УДК 515.12

©2014 р. **О. Карлова**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ СИЛЬНО НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ НА ДОБУТКАХ

Досліджуються сильно нарізно неперервні функції на підмножинах добутків топологічних просторів. Доводиться, що клас сильно нарізно неперервних дійснозначних функцій замкнений відносно сум, різниць, добутків, рівномірної і локально скінченної сум, але не замкнений відносно частки. Крім того, досліджуються детермінальні множини в класі сильно нарізно неперервних функцій.

We investigate strongly separately continuous function on subsets of products of topological spaces. We prove that the class of all strongly separately continuous functions is closed under sums, differences, products, uniform limits and locally finite limits, but is not closed under quotients. Moreover, we investigate determining sets in the class of strongly separately continuous functions.

1 Вступ

Нехай $X = \prod\limits_{t\in T} X_t$ – добуток сім'ї множин X_t, де $|X_t| > 1$ для кожного $t \in T$. Для множини $S \subseteq S_1 \subseteq T$ і точок $a = (a_t)_{t\in T} \in X$ та $x = (x_t)_{t\in S_1} \in \prod\limits_{t\in S_1} X_t$ через a_S^x ми будемо позначати точку $(y_t)_{t\in T} \in X$, таку, що

$$y_t = \begin{cases} x_t, & t \in S, \\ a_t, & t \in T \setminus S. \end{cases}$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо множини

$$\sigma_n(a) = \{(x_t)_{t\in T} \in X : |\{t \in T : x_t \neq a_t\}| \le n\},$$

$$\sigma(a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n(a).$$

Підмножини вигляду $\sigma(a)$ називають ще σ-добутками простору X.

Для підмножини $X \subseteq \prod\limits_{t\in T} X_t$ добутку топологічних просторів X_t символом X_τ ми будемо позначати множину X з топологією поточкової збіжності, індукованою з добутку $\prod\limits_{t\in T} X_t$.

Якщо $a \in X$, $E \subseteq \sigma(a)$ і $S \subseteq T$, то покладемо

$$X_S = \prod_{t\in S} X_t,\ E_S = \{x \in X_S : a_S^x \in E\}.$$

Означення 1. Множина $A \subseteq X$ називається *$\mathcal{S}$-відкритою* [6], якщо

$$\sigma_1(x) \subseteq A$$

для всіх $x \in A$.

Означення 2. Нехай $\mathcal{T}$ – деяка топологія на $\mathcal{S}$-відкритій множині $X \subseteq \prod\limits_{t\in T} X_t$ і (Y, d) – метричний простір. Функція $f : X \to Y$ називається *сильно нарізно неперервною в точці $a \in X$ відносно t-ої змінної*, якщо

$$\lim_{x\to a} d(f(x), f(x_t^a)) = 0.$$

Функція $f : X \to Y$ є *сильно нарізно неперервною в точці $a \in X$*, якщо f сильно нарізно неперервна в точці a відносно кожної змінної $t \in T$, і функція f є *сильно нарізно неперервною на множині X*, якщо f сильно нарізно неперервна в кожній точці $a \in X$ відносно кожної змінної $t \in T$.

Поняття сильно нарізно неперервної дійснозначної функції від n дійсних змінних ввів О. Дзаґнідзе в статті [2] і встановив, що функція f сильно нарізно неперервна на $\mathbb{R}^n$ тоді і тільки тоді, коли f неперервна. Продовжуючи ці дослідження, в [1] і [4] автори розглядали сильно нарізно неперервні функції, визначені на просторі послідовностей ℓ_2, наділеному стандартною топологією, породженою ℓ_2-нормою.

