УДК 517.983

©2014 р. С.С. Лінчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ЗОБРАЖЕННЯ ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ОПЕРАТОРІВ У ВИГЛЯДІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ ВІДНОСНО Q-ПОХІДНОЇ

Вивчається зображення лінійних неперервних операторів у просторах аналітичних функцій у вигляді диференціальних операторів нескінченного порядку відносно q-похідної.

The image of linear continuous operators in spaces of analytic functions in the form of differential operators of infinite order with respect to q-derivative is studied.

Через A_R, $0 < R \leq \infty$, позначимо простір усіх аналітичних в крузі $|z| < R$ функцій, що наділений топологією компактної збіжності. В теорії лінійних неперервних операторів, що діють у просторах аналітичних функцій, важливою є задача про загальний вигляд таких операторів. В цій статті вивчається можливість зображення довільного лінійного неперервного оператора $T : A_{R_1} \longrightarrow A_{R_2}$ у вигляді диференціального оператора нескінченного порядку відносно q-похідної.

Нехай q – довільне фіксоване комплексне число, яке відмінне від 1. q-похідною функції f називається функція $(D_q f)(z) = \frac{f(qz)-f(z)}{qz-z}$. В [1] коротко викладено історичні та бібліографічні відомості стосовно q-похідної, а також досліджені умови застосовності диференціальних операторів нескінченного порядку відносно q-похідної. Для подальшого нам будуть потрібними деякі допоміжні твердження, які мають також і самостійний інтерес.

1. Вивчимо спочатку взаємозв'язок між лінійними неперервними операторами $T \in \mathcal{L}(A_{R_1}, A_{R_2})$ і одним класом характеристичних функцій цих операторів. Нехай $\alpha(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ – деяка фіксована функція, для якої $\alpha_n \neq 0, n = 0, 1, \dots$ і

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} = a,\ 0 < a < \infty. \qquad (1)$$

Нехай $T \in \mathcal{L}(A_{R_1}, A_{R_2})$, а $\varphi_n(z) = Tz^n$, $n = 0, 1, \dots$. Функцію двох змінних

$$t(\lambda, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n \varphi_n(z) \qquad (2)$$

назвемо характеристичною функцією оператора T. Для функції $f \in A_R$ та $0 < r < R$ покладемо $||f||_r = \max\limits_{|z|\leq r} |f(z)|$. Оскільки $T \in \mathcal{L}(A_{R_1}, A_{R_2})$, то для послідовності функцій $(\varphi_n(z))_{n=0}^{\infty}$ виконується умова неперервності [3]:

$$\forall r_2 < R_2\ \exists r_1 < R_1\ \exists C > 0\ \forall n = 0, 1, \dots :$$

$$||\varphi_n||_{r_2} \leq C r_1^n. \qquad (3)$$

Через K_r (відповідно $\overline{K_r}$) позначатимемо круг виду $K_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, $0 < r \leq \infty$ (відповідно $\overline{K_r} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$, $0 \leq r < \infty$).

З умови неперервності оператора T випливає, що функція $t(\lambda, z)$ є локально-аналітичною на множині $\overline{K_{\frac{1}{aR_1}}} \times K_{R_2}$ [2]. Це означає, що для довільного r_2, $0 < r_2 < R_2$, існує r_1, $0 < r_1 < R_1$, таке, що функція $t(\lambda, z)$ є аналітичною на множині $K_{\frac{1}{ar_1}} \times K_{r_2}$. При цьому виконується умова узгодженості: якщо $r_1' < R_1$ вибране для $r_2' < R_