УДК 517.925

©2014 р. С.А. Іліка, О.В. Матвій, Л.А. Піддубна, І.М. Черевко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

СХЕМИ АПРОКСИМАЦІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Досліджена схема апроксимації систем нелінійних диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями. Розглянуто її застосування для дослідження стійкості лінійних систем із запізненням.

An approximation scheme of systems of nonlinear differential equations with several delay is investigated. We consider its application to the study of stability of linear systems with delay.

Вступ. Для диференціально-функціональних рівнянь важливою задачею є побудова та обґрунтування методів знаходження розв'язків початкових і крайових задач, оскільки на даний час немає універсальних методів їх розв'язання. Особливий інтерес викликають дослідження, в яких методи теорії звичайних диференціальних рівнянь застосовано для якісного аналізу диференціально-функціональних рівнянь.

Схема апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь уперше запропонована М. М. Красовським [1] при дослідженні задачі про синтез оптимального регулятора в системах із запізненням. Точність апроксимації нелінійних диференціально-різницевих рівнянь із запізненням досліджена Ю. М. Рєпіним [2], який уперше розглянув апроксимацію скалярного елемента запізнення у випадку, коли його вхідна функція є диференційованою або задовольняє умову Ліпшиця. Подальше вивчення схем апроксимації диференціально-різницевих рівнянь в просторах неперервних функцій на скінченному інтервалі здійснено у працях І. М. Черевка та Л. А. Піддубної [3-4]. Аналіз точності апроксимації векторного елемента запізнення для різних вхідних функцій та узагальнення схем апроксимації для систем диференціально-різницевих рівнянь запізнюючого і нейтрального типів розглянуто в роботах І. М. Черевка та О. В. Матвія [5,6]. Побудова та обгрунтування схем апроксимації лінійних та квазілінійних диференціально-функціональних рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь досліджено в роботах І.М. Черевка та С.А. Іліки [7,8].

Вивчення зв'язків між диференціально-різницевими рівняннями і відповідними апроксимуючими системами звичайних диференціальних рівнянь дозволили запропонувати алгоритми розв'язання ряду прикладних задач. У роботах [3-5] запропоновано схеми апроксимації неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних диференціально-різницевих рівнянь, а методика дослідження стійкості розв'язків таких рівнянь наведена в роботах [5,8]. Конструктивні алгоритми побудови областей стійкості лінійних систем із багатьма запізненнями одержані в [9].

У даній роботі досліджено схему апроксимації нелінійних систем диференціально-різницевих рівнянь із багатьма запізненнями та наведено алгоритм знаходження верхньої межі запізнення при якій зберігається стійкість лінійних систем із запізненням.

1. Схема апроксимації системи диференціально-різницевих рівнянь із багатьма запізненнями

Нехай n, p – деякі натуральні числа, t_0, T – задані дійсні числа, $t_0 < T$. Розглянемо систему диференціально-різницевих рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_p)), \quad (1)$$

$$t \in [t_0, T], \; p \geq 1,$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau_k, k = \overline{1,p}$, – запізнення, $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_p = \tau$; $f(t, u_0, \ldots, u_p)$ – неперервна вектор-функція, визначена для $t \in [t_0, T]$, $u_k \in R^n$, $k = \overline{0,p}$.

Будемо розглядати для $x \in \mathbb{R}^n$ норму $||x|| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.

Припустимо, що функція f задовольняє умову Ліпшица

$$||f(t, u_0', \ldots, u_p') - f(t, u_0'', \ldots, u_p'')|| \leq$$

$$\sum_{k=0}^{p} L_i ||u_k' - u_k''||, \qquad (2)$$

де $L_k > 0$, $u_k', u_k'' \in R^n$, $k = \overline{0,p}$,

$$||f(t, u_0, ..., u_p)|| = \max_t \sum_{i=1}^{n} |f_i(t, u_0, ..., u_p)|.$$

Нехай $\varphi(t)$ – задана на $[t_0 - \tau, t_0]$ неперервна функція. Розв'язком початкової задачі для системи (1) будемо називати функцію $x(t)$, яка співпадає з $\varphi(t)$ на $[t_0 - \tau, t_0]$ і задовольняє систему (1) на $[t_0, T]$.