Природно виникло питання про дослідження сильно нарізно неперервних функцій, визначених на просторах послідовностей з іншими топологіями (наприклад, з топологією добутку, топологією прямої границі чи ящиковою топологією). Так, в [5] вивчалася берівська класифікація сильно нарізно неперервних функцій, заданих на $\mathbb{R}^{\aleph_0}$; зокрема, було показано, що існує сильно нарізно неперервна функція $f : \mathbb{R}^{\aleph_0} \to \mathbb{R}$, яка не вимірна за Бером. Далі, в [6] автори охарактеризували множину точок розриву сильно нарізно неперервної дійснозначної функції, визначеної на σ-добутку послідовності скінченновимірних нормованих просторів. В [7] розглядалися сильно нарізно неперервні функції, визначені на добутках топологічних просторів, наділених ящиковою топологією.

В цій статті ми досліджуємо операції над сильно нарізно неперервними функціями (такі, як сума, різниця, добуток, мінімум та максимум) і встановлюємо, що частка сильно нарізно неперервних функцій не є сильно нарізно неперервною функцією. Крім того, ми вводимо поняття суперщільної множини в σ-добутку X топологічних просторів і встановлюємо необхідні і достатні умови на множину $E \subseteq X$, таку, що для довільних сильно нарізно неперервних дійснозначних функцій f і g на X з рівності $f|_E = g|_E$ випливає рівність $f(x) = g(x)$ для всіх $x \in X$.

2 Майже відкриті множини і сильно нарізно неперервні функції

Нехай $X = \prod\limits_{t\in T} X_t$ – добуток сім'ї топологічних просторів і $a \in X$.

Означення 3. Множина $W \subseteq \sigma(a)$ називається *майже відкритою в* $\sigma(a)$, якщо для довільної скінченної множини $S \subseteq T$ множина W_S відкрита в просторі X_S, наділеному топологією поточкової збіжності. Відповідно, множина $E \subseteq \sigma(a)$ називається *майже замкненою в* $\sigma(a)$, якщо її доповнення $\sigma(a) \setminus E$ майже відкрите в $\sigma(a)$.

Теорема 1. *Нехай $(X_t)_{t\in T}$ – сім'я топологічних просторів, (Y, d) – метричний простір, $a \in X = \prod\limits_{t\in T} X_t$ і $f : \sigma_\tau(a) \to Y$ – сильно нарізно неперервна функція. Тоді множина $f^{-1}(V)$ майже відкрита в $\sigma(a)$ для довільної відкритої множини $V \subseteq Y$.*

Доведення. Нехай V – відкрита множина в Y і $W = f^{-1}(V)$. Розглянемо таку неперервну функцію $\psi : Y \to \mathbb{R}$, що $V = \psi^{-1}((0, 1))$. Покладемо $h = \psi \circ f$ і зауважимо, що функція $h : \sigma(a) \to \mathbb{R}$ сильно нарізно неперервна, причому $f^{-1}(V) = h^{-1}((0, 1))$.

Нехай $S \subseteq T$ – довільна скінченна множина. Позначимо $G = (h^{-1}(0, 1))_S$ і покажемо, що множина G відкрита в X_S. Зафіксуємо $z_0 \in G$. Тоді $u_0 = a_S^{z_0} \in h^{-1}(0, 1)$ і $0 < \varepsilon = h(u_0)/2 < \frac{1}{2}$. Оскільки функція h сильно нарізно неперервна в точці u_0 відносно t-ої змінної для кожного $t \in S$, то існує такий базисний окіл U_0 точки u_0 в X, що

$$|h(x) - h(x_S^{u_0})| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

для всіх $x \in U_0 \cap \sigma(a)$. З неперервності відображення $\varphi : X_S \to \sigma(a)$, $\varphi(z) = a_S^z$, в точці z_0 випливає, що існує базисний окіл W_0 точки z_0 в X_S, такий, що $\varphi(W_0) \subseteq U_0$. Покажемо, що $W_0 \subseteq G$. Нехай $z \in W_0$ і $u = a_S^z \in U_0$. Оскільки $y = x_S^u \in U_0$ і $y_S^{u_0} = x_S^{u_0}$, то з нерівності (1) випливає, що

$$\begin{gathered}|h(x) - h(x_S^u)| \le \\ \le |h(x) - h(x_S^{u_0})| + |h(x_S^{u_0}) - h(x_S^u)| < \\ < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{gathered}$$

для всіх $x \in U_0 \cap \sigma(a)$. Тоді з останньої нерівності при $x = u_0$ випливає, що

$$|h(u) - \varepsilon| < \varepsilon,$$

звідки $0 < h(u) < 2\varepsilon < 1$. Отже, $z \in G$. Таким чином, $W_0 \subseteq G$ і множина G відкрита в X_S.

