УДК 517.51

©2014 р. В.М. Косован

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ПОЛІНОМІАЛЬНІСТЬ НАРІЗНО ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ВІД БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Доведені теореми про сукупну поліноміальність нарізно поліноміальних функцій від багатьох змінних, зокрема, знайдений загальний вигляд нарізно поліноміальних відображень $f: X_1 \times ... \times X_n \to K$, де X_k– підмножини довільного поля K і f є поліномом фіксованого степеня m_k відносно кожної змінної x_k, за умови, що $|X_k| > m_k$ для всіх k, крім, можливо, одного.

We prove theorems on the joint polynomiality of separately polynomial functions of several variables. In particular, we obtain a general representation of separately polynomial mappings $f: X_1 \times \cdots \times X_n \to K$ for the case where every X_k is a subset of a field K, f is polynom of a fixed power m_k with respect to each variable x_k and $|X_k| > m_k$ for all k except for at most one.

1. Вступ. Нехай K – довільне поле і Z – векторний простір над полем K. *Поліномом* від n змінних на полі K з коефіцієнтами з простору Z називається відображення $f: K^n \to Z$, яке має вигляд

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{k_1,...,k_n=0}^{N} a_{k_1,...,k_n} x_1^{k_1} ... x_n^{k_n},$$

де $a_{k_1,...,k_n}$– довільні вектори з простору Z. Символом $\mathbb{K}$ позначимо поле $\mathbb{R}$ дійсних чисел або поле $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Якщо $E \subseteq K^n$, то функцію $f: E \to Z$ називають *поліноміальною*, якщо існує такий поліном $g: K^n \to Z$, що $g|_E = f$. При $n > 1$ поліноміальну функцію $f: E \to Z$ називають *сукупно поліноміальною* або *поліноміальною за сукупністю змінних.*

Для точки $a = (a_1, ..., a_n)$ з K^n і номера $k = 1, ..., n$ покладемо $\widehat{a_k} = (a_1, ...a_{k-1}, a_{k+1}, ..., a_n)$. Зрозуміло, що $\widehat{a_k} \in K^{n-1}$. Покладаючи

$$q_{\widehat{a_k}}(x_k) = (a_1, ..., a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, ..., a_n)$$

для довільного $k = 1, ..., n, a \in K^n$ і $x_k \in K$, ми одержимо відображення $q_{\widehat{a_k}}: K \to K^n$. Для множини $E \subseteq K^n$, і точки $a = (a_1, ..., a_n) \in E$ і номера $k = 1, ..., n$ введемо множини $E_{\widehat{a_k}} = q_{\widehat{a_k}}^{-1}(E)$. Відображення $f: E \to Z$ називається *нарізно поліноміальним,* якщо для кожної точки $a \in E$ і довільного $k = 1, ..., n$ відображення $f_{\widehat{a_k}} = f \circ q_{\widehat{a_k}}: E_{\widehat{a_k}} \to Z$ буде поліоміальним.

Нехай $\overrightarrow{m} = (m_1, ..., m_n)$– набір з n невід'ємних цілих чисел і $E \subseteq K^n$. Нарізно поліноміальне відображення $f: E \to Z$ називаться $\overrightarrow{m}$*-поліноміальним*, якщо для кожної точки $a \in K^n$ і довільного номера $k = 1, ..., n$ поліноміальне відображення $f_{\widehat{a_k}}: E_k \to Z$ є звуженням полінома $g: K \to Z$, степінь якого не перевищує m_k. Символ $|M|$ означає потужність множини M.

У випадку $E = X_1 \times ... \times X_n$, де $X_k \subseteq K$ при $k = 1, ..., n$, у праці [1] було дано необхідні і достатні умови для того, щоб кожна нарізно поліноміальна фунція $f: X_1 \times ... \times X_n \to K$ була поліноміальною за сукупністю змінних. Для довільної множини E питання про сукупну поліноміальність нарізно поліноміальних функцій $f: E \to K$ ще не дуже добре вивчене, хоча часткові відповіді на нього були отримані в [2].

У цій статті ми продовжуємо дослідження зв'язків між нарізною і сукупною поліноміальністю функцій багатьох змінних. Спочатку ми переносимо на випадок довільного n доведену в [3] при $n = 2$ теорему про загальний вигляд $\overrightarrow{m}$-поліноміальних відображень для $E = X_1 \times ... \times X_n$.