Нехай $m \in N$. Визначимо функції $z_j(t) \in \mathbb{R}^n$, $j = \overline{0,m}$ як розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dz_0(t)}{dt} = f(t, z_0(t), z_{l_1}(t), \ldots, z_{l_p}(t)),$$

$$\frac{dz_j(t)}{dt} = \frac{m}{\tau}(z_{j-1}(t) - z_j(t)), \; j = \overline{1,m}, \qquad (3)$$

$$t \in [t_0, T],$$

з початковими умовами

$$z_j(t_0) = \varphi(t_0 - \frac{\tau j}{m}), \; j = \overline{0,m}, \qquad (4)$$

де індекси l_j однозначно визначаються нерівностями

$$\frac{\tau l_j}{m} \leq \tau_j < \frac{\tau(l_j + 1)}{m}.$$

Будемо говорити, що система звичайних диференціальних рівнянь (3) апроксимує систему рівнянь із запізненням (1), якщо справджуються співвідношення

$$||x(t - \frac{\tau j}{m}) - z_j(t)|| \to 0, \; j = \overline{0,m},$$

$$t \in [t_0, T] \text{ при } m \to \infty.$$

Нехай $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $z_j(t) = (z_{j1}(t), \ldots, z_{jn}(t))$, $j = \overline{1,m}$,

$$N_j(t) = \max_{t_0 \leq s \leq t} \sum_{i=1}^{n} |x_i(s - \frac{\tau j}{m}) - z_{ji}(s)|, \qquad (5)$$

$$j = \overline{0,m}, \; t \in [t_0, T].$$

Представимо $z_{ji}(t)$ $j = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,n}$ у вигляді суми $z_{ji}^{(1)}(t) + z_{ji}^{(2)}(t)$, де $z_{ji}^{(1)}(t)$ і $z_{ji}^{(2)}(t)$ є розв'язками таких задач Коші

$$\frac{\tau}{m} \frac{dz_{1i}^{(1)}(t)}{dt} + z_{1i}^{(1)}(t) = x_i(t),$$

$$\frac{\tau}{m} \frac{dz_{ji}^{(1)}(t)}{dt} + z_{ji}^{(1)}(t) = z_{j,i-1}^{(1)}(t), \qquad (6)$$

$$j = \overline{2,m}, \; i = \overline{1,n},$$

$$z_{ji}^{(1)}(t_0) = x_i(t_0 - \frac{j\tau}{m}), \; j = \overline{1,m}, \; i = \overline{1,n}. \qquad (7)$$

$$\frac{\tau}{m} \frac{dz_{1i}^{(2)}(t)}{dt} + z_{1i}^{(2)}(t) = z_{0i}(t) - x_i(t),$$

$$\frac{\tau}{m} \frac{dz_{ji}^{(2)}(t)}{dt} + z_{ji}^{(2)}(t) = z_{j,i-1}^{(2)}(t), \qquad (8)$$

$$j = \overline{2,m}, i = \overline{1,n},$$

$$z_{ji}^{(2)}(t_0) = 0, \; j = \overline{1,m}, \; i = \overline{1,n}. \qquad (9)$$

Оцінимо різниці $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i(t - \frac{\tau j}{m}) - z_{ji}(t)|$, враховуючи вигляд систем (6)-(7) та (8)-(9). Маємо

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i(t - \frac{j\tau}{m}) - z_{ji}(t)| =$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i(t - \frac{j\tau}{m}) - (z_{ji}^{(1)}(t) + z_{ji}^{(2)}(t))| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i(t - \frac{j\tau}{m}) - z_{ji}^{(1)}(t)| + \sum_{i=1}^{n} |z_{ji}^{(2)}(t)|. \qquad (10)$$