Розглянемо добуток $X = \prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ послідовності топологічних просторів $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ і для точки $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in X$ позначимо

$$E_n = \prod_{k=1}^{n} X_k, \qquad \sigma^n(a) = E_n \times \prod_{k=n+1}^{\infty} \{a_k\}.$$

Нехай $\sigma_\tau^n(a)$ – це множина $\sigma^n(a)$ з топологією τ_n поточкової збіжності, а $\sigma_\infty(a)$ – це множина $\sigma(a)$, наділена найсильнішою топологією τ_∞, в якій кожне тотожне вкладення $\sigma_\tau^n(a) \hookrightarrow \sigma_\tau^{n+1}(a)$ неперервне. Припустимо, крім того, що для кожного n простір $\sigma_\tau^n(a)$ замкнений в $\sigma_\tau^{n+1}(a)$. Зауважимо, що множина W відкрита в $\sigma_\infty(a)$ тоді і тільки тоді, коли множина $W \cap \sigma^n(a)$ відкрита в $\sigma_\tau^n(a)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Крім того, множина $W \subseteq \sigma(a)$ майже відкрита в $\sigma(a)$ відносно топології поточкової збіжності тоді і тільки тоді, коли вона відкрита в $\sigma_\infty(a)$.

З цих зауважень і теореми 1 негайно випливає

Теорема 2. *Нехай $(X_n)_{n=1}^\infty$ – послідовність топологічних просторів, $a \in \prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ і Y – метричний простір. Тоді кожна сильно нарізно неперервна функція $f : \sigma_\tau(a) \to Y$ неперервна на $\sigma_\infty(a)$.*

Обернене твердження не вірне, як показує наступний приклад.

Приклад 1. *Нехай $\mathbb{R}^\infty = \sigma_\infty(a)$, де $a = (0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^{\aleph_0}$. Тоді існує неперервна функція $f : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$, яка не є сильно нарізно неперервною на $\sigma(a)$ з топологією поточкової збіжності.*

Доведення. Для кожного $n \in \mathbb{N}$Покладемо

$$x_n = (\frac{1}{n}, 0, \dots, 0, \underbrace{n}_{n}, 0, \dots),$$
$$y_n = (0, \dots, 0, \underbrace{n}_{n}, 0, \dots)$$

і нехай $F_1 = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, $F_2 = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Оскільки множини F_1 і F_2 неперетинні і замкнені в досконало нормальному просторі $\mathbb{R}^\infty$, то існує неперервна функція $f : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$, така, що $F_1 = f^{-1}(0)$ і $F_2 = f^{-1}(1)$. Зауважимо, що $x_n \to a$ покоординатно на $\sigma(a)$ і $y_n = (x_n)_1^a$. Але $f(x_n) - f(y_n) = 1$ для кожного n, звідки випливає, що функція f не є сильно нарізно неперервною на $\sigma(a)$ в точці a відносно першої змінної.

3 Операції над сильно нарізно неперервними функціями

Означення 4. Множина $A \subseteq \prod\limits_{t\in T} X_t$ називається *проективно симетричною відносно точки* $a \in A$, якщо $x_t^a \in A$ для всіх $t \in T$ та $x \in A$.

Означення 5. Нехай $X \subseteq \prod\limits_{t\in T} X_t$ і $\mathcal{T}$ – деяка топологія на X. Простір $(X, \mathcal{T})$ називається *локально проективно симетричним* [6], якщо кожна точка $x \in X$ має базу проективно симетричних околів відносно x.