Далі ми розглядаємо питання про сукупну поліноміальність нарізно поліноміальних відображень $f: X_1 \times ... \times X_n \to Z$, де $X_1, ..., X_n$ і $Z-$ векторні простори. Модифікуючи конструкцію С.Мазура і В.Орлича [4], ми будуємо явний приклад нарізно поліноміальної функції $f : \mathbb{K}^\infty \times \mathbb{K}^\infty \to \mathbb{K}$, де $\mathbb{K}^\infty-$ простір фінітних послідовностей скалярів, яке не є сукупно поліноміальною. Нарешті, ми доводимо, що для комплекних банахових просторів $X_1, ...X_n$ кожна нарізно неперервна і нарізно поліноміальна функція $f : X_1 \times ... \times X_n \to \mathbb{C}$ буде поліноміальною за сукупністю змінних (цей результат був анонсований в [5]).

2. Загальний вигляд $\overrightarrow{m}$-поліноміальних відображень.

Теорема 2. Нехай $\overrightarrow{m} = (m_1, ..., m_n)-$ довільний набір з n невід'ємних цілих чисел, $E = X_1 \times ... \times X_n-$ добуток довільних підмножин поля K, таких, що $|X_k| > m_k$ для всіх $k = 1, ..., n$, крім, можливо, одного, і $f : E \to K-$ $\overrightarrow{m}$-поліноміальне відображення. Тоді існують такі елементи $a_{k_1,...,k_n}$ з поля K, що

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{k_1=0}^{m_1} ... \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1,...,k_n} x_1^{k_1} ... x_n^{k_n}.$$

Доведення. При $n = 1$ доводити нічого, при $n = 2$ відповідне твердження було доведено в [3].

Нехай $n > 2$ і відповідне твердження справджується, коли кількість змінних дорівнює $n-1$. Доведемо, що тоді воно справджується і для n змінних, як у формулюванні теореми.

Нехай $\overrightarrow{m}, E$ і $f-$ такі, як у формулюванні теореми. Будемо вважати для певності, що $|X_n| > m_n$. Покладемо $X = X_1 \times ... \times X_{n-1}$ і $Y = X_n$. Тоді $E = X_1 \times ... \times X_{n-1} \times X_n = X \times Y$. За умовою, для кожного $x = (x_1, ..., x_{n-1})$ функція $f_x(y) = f(x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$, де $y = x_n \in Y$, є m_n-поліноміальною, тобто існує такий поліном $p_x(y) = \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_n}(x) y^{k_n}$, що $f_x(y) = p_x(y)$ для кожного $y \in Y$. Оскільки $|Y| = |X_n| > m_n$, то в множині Y ми можемо знайти $m_n + 1$ різних точок $y_0, ..., y_{m_n}$. Підставляючи їх замість y у рівність

$$f(x, y) = \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_n}(x) y^{k_n},$$

отримаємо при $j = 0, 1, ..., m_n$ рівності

$$\sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_n}(x) y_j^{k_n} = f(x, y_j) = f_{y_j}(x).$$

Оскільки $f-$ це $\overrightarrow{m}$-поліноміальна функція, то для кожного $j = 0, ..., m_n$ функція $f_{y_j} : X \to K$ буде $\overrightarrow{l}$-поліноміальною, де $\overrightarrow{l} = (m_1, ..., m_{n-1})$. За індуктивним припущенням для кожного $j = 0, ..., m_n$ існують такі елементи $a^j_{k_1,...,k_{n-1}} \in K$, що

$$f_{y_j}(x) = \sum_{k_1=0}^{m_1} ... \sum_{k_{n-1}=0}^{m_{n-1}} a^j_{k_1,...,k_{n-1}} x_1^{k_1} ... x_{n-1}^{k_{n-1}}.$$

Розглянемо визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & y_0 & \dots & y_0^{m_n} \\ 1 & y_1 & \dots & y_1^{m_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_n & \dots & y_n^{m_n} \end{vmatrix}$$

і $\Delta_{k_n}(x)$, який отримується з визначника Δ шляхом заміни елементів $y_0^{k_n}, y_1^{k_n}, ..., y_n^{k_n}$ його k_n-го стовпчика, де $k_n = 0, 1, ..., m_n$ на елементи $f_{y_0}(x), f_{y_1}(x), ...f_{y_{m_n}}(x)$ відповідно.

