)$.*

Доведення. Нехай P – поліном степеня $k<n$, T_a – лінійний оператор множення на елемент $a\in A^{**}$. Розглянемо згортку $\varphi\star\psi:$

$$\begin{gathered}(\varphi\star\psi)(P)=(\widetilde{\delta}_a\star\psi)(P)=\widetilde{\delta}_a(\psi(P(x\cdot y)))=\\ \psi(P(a\cdot y))=\psi(P\circ T_a(y))=(\Lambda_{T_a}\psi)(P).\end{gathered}$$

Дія оператора T_a не змінює степінь полінома P, тому $\deg\,(P\circ T_a)=k<n$. Це означає, що згортка $\varphi\star\psi$, де $\phi=\widetilde{\delta}_a$, на поліномах степеня $k<n$ дорівнює дії оператора $\Lambda_{T_a}\psi$ на цих поліномах. Отже, $\varphi\star\psi$ має зображення $(0,\ldots,0,w_n,w_{n+1}\ldots)$.

Наслідок 1. *Якщо $\varphi,\psi\in M_b(A)$ є функціоналами значення полінома в точках $a,b\in A^{**}$ відповідно, то згортка $\varphi\star\psi$ дорівнює дії композиції операторів Λ_{T_a} і Λ_{T_b}.*

Лема 4. *Нехай $\psi=(0,\ldots,0,v_n,0,\ldots)$, T^m – довільний m-лінійний оператор з $B(A)$, P_k – поліном степеня k, що $mk<n$. Якщо $(\Lambda_{T^m}\psi)(P_k)=\delta_z(P_k)$, то $z=0$.*

Доведення. Розглянемо дію оператора $(\Lambda_{T^m})\psi(P_k)$:

$$(\Lambda_{T^m}\psi)(P_k)=\psi(P_k\circ T^m)=0,$$

оскільки степінь композиції $P_k\circ T^m$ дорівнює $mk<n$. З іншого боку $(\Lambda_{T^m}\psi)(P_k)=\delta_z(P_k)$. Отже, $\delta_z(P_k)=0$. Це можливо, якщо $z=0$.

Теорема 4. *Нехай $\varphi,\psi\in M_b(A)$ і $(0,\ldots,u_k,0,\ldots)$, $(0,\ldots,v_n,0,\ldots)$ – відповідні зображення характерів φ,ψ. Тоді згортка $\varphi\star\psi$ має зображення $(0,\ldots,0,w_{\max\{k,n\}},0,\ldots,w_{kn},0,\ldots)$.*

Доведення. Нехай $m=\text{НСК}(k,n)$. Розглянемо алгебру $\bigotimes_{s,\pi}^m A$. Згідно з теоремою 2 функціонали $\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}$ для алгебри $\bigotimes_{s,\pi}^m A$ будуть мати зображення $(\widetilde{u_1},0,\ldots),(\widetilde{v_1},0,\ldots)$ відповідно. Дійсно, якщо $\varphi=(0,\ldots,u_k,0,\ldots)$, то для

$$j=1:\widetilde{u_1}=\delta^{(1)}(u_1)\mathop{\circledast\ldots\circledast}_{k\in J(m\cdot 1)}\delta^{(k)}(u_k)|_{\mathcal{P}(^{m\cdot 1}A)}\neq 0,$$

$$j = 2, 3, \ldots : \qquad \widetilde{u_2} = \widetilde{u_3} = \ldots = 0.$$

Аналогічно, якщо $\psi = (0, \ldots, v_n, \ldots)$, то

$$j = 1 : \widetilde{v_1} = \delta^{(1)}(v_1) \underset{k \in J(m \cdot 1)}{\ast \ldots \ast} \delta^{(k)}(v_k)|_{\mathcal{P}(^{m \cdot 1}A)} \neq 0,$$

$$j > 1 : \widetilde{v_j} = \delta^{(1)}(v_1) \underset{k \in J(m \cdot j), k > m(j-1)}{\ast \ldots \ast} \delta^{(k)}(v_k)|_{\mathcal{P}(^{m \cdot j}A)} = 0.$$

Отже, $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}$ – функціонали значення функції в точці з $(\bigotimes_{s,\pi}^m A)^{**}$. Операція згортки $\star$ зводиться до покоординатного множення перших елементів $\widetilde{u_1}, \widetilde{v_1}$, тобто $\widetilde{\varphi} \star \widetilde{\psi}(P)$ в алгебрі $\bigotimes_{s,\pi}^m A$ матиме зображення $(\widetilde{w_1}, 0, \ldots)$. Оскільки

$$\widetilde{w_1} = \delta^{(1)}(w_1) \underset{k \in J(m \cdot 1)}{\ast \ldots \ast} \delta^{(k)}(w_k)|_{\mathcal{P}(^{m \cdot 1}A)} \neq 0,$$