Легко бачити, що довільна $\mathcal{S}$-відкрита множина добутку $\prod\limits_{t\in T} X_t$ топологічних просторів X_t з топологією τ поточкової збіжності є локально проективно симетричним простором. Також всіх класичні простори послідовностей, такі, як простір c всіх збіжних послідовностей або простори ℓ_p з $0 < p \leq \infty$ є локально проективно симетричними.

Твердження 4. *Нехай X – $\mathcal{S}$-відкрита множина в добутку $\prod\limits_{t\in T} X_t$, наділена локально проективно симетричною топологією $\mathcal{T}$, $a = (a_t)_{t\in T} \in X$, Y – метричний простір і $f : (X, \mathcal{T}) \to Y$ – неперервне відображення в точці a. Тоді f сильно нарізно неперервне в точці a.*

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і $t \in T$. Виберемо проективно симетричний відносно точки a окіл U точки a, такий, що

$$d(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всіх $x \in U$. Тоді $x_t^a \in U$ і

$$d(f(x), f(x_t^a)) \leq d(f(x), f(a)) + \\ + d(f(a), f(x_t^a)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всіх $x \in U$.

Теорема 3. *Нехай $X \subseteq \prod\limits_{t\in T} X_t$ – $\mathcal{S}$-відкрита множина, наділена локально проективно симетричною топологією $\mathcal{T}$ і $x_0 \in X$.*

(i) *Якщо $f : X \to \mathbb{R}$ і $g : X \to \mathbb{R}$ сильно нарізно неперервні функції в точці x_0, то функції $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $|f(x)|$, $\min\{f(x), g(x)\}$ і $\max\{f(x), g(x)\}$ також сильно нарізно неперервні в точці x_0.*

(ii) *Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, що складається з сильно нарізно неперервних в точці x_0 функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$ рівномірно збіжний на множині X, то сума $f(x)$ цього ряду сильно нарізно неперервна в точці x_0.*

(iii) *Якщо $(f_i)_{i\in I}$ – локально скінченна сім'я сильно нарізно неперервних в точці x_0 функцій $f_i : X \to \mathbb{R}$, то функція $f(x) = \sum\limits_{i\in I} f_i(x)$ сильно нарізно неперервна в точці x_0.*

Доведення. Зафіксуємо змінну $t \in T$ і покажемо, що вказані функції сильно нарізно неперервні в точці x_0 відносно t-ої змінної.

(i). В цьому пункті доведемо, що функція $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ сильно нарізно неперервна. Досить розглянути випадок, коли функції f та g обмежені. Оскільки

$$\begin{aligned}
&|f(x) \cdot g(x) - f(x_t^{x_0}) \cdot g(x_t^{x_0})| \leq \\
&\quad \leq |f(x) \cdot g(x) - f(x_t^{x_0}) \cdot g(x)| + \\
&\qquad + |f(x_t^{x_0}) \cdot g(x) - f(x_t^{x_0}) \cdot g(x_t^{x_0})| = \\
&\quad = |g(x)||f(x) - f(x_t^{x_0})| + \\
&\qquad\qquad + |f(x_t^{x_0})||g(x) - g(x_t^{x_0})|,
\end{aligned}$$

то $\lim\limits_{x\to x_0} |h(x) - h(x_t^{x_0})| = 0$.

(ii). Випливає з нерівності

$$|f(x) - f(x_t^{x_0})| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_n(x_t^{x_0})|$$

і теореми про граничний перехід під знаком суми рівномірно збіжного ряду.

(iii). Нехай $(W_i : i \in I)$ – локально скінченна сім'я множин $W_i = f_i^{-1}((0, 1])$, $W = \bigcup\limits_{i\in I} W_i$ і $\varepsilon > 0$.

У випадку $x_0 \notin \overline{W}$ виберемо такий проективно симетричний відносно x_0 окіл V точки x_0 в X, що $V \subseteq X \setminus \overline{W}$. Тоді для всіх $x \in V$ маємо, що $f_i(x) = f_i(x_t^{x_0}) = 0$, звідки $|f(x) - f(x_t^{x_0})| = 0 < \varepsilon$.