Визначник Δ − це визначник Вандермонда [6], для якого

$$\Delta = \prod_{0 \le i < j \le m_n} (y_j - y_i),$$

зокрема, $\Delta \neq 0$. Тому за формулами Крамера

$$a_{k_n}(x) = \frac{\Delta_{k_n}(x)}{\Delta}$$

для кожного $k_n = 0, 1, ..., m_n$. Розкладаючи визначник $\Delta_{k_n}(x)$ по елементах k_n-го стовпчика, отримаємо, що

$$\Delta_{k_n}(x) = \sum_{j=0}^{m_n} a_{k_n,j} f_{y_j}(x),$$

де $a_{k_n,j}$ − алгебраїчне доповнення до елемента $f_j(x)$ у визначнику $\Delta_{k_n}(x)$, яке не залежить від x, а тільки від вибраних елементів $y_0, ..., y_{m_n}$. Тоді, поклавши $\widetilde{a}_{k_n,j} = \frac{a_{k_n,j}}{\Delta}$, і використавши формули для Δ_{k_n} і $f_{y_j}(x)$ отримаємо:

$$f(x_1, ..., x_n) = f(x, y) = \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_n}(x) y^{k_n} =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{m_1} \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1,...,k_n} x_1^{k_1} ... x_n^{k_n}$$

де $a_{k_1,...,k_n} = \sum_{j=0}^{m_n} a_{k_n,j} a^j_{k_1,...,k_{n-1}}$. Таким чином, теорема доведена.

3. Приклад нарізно поліноміального і не поліноміального відображення.

С. Банах запропонував загальне означення полінома $f : X \to Y$, де $X, Y-$ довільні векторні простори над одним і тим самим полем $\mathbb{K}$. Такі поліноми вперше почали досліджувати С. Мазур і В. Орлич у [4]. Нагадаємо, що відображення $f : X \to Y$ називається *n-однорідним поліномом*, якщо існує таке n-лінійне відображення $g : X^n \to Y$, що $g(x, ..., x) = f(x)$ на X, і просто *поліномом* степеня $\leq m$, якщо існують такі k-однорідні поліноми $f_k : X_k \to Y$ при $k = 0, 1, ..., m$, що $f = \sum_{k=0}^{m} f_k$. Аналогічно до попереднього можна ввести поняття нарізно і сукупно поліноміальних відображень чи $\overrightarrow{m}$-поліноміальних $f : X_1 \times ... \times X_n \to Y$, заданих на добутках векторних просторів, чи навіть їх підмножинах.

Довільні нарізно поліноміальні відображення $f : X_1 \times ... \times X_n \to Y$ вже можуть не бути поліноміальними за сукупністю змінних. Так, в [4] для довільних нескінченновимірних просторів $X_1, ..., X_n$ і ненульового векторного простору Y, було доведено існування нарізно поліноміальних відображень $f : X_1 \times ... \times X_n \to Y$, які не є поліноміальними. Використовуючи ідею Мазура-Орлича, ми можемо навести приклад нарізно поліноміального і не поліноміального відображення.

Теорема 2. Формулою $f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k \eta_k)^k$, де $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ і $y = (\eta_k)_{k=1}^{\infty}-$ довільні елементи з $\mathbb{K}^\infty$, визначається нарізно поліноміальна функція $f : \mathbb{K}^\infty \times \mathbb{K}^\infty \to \mathbb{K}$, яка не є поліномом.

Доведення. Доведемо, що $f-$ нарізно поліноміальна функція. Зафіксуємо довільний елемент $y = (\eta_1, ..., \eta_m, ..., 0, 0, ...)$ з простору $\mathbb{K}^\infty$. Тоді для $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^\infty$

$$f_y(x) = f(x, y) = \sum_{k=1}^{m} (\xi_k \eta_k)^k = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \xi_k^k,$$

де $\alpha_k = \eta_k^k \in \mathbb{K}$ при $k = 1, ..., m$. Кожна функція $g_k(x) = \alpha_k \xi_k^k-$ це k-однорідний поліном на просторі $\mathbb{K}^\infty$. Справді, функція $h_k(x_1, ..., x_k) = \alpha_k \xi_{1,k} ... \xi_{k,k}$, де $x_j = (\xi_{j,s})_{s=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^\infty$, є n-лінійною на $\mathbb{K}^n$ і

$$h_k(x, ..., x) = \alpha_k \xi_k ... \xi_k = \alpha_k \xi_k^k$$

для довільного $x = (\xi_s)_{s=1}^{\infty}$. Отже, функція $f_y(x) = \sum_{k=1}^{m} g_k(x)$. $-$ це поліном, степеня $\leq m$. Так само і всі функції $f^x(y) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \eta_k^k$, де $x = (\xi_1, ..., \xi_n, 0, ...) \in \mathbb{K}$ і $\beta_k = \xi_k^k$ $-$ це поліноми на $\mathbb{K}^\infty$.