Для другого доданка у правій частині (10) методом математичної індукції неважко переконатися у справедливості оцінки

$$\sum_{i=1}^{n} |z_{ji}^{(2)}(s)| \leq N_0(t), \; j = \overline{1,m}, \; t \in [t_0, T]. \qquad (11)$$

Враховуючи властивості розв'язків початкової задачі для рівняння із запізненням маємо, що функції $x_i(t) \in C[t_0-\tau,T]$, $i=\overline{1,n}$ – тому для оцінки величини $|x_i(t-\frac{j\tau}{m})-z_{ji}^{(1)}(t))|$ можна застосувати нерівність [4]

$$|x_i(t-\frac{j\tau}{m})-z_{ji}^{(1)}(t))| \leq \beta_{1i}(\frac{\tau}{\sqrt{m}}),\ t\in[t_0,T],$$

$$j=\overline{1,m},\ i=\overline{1,n},$$

де $\beta_{1i}(\frac{\tau}{\sqrt{m}})=4K_i\frac{\tau}{\sqrt{m}}+2\omega(x_i,\frac{\tau}{\sqrt{m}})$, K_i – стала Ліпшица функції $x_i^{(1)}$, $\omega\Big(x_i,\dfrac{\tau}{\sqrt{m}}\Big)$ – модуль неперервності функції $x_i(t)$ на $[t_0,T]$. Отже,

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i(t-\frac{j\tau}{m})-z_{ji}^{(1)}(t)| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\beta_{1i}(\frac{\tau}{\sqrt{m}})=\beta_1(\frac{\tau}{m}). \qquad (12)$$

Із властивостей функцій $\beta_{1i}(\dfrac{\tau}{\sqrt{m}})$ маємо, що $\lim\limits_{\delta\to 0}\beta_1(\delta)=0$. Нерівність (12) справедлива для всіх $t\in[t_0,T]$, тому враховуючи позначення (5), маємо

$$N_j(t)\leq\beta_1(\frac{\tau}{m})+N_0(t),\ j=\overline{1,m}. \qquad (13)$$

Для оцінки різниці $||x(t)-z_0(t)||$, подамо рівняння (1) та (3) в еквівалентній інтегральній формі

$$x(t)-x(t_0)=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t}f(s,x(s),x(s-\tau_1),\ldots,x(s-\tau_p))ds,$$

$$t\in[t_0,T],$$

$$z_0(t)-z_0(t_0)=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t}f(s,z_0(s),z_{l_1}(s),\ldots,z_{l_p}(s))ds,$$

$$t\in[t_0,T].$$

Оцінимо $|x(s-\tau_j)-z_{l_j}(s)|$:

$$||x(s-\tau_j)-z_{l_j}(s)||=||x(s-\tau_j)-x(s-\tau_{l_j})+$$

$$+x(s-\tau_{l_j})-z_{l_j}(s)||\leq$$

$$\leq||x(s-\tau_j)-x(s-\tau_{l_j})||+$$

$$+||x(s-\tau_{l_j})-z_{l_j}(s)||\leq N_{l_j}(t)+n\omega(\frac{\tau}{m})\leq$$

$$\leq\beta_1(\frac{\tau}{m})+N_0(t)+n\omega(\frac{\tau}{m})=\beta_2(\frac{\tau}{m})+N_0(t), \qquad (14)$$

де

$$\beta_2(\frac{\tau}{m})=\beta_1(\frac{\tau}{m})+n\omega(\frac{\tau}{m}),$$

$$\omega(\frac{\tau}{m})=\max_{i=\overline{1,n}}\omega\Big(x_i,\frac{\tau}{\sqrt{m}}\Big).$$

Неважко переконатися,що $\lim\limits_{\delta\to 0}\beta_2(\delta)=0$.