Розглянемо випадок $x_0 \in \overline{W}$ і виберемо окіл U точки x_0 в X, такий, що множина $I_0 = \{i \in I : U \cap W_i \neq \emptyset\}$ скінченна і непорожня. Для кожного $i \in I_0$ візьмемо такий окіл U_i точки x_0 в X, що для всіх $x \in U_i$ виконується нерівність

$$|f_i(x) - f_i(x_t^{x_0})| < \frac{\varepsilon}{|I_0|}.$$

Покладемо $V = U \cap \left(\bigcap\limits_{i\in I_0} U_i\right)$. Тоді V – окіл точки x_0 в X, причому

$$|f(x) - f(x_t^{x_0})| \leq \sum_{i\in I_0} |f_i(x) - f_i(x_t^{x_0})| < \varepsilon$$

для всіх $x \in V$.

Втім, виявляється, що частка сильно нарізно неперервних функцій не обов'язково є сильно нарізно неперервною функцією. Відповідний приклад ми розглянемо в наступному пункті.

4 Частка сильно нарізно неперервних функцій

Нехай $R^+ = (0, +\infty)^{\aleph_0}$, $|\cdot|_n$ – метрика на просторі X_n при $n \in \mathbb{N}$, $a \in \prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, $u = (u_n)_{n=1}^{\infty} \in \sigma(a)$ і $r = (r_n)_{n=1}^{\infty} \in R^+$. Покладемо

$$B_n(u_n, r_n) = \{x \in X_n : |x - u_n|_n < r_n\},$$
$$B_n[u_n, r_n] = \{x \in X_n : |x - u_n|_n \leq r_n\},$$
$$B_\infty(u, r) = \left(\prod_{n=1}^{\infty} B_n(u_n, r_n)\right) \cap \sigma(a).$$

Лема 1. *Нехай $((X_n, |\cdot|_n))_{n=1}$ – послідовність локально компактних метричних просторів і $a \in \prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$. Тоді сім'я $\mathcal{B}_\infty = \{B_\infty(u, r) : u \in \sigma(a),\ r \in R^+\}$ утворює базу в просторі $\sigma_\infty(a)$.*

Доведення. Розглянемо довільну відкриту в $\sigma_\infty(a)$ множину W і для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо $G_n = \{x \in E_n : a^x_{\{1,\ldots,n\}} \in W\}$. Нехай $x \in W$, причому $x_n = a_n$ для всіх

$n > N$. Для кожного $n = 1, \ldots, N$ виберемо таке $r_n(x) > 0$, що

$$F_1 = \prod_{n=1}^{N} B_n[x_n, r_n(x)] \subseteq G_N.$$

Оскільки $F_1 \times \{a_{N+1}\}$ – компактна підмножина відкритої в E_{N+1} множини G_{N+1}, то існує таке $r_{N+1}(x) > 0$, що

$$F_2 = F_1 \times B_{N+1}[a_{N+1}, r_{N+1}(x)] \subseteq G_{N+1}.$$

Далі, $F_2 \times \{a_{N+2}\}$ – компактна підмножина відкритої в E_{N+2} множини G_{N+2}. Тому існує таке $r_{N+2}(x) > 0$, що

$$F_2 \times B_{N+2}[a_{N+2}, r_{N+2}(x)] \subseteq G_{N+2}.$$

Продовжуючи цей процес до нескінченності, ми одержимо послідовність $(r_n(x))_{n=1}^{\infty} \in R^+$, таку, що

$$\Big(\prod_{n=1}^{\infty} B_n[x_n, r_n(x)]\Big) \cap \sigma(a) \subseteq W.$$

Тоді $x \in B_\infty(x, r(x)) \subseteq W$.

З [7, Лема 2] випливає наступний факт.