Доведемо, що f не є поліноміальною функцією на $\mathbb{K}^\infty \times \mathbb{K}^\infty$. Нехай це не так. Тоді існують такі k-одорідні поліноми f_k, що $f = \sum_{k=0}^{N} f_k$. Для кожного $p \in (\mathbb{K}^\infty)^2$ і довільного $\lambda \in \mathbb{K}$ будемо мати

$$f(\lambda p) = \sum_{k=0}^{N} f_k(\lambda p) = \sum_{k=0}^{N} \lambda^k f_k(p) = \sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k,$$

де $a_k = f_k(p)$. Отже, функція $g(\lambda) = f(\lambda p)$ $-$ це поліном степеня $\leq N$.

Розглянемо орти $e_j = (\delta_{j,k})_{k=1}^{\infty}$, де $\delta_{j,k} = \begin{cases} 1, j = k \\ 0, j \neq k \end{cases}$ $-$ символ Кронекера, і точку $p_0 = (e_{N+1}, e_{N+1})$.

Для неї $\lambda p_0 = (\lambda e_{N+1}, \lambda e_{N+1})$, причому $\lambda e_{N+1} = (\underbrace{0, ..., 0,}_{N \text{ раз}} \underbrace{\lambda}_{N+1}, 0, 0, ...)$. Тому

$$f(\lambda p_0) = (\lambda \lambda)^{N+1} = \lambda^{2N+2}.$$

Ясно, що $f(\lambda p_0)$ $-$ це многочлен степеня $2N + 2$, який більший від N, що приводить до суперечності.

4. Поліноміальність нарізно поліноміальних комплекснозначних функціоналів від багатьох змінних.

Теорема 3. Нехай $X_1, ..., X_n-$ комплексні банахові простори і $f : X_1 \times ... \times X_n \to \mathbb{C}-$ нарізно неперервна і нарізно поліноміальна функція. Тоді $f-$ неперервний поліном на добутку $X = X_1 \times ... \times X_n$.

Доведення. Застосуємо індукцію відносно n. При $n = 1$ наше твердження тріальне. Припустимо, що $n > 1$ і наше твердження справедливе, коли кількість співмножників дорівнює $n - 1$. Доведемо, що тоді воно буде справедливим і коли кількість співмножників дорівнює n як у формулюванні теореми. Як і в деведенні теореми 1 покладемо $X = X_1 \times ... \times X_{n-1}, Y = X_n$ і $f(x, y) = f(x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$, де $x = (x_1, ..., x_{n-1}) \in X$ і $y = x_n \in Y$.

Зрозуміло, що для кожного $y \in Y$ функція $f_y : X \to \mathbb{C}$, де $f_y(x) = f(x, y)$ є нарізно поліноміальною і нарізно неперервною. Тоді за індуктивним припущенням f_y- це неперервний поліном на X. Функція $f^x : Y \to \mathbb{C}, f^x(y) = f(x, y)$ теж буде неперервним поліномом, бо $f-$ неперервна і поліноміальна відносно останньої змінної. Таким чином $f : X \times Y \to \mathbb{C}-$ це нарізно неперервна і нарізно поліноміальна функція. Оскільки добуток $X = X_1 \times ... \times X_n$ є банаховим простором, то за наслідком 2 з [5] f буде неперервним поліномом на добутку $X \times Y = X_1 \times ... \times X_n$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Косован В.М., Маслюченко В.К.* Нарізно поліноміальні функції // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. В.**374**. Математика. – 2008.– С. 66-74.

2. *Косован В.М., Маслюченко В.К.* Нарізно і сукупно поліноміальні функції на довільних підмножинах $\mathbb{R}^n$ // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. В.**454**. Математика.– 2009. – С. 50-53.

3. *Косован В.М., Маслюченко В.К.* Про (m,n)-поліноміальні функції на добутках та нарізно поліноміальні функції на хрестах // Наук. Вісн. Чернів. ун-ту. Серія: Мат. **2-3(3)**,– 2012. – С.108-113

4. *Mazur S., Orlich W.* Grundlegende Eigenshaften der polynomischen Operationen // Studia Math. – 1935. – **5** – S.50-68.

5. *Косован В.М., Маслюченко В.К.* Про поліноміальність нарізно поліноміальних функцій // Мат. вісн. НТШ – 2008. – **5** – С.89-96.

6. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.