то існують $k_i \in J(m) = \{1, \ldots, \min\{k, n\}, \max\{k, n\}, kn\}$, що $w_{k_i} \neq 0$. Повертаючись в алгебру A, функціонал $\widetilde{\varphi} \star \widetilde{\psi}$ матиме зображення

$$(w_1, \ldots, w_{\min\{k,n\}}, 0, \ldots, \\ w_{\max\{k,n\}}, \quad 0, \ldots, w_{kn}, 0, 0, \ldots).$$

За наслідком 1, згортка $\widetilde{\varphi} \star \widetilde{\psi}$ дорівнює композиції операторів множення на відповідні елементи $\widetilde{u_1}, \widetilde{v_1}$ з $\bigotimes_{s,\pi}^m A$. За означенням, $\widetilde{\varphi} = \varphi \circ \Delta_m$, $\widetilde{\psi} = \psi \circ \Delta_m$, тобто $\varphi(P) = 0$, на всіх поліномах P степеня $j < k$ і $\psi(P) = 0$ на всіх поліномах P степеня $i < n$. Отже, згортка $(\varphi \star \psi) \circ \Delta_m = \widetilde{\varphi \star \psi} = \widetilde{\varphi} \star \widetilde{\psi}$ на поліномах P степеня меншого за $\max\{k, n\}$ буде дорівнювати нулю. Враховуючи доведене вище, зображення згортки $\varphi \star \psi$ у алгебрі A матиме вигляд

$$(0, \ldots, 0, w_{\max\{k,n\}}, 0, \ldots, w_{kn}, 0, \ldots).$$

Наступне твердження показує, що для операцій $\star$ та $\ast$, в загальному випадку, не виконується правило дистрибутивності:

$$\varphi \star (\psi \ast \theta) = (\varphi \star \psi) \ast (\varphi \star \theta). \qquad (1)$$

Тому результат теореми 4 не можна безпосередньо продовжити на загальний випадок.

Теорема 5. *Припустимо, що в $H_b(A)$ існує n-однорідний поліном $P \in \mathcal{A}_n$, $P \notin \mathcal{A}_{n-1}$. Тоді для операцій $\star$ та $\ast$ в $M_b(A)$ не виконується дистрибутивний закон.*

Доведення. Згідно з [4] існує $\varphi \in M_b(A)$, що $\varphi(P) \neq 0$ і $\varphi(Q) = Q(0)$ для довільного полінома $Q \in \mathcal{A}_{n-1}$.

Нехай (z_α) – напрямленість в A така, що $z_\alpha \to \varphi$ в слабко поліноміальній топології (така напрямленість існує згідно з [2]). Розглянемо напрямленість $(2z_\alpha)$. Очевидно, що напрямленість $(2z_\alpha)$ прямує до деякого $\psi \in M_b(A)$. Згідно з [4] (лема 3), виконується рівність

$$\varphi \ast \varphi(P) = 2\varphi(P).$$

Нехай e – одиниця алгебри A. Тоді

$$\varphi \star (\delta_e \ast \delta_e)(P) = \lim_\alpha P(z_\alpha(e + e)) = \\ = \lim_\alpha 2^n P(z_\alpha) = 2^n \varphi(P)$$

З іншого боку

$$(\varphi \star \delta_e) \ast (\varphi \star \delta_e)(P) = \lim_\alpha P(\varphi \ast \varphi) = 2\varphi(P)$$

Правило дистрибутивноісті (6) не виконується.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Aron R.M., Berner P.D.* A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings // Bull. Soc. Math. France. – 1978. – **106**. – P. 3-24.

2. *Aron R.M., Cole B.J., and Gamelin T.W.* Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space // J. Reine Angew. Math. – 1991. – **415**. – P. 51-93..

3. *Aron R.M., Cole B.J., and Gamelin T.W.* Weak-star continuous analytic functions // Can. J. Math. – 1995. – **47**. – P. 673-683.

4. *Zagorodnyuk A.* Spectra of Algebras of Entire Functions on Banach Spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 2006. – **134**. – P. 2559-2569.

5. *Тарас О.Г.* Узагальнення продовження Аренса на спектр аналітичних функцій на банаховій алгебрі // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2010. – **8**. – С. 78-83.