Лема 2. *Нехай $X = \prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ – добуток послідовності метричних просторів X_n, $a \in X$ і $r \in R^+$. Тоді існує сильно нарізно неперервна функція $f : X \to [0,1]$, така, що*

$$B_\infty(a, r) = f^{-1}((0,1]).$$

Теорема 4. *Нехай $((X_n, |\cdot|_n))_{n=1}^{\infty}$ – послідовність локально компактних сепарабельних метричних просторів і $a \in X = \prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$. Тоді*

(i) якщо $W \subseteq \sigma(a)$ – майже відкрита множина, то існує сильно нарізно неперервна функція $f : X \to [0,1]$, така, що $W = f^{-1}((0,1])$;

(ii) якщо $F \subseteq \sigma(a)$ – майже замкнена множина, то існує сильно нарізно неперервна функція $f : X \to [0,1]$, така, що $F = f^{-1}(0)$.

Доведення. *(i).* Згідно з лемою 1 існує сім'я $(B_i : i \in I)$ множин $B_i = B_\infty(u_i, r_i)$, така, що $W = \bigcup\limits_{i \in I} B_i$. Оскільки для кожного $n \in \mathbb{N}$ сім'я $(B_i \cap \sigma^n(a) : i \in I)$ утворює відкрите покриття множини $V_n = W \cap \sigma^n(a)$ в $\sigma^n(a)$, то існує зліченна множина $I_n \subseteq I$, така, що сім'я $(B_i \cap \sigma^n(a) : i \in I_n)$ є покриттям V_n. Покладемо $J = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \{i_m : m \in \mathbb{N}\}$. Тоді $W = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B_{i_m}$. Далі, для кожного $m \in \mathbb{N}$ за лемою 2 існує сильно нарізно неперервна функція $f_m : X \to [0,1]$, така, що $B_{i_m} = f_m^{-1}((0,1])$. Тоді функція $f : X \to [0,1]$,

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} f_m(x)$$

є сильно нарізно неперервною за теоремою 3. Крім того, $W = f^{-1}((0,1])$.

(ii). Нехай тепер $F \subseteq \sigma(a)$ – майже замкнена множина і $g : X \to [0,1]$ – така сильно нарізно неперервна функція, що $\sigma(a) \setminus F = g^{-1}((0,1])$. Для кожного $x \in X$ покладемо

$$f(x) = g(x) + \chi_{X \setminus \sigma(a)}(x).$$

Нескладно можна переконатися, що функція f є шуканою.

Теорема 5. *Існують сильно нарізно неперервні дійснозначні функції на $\mathbb{R}^{\aleph_0}$, частка яких не є сильно нарізно неперервною.*

Доведення. Нехай $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, F_1 і F_2 – такі послідовності і множини, як в прикладі 1. Оскільки кожна з множин F_1 та F_2 замкнена в $\mathbb{R}^\infty$, а значить, майже замкнена в $\mathbb{R}^\infty_\tau$, то згідно з теоремою 4 існують сильно нарізно неперервні функції $f, g : \mathbb{R}^{\aleph_0} \to \mathbb{R}$, що $F_1 = f^{-1}(0)$ і $F_2 = g^{-1}(0)$. Функція $h(x) = f(x) + g(x)$ сильно нарізно неперервна на $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ за теоремою 3. Розглянемо частку $\varphi(x) = \frac{f(x)}{h(x)}$ і зауважимо, що $\varphi(x) = 0$ на F_1 і $\varphi(x) = 1$ на F_2. Зазначимо, що $y_n = (x_n)_1^0$ і $x_n \to 0$ на $\mathbb{R}^{\aleph_0}$. З рівності

$$|\varphi(x_n) - \varphi(y_n)| = 1$$

випливає, що функція $\varphi : \mathbb{R}^{\aleph_0} \to \mathbb{R}$ не є сильно нарізно неперервною в точці $x = 0$ відносно першої змінної.

5 Детермінальні і суперщільні множини

Нехай (X, Y) – пара топологічних просторів і $\mathcal{F}(X, Y)$ – деякий клас відображень між X та Y.

Означення 6. Множина $E \subseteq X$ називається *детермінальною в класі* $\mathcal{F}(X, Y)$, якщо для довільних двох відображень $f, g \in \mathcal{F}(X, Y)$ з того, що $f|_E = g|_E$ випливає, що $f = g$ на X.