Використовуючи нерівності (2), (13) та (14), для $t\in[t_0,T]$ маємо оцінку

$$||x(t)-z_0(t)||\leq\int\limits_{t_0}^{t}||f(s,x(s),x(s-\tau_1),\ldots,$$

$$x(s-\tau_p))-f(s,z_0(s),z_{l_1}(s),\ldots,z_{l_p}(s))||ds\leq$$

$$\leq\int\limits_{t_0}^{t}\Big[L_0||x(s)-z_0(s)||+\sum_{k=0}^{p}(L_k||x(s-\tau_k)-$$

$$-z_{l_k}(s)||)\Big]ds\leq$$

$$\leq\int\limits_{t_0}^{t}\Big[L_0N_0(s)+\sum_{i=k}^{p}L_k(N_0(s)+\beta_2(\frac{\tau}{m}))\Big]ds\leq$$

$$\leq p(T-t_0)\beta_2(\frac{\tau}{m})\sum_{i=k}^{p}L_k+\sum_{k=0}^{p}L_k\int\limits_{t_0}^{t}N_0(s)ds.$$

Враховуючи позначення (5), дістаємо

$$N_0(t)\leq p(T-t_0)\beta_2(\frac{\tau}{m})\sum_{k=1}^{p}L_k+$$

$$+\sum_{k=0}^{p}L_k\int\limits_{t_0}^{t}N_0(s)ds\ t\in[t_0,T].$$

Застосовуючи нерівність Гронуолла-Беллмана, дістаємо

$$N_0(t)\leq p(T-t_0)\beta_2(\frac{\tau}{m})\sum_{k=1}^{p}L_ke^{(T-t_0)\sum\limits_{k=0}^{p}L_k},$$

$$t \in [t_0, T].$$

Тепер із нерівності (13) маємо

$$N_j(t) \le p(T-t_0)\beta_2(\frac{\tau}{m})\sum_{k=1}^{p} L_k e^{(T-t_0)\sum\limits_{k=0}^{p} L_k} +$$

$$+\beta_1(\frac{\tau}{m}) = \beta_3(\frac{\tau}{m}), \qquad (15)$$

$j = \overline{1, m},\ t \in [t_0, T]$. Крім того, $\lim\limits_{\delta \to 0} \beta_3(\delta) = 0$.

Звідси дістаємо наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай для системи (1) справджується нерівність (2). Тоді розв'язок задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (3)-(4) апроксимує розв'язок початкової задачі для системи диференціально-різницевих рівнянь (1) при* $m \to \infty$ *і* $t \in [t_0, T]$.

2. Стійкість лінійних систем із запізненням

Розглянемо систему диференціальних рівнянь із запізненням

$$x'(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{k} B_i x(t-\tau_i), \qquad (16)$$

де A, B_i, $i = \overline{1, k}$, – сталі матриці розмірності $n \times n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k$.

Теорія стійкості систем із запізненням (16) на даний час є одним із найбільш важливих та достатньо повно досліджених розділів диференціальних рівнянь із аргументом, що відхиляється.

Теорема 2 [10]. *Для того, щоб тривіальний розв'язок системи* (16) *був експоненціально стійким, необхідно і досить, щоб всі корені його характеристичного рівняння*

$$D(\lambda) = \det\left(\lambda E - A - \sum_{i=1}^{k} B_i e^{-\lambda\tau_i}\right) = 0, \quad (17)$$

лежали у півплощині $\mathrm{Re}\lambda < 0$.

Отже, дослідження стійкості розв'язків лінійних стаціонарнихДРР зводиться до знаходження умов від'ємності дійсних частин всіх нулів квазіполіномів. Перевірка цього критерію на практиці є достатньо складною.

Конструктивні алгоритми дослідження стійкості лінійних стаціонарних систем із запізненням на основі аналізу властивостей нульового розв'язку апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь наведено в [5].