Добре відомо, що кожна всюди щільна підмножина E топологічного простору X є детермінальною в класі $C(X, \mathbb{R})$ всіх неперервних дійснозначних функцій на X.

Теорема Серпінського [3] стверджує, що всюди щільна підмножина $E \subseteq \mathbb{R}^2$ є детермінальною в класі $CC(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ всіх нарізно неперервних дійснозначних функцій на $\mathbb{R}^2$.

В цьому пункті ми встановимо необхідні і достатні умови детермінальності множини E в класі сильно нарізно неперервних функцій.

Означення 7. Нехай $\mathcal{T}$ – деяка топологія на добутку $X = \prod\limits_{t \in T} X_t$ і $a \in X$. Множина $E \subseteq \sigma(a)$ називається *суперщільною в* $(\sigma(a), \mathcal{T})$, якщо для довільної скінченної множини $S \subseteq T$ множина E_S щільна в X_S.

Легко бачити, що якщо $\mathcal{T}$ – це топологія поточкової збіжності, то множина суперщільна в $(\sigma(a), \mathcal{T})$ тоді і тільки тоді, коли вона щільна в $(\sigma(a), \mathcal{T})$. Крім того, для довільної топології $\mathcal{T}$ на X із суперщільності множини випливає її щільність. Обернене твердження не вірне, як показує наступний результат.

Твердження 5. *Нехай $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність гаусдорфових сепарабельних просторів, $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, причому в кожному просторі X_n існує нетривіальна збіжна послідовність $(x_{n,k})_{k=1}^{\infty}$ до точки a_n. Тоді в $\sigma_\infty(a)$ існує всюди щільна множина A, така, що для кожного $n \geq 1$ множина*

$$A_n = \{x \in E_n : a^x_{\{1,\dots,n\}} \in A\}$$

ніде не щільна в E_n.

Доведення. Оскільки для кожного n добуток $E_n = \prod\limits_{k=1}^{n} X_k$ сепарабельний, то в ньому існує всюди щільна множина $B_n = \{d_{n,k} : k \in \mathbb{N}\}$. Покладемо $D_1 = \{d_{1,1}\}$ і для всіх $n \geq 1$ нехай

$$D_{n+1} = \{(d_{n,k}, x_{n+1,k}) : k \in \mathbb{N}\},$$

$$D^a_{n+1} = D_{n+1} \times \prod_{k=n+2}^{\infty} \{a_k\},$$

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} D^a_n.$$

Покажемо, що для кожного $n \geq 1$ має місце включення

$$\overline{D^a_{n+1}} \supseteq \sigma^n(a).$$

Нехай $x = (x_1, \dots, x_n, a_{n+1}, \dots) \in \sigma^n(a)$ і $W = (\prod\limits_{k=1}^{\infty} W_k) \cap \sigma(a)$ – базисний окіл точки x в $\sigma_\infty(a)$. Виберемо послідовність $(d_{n,k_m})_{m=1}^{\infty}$ точок з множини B_n, яка збігається до точки $p = (x_1, \dots, x_n)$ в E_n. Нехай N_1 – такий номер, що $d_{n,k_m} \in W_1 \times \dots \times W_n$ для всіх $k_m \geq N_1$, а N_2 – такий номер, що $x_{n+1,k} \in W_{n+1}$ для всіх $k \geq N_2$. Позначимо $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді

$$(d_{n,N}, x_{n+1,N}) \in W \cap D^a_{n+1}.$$

З включень

$$\overline{A} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D^a_n} \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{D^a_n} \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma^n(a) = \sigma(a)$$

випливає, що множина A всюди щільна в $\sigma_\infty(a)$.

Залишилось зауважити, що $A_n = D_n$ і кожна множина D_n ніде не щільна в E_n при $n \geq 1$.

Наслідок 2. *В просторі $\mathbb{R}^\infty$ існує всюди щільна множина, яка не є суперщільною.*

Нам буде потрібний також наступний результат.