Поставимо у відповідність системі (16) за схемою, що наведено в п. 1, систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dz}{dt} = Az_0(t) + \sum_{i=1}^{k} B_i z_i(t), \quad l_i = \left[\frac{\tau_i m}{\tau}\right], \quad (18)$$

$$\frac{dz_i}{dt} = \mu(z_{i-1} - z_i), \quad i = \overline{1, m}, \mu = \frac{m}{\tau}.$$

Характеристичний многочлен системи (18) має вигляд

$$\Psi_m(\lambda) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \lambda E - A & 0 & \dots & -B_1 & \dots & -B_k \\ -\mu E & (\mu+\lambda)E & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\mu E & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (\mu+\lambda)E & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & (\mu+\lambda)E \end{pmatrix} \quad (19)$$

Елементи визначника (19) – матриці розмірності $n \times n$. У першому рядку визначника ненульові блоки знаходяться на позиціях l_i, $i = \overline{0, k}$.

Теорема 3[5]. *Якщо нульовий розв'язок системи* (16) *експоненціально стійкий (нестійкий), то існує* $m_0 > 0$ *таке, що при всіх* $m > m_0$ *нульовий розв'язок системи* (18) *експоненціально стійкий (нестійкий). Якщо для всіх* $m > m_0$ *нульовий розв'язок апроксимуючої системи* (18) *експоненціально стійкий (нестійкий), то й нульовий розв'язок системи* (16) *експоненціально стійкий (нестійкий).*

Застосовуючи теореми 2 і 3, можна одержати ефективний алгоритм дослідження системи

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bx(t-\tau), \qquad (20)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, A, B – $n \times n$ – сталі матриці, $\tau > 0$, на експоненціальну стійкість.

Обчислюючи нулі характеристичного рівняння апроксимуючої для (20) системи звичайних диференціальних рівнянь при різних значеннях τ, для яких зберігається стійкість нульового розв'язку апроксимуючої системи, знаходимо область значень запізнення τ, для яких система (20) є експоненціально стійкою.

У випадку, коли система із запізненням (20) другого порядку, такий алгоритм нескладно реалізувати. Числові експерименти показують, що система (20) із матрицями

$$A = \begin{pmatrix} -0.9 & -6.5 \\ 4.8 & -0.9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1.39 & -0.65 \\ 0.48 & -1.39 \end{pmatrix}$$

буде асимптотично стійкою тоді, коли $\tau \in (0, \tau_1) \cup (\tau_2, \tau_3)$, де $\tau_1 = 0.2862$, $\tau_2 = 0.7141$, $\tau_3 = 1.2142$.

Одержані результати добре узгоджуються із дослідженням стійкості лінійних диференціальних рівнянь із запізненням в роботі [11].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Красовский Н.Н.* Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // ПММ. – 1964. – **28**, № 4. – С. 716–725.

2. *Репин Ю.М.* О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями // ПММ. - 1965. – **19**, № 2. – С. 226–235.

3. *Cherevko I.M., Piddubna L.A.* Approximations of differential-difference equations and calculations of nonasymptotic roots of quasipolynomials // Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximations. – 1999. – **28**, N 1. – P. 15–21.

4. *Піддубна Л.А., Черевко І.М.* Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 1999. – **2**, № 1. – С. 42–50.

5. *Матвій О.В., Черевко І.М.* Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість // Нелінійні коливання, 2004. – **7**, № 2. – С. 208–216.

6. *Матвій О.В., Черевко І.М.* Про наближення систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання, 2007. – **10**, № 3. – С. 329–335.

7. *Іліка С.А., Черевко І.М.* Апроксимація нелінійних диференціально-функціональних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля, **55**, № 1. – С. 39–48.

8. *Матвій О.В., Пернай С.А., Черевко І.М.* Про стійкість лінійних систем із запізненням // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. – Чернівці: рута, 2008. – Вип. 421: Математика. – С. 66–70.

9. *Клевчук І.І., Пернай С.А., Черевко І.М.* Побудова областей стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь // Доповіді НАН України, 2012/ – **7**. – С. 28–34.

10. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1959. – 212 с

11. *Хохлова Т.Н.* Конус устойчивости для линейного матричного дифференциального уравнения с запаздыванием // Вестник ЮУрГУ. – 2010. – Вып. 30: Математика. – С. 33–37.