Теорема 6. [6, Corollary 3.6] *Нехай X – $\mathcal{S}$-відкрита множина в добутку $\prod\limits_{k=1}^{n} X_k$ топологічних просторів X_k і Y – метричний*

простір. Тоді кожна сильно нарізно неперервна функція $f : X_\tau \to Y$ неперервна.

Теорема 7. *Нехай $X = \prod\limits_{t\in T} X_t$ – добуток сім'ї цілком регулярних просторів X_t, $\mathcal{T}$ – деяка топологія на X, звуження якої на довільний скінченний добуток X_S збігається з топологією поточкової збіжності на X_S, $a \in X$, $\sigma_{\mathcal{T}}(a)$ – множина $\sigma(a)$, наділена топологією $\mathcal{T}$ і SSC – клас всіх сильно нарізно неперервних дійснозначних функцій на $\sigma_{\mathcal{T}}(a)$. Для множини $E \subseteq \sigma(a)$ наступні умови рівносильні:*

(i) E – детермінальна в класі SSC;

(ii) E – суперщільна в $\sigma_{\mathcal{T}}(a)$.

Доведення. *(i) $\Rightarrow$ (ii).* Міркуючи від супротивного, припустимо, що існує така скінченна множина $S \subseteq T$, що множина E_S не є щільною в X_S. Виберемо довільну точку $u \in X_S \setminus \overline{E_S}$, де замикання береться в просторі X_S. Оскільки добуток X_S цілком регулярний, то існує така неперервна функція $\varphi : X_S \to \mathbb{R}$, що $\overline{E_S} \subseteq \varphi^{-1}(0)$ і $\varphi(u) = 1$. Для всіх $x = (x_t)_{t\in T} \in \sigma(a)$ покладемо $f(x) = \varphi((x_t)_{t\in S})$. Тоді функція $f : \sigma_{\mathcal{T}} \to \mathbb{R}$ неперервна, причому $f|_E = 0$. Зауважимо, що $f(a_S^u) = \varphi(u) = 1$, що суперечить детермінальності множини E.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Нехай $f : \sigma_{\mathcal{T}}(a) \to \mathbb{R}$ – сильно нарізно неперервна функція, така, що $f|_E = 0$. Покажемо, що $f(x) = 0$ для всіх $x \in \sigma(a)$. Зафіксуємо точку $u = (u_t)_{t\in T}$ з $\sigma(a)$ і нехай $S \subseteq T$ – така скінченна множина, що $u_t = a_t$ для всіх $t \in T\backslash S$. Зауважимо, що функція $g : X_S \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(a_S^x)$, неперервна згідно з теоремою 6. Крім того, множина E_S щільна в X_S, причому $g|_{E_S} = 0$. Тоді $g \equiv 0$ на всьому добутку X_S. Тоді

$$f(u) = f(a_S^u) = g(u) = 0.$$

Отже, множина E детермінальна.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. J. Činčura, T. Šalát and T. Visnyai, *On separately continuous functions $f : \ell^2 \to \mathbb{R}$*, Acta Acad. Paedagog. Agriensis, XXXI (2004), 11–18.

2. O. Dzagnidze, *Separately continuous function in a new sense are continuous*, Real Anal. Exchange **24** (1998-99), 695–702.

3. W. Sierpiński, *Sur une propertie de fonctions de deux variables réeles, continuous par rapport à chacune de variables*, Publ. Mat. Univ. Belgrade, vol.1 (1932), 125–128.

4. T. Visnyai, *Strongly separately continuous and separately quasicontinuous functions $f : \ell^2 \to \mathbb{R}$*, Real Anal. Exchange 38:2 (2013), 499–510.

5. O. Karlova, *On Baire classification of strongly separately continuous functions*, Real Analysis Exchange (прийнято до друку).

6. O. Karlova, V. Mykhaylyuk, *On strongly separately continuous mappings on products*, Math. Slovaca (прийнято до друку).

7. О. Карлова, *Сильно нарізно неперервні функції і одна характеризація відкритих множин в ящиковому добутку*, Мат.Студії (прийнято до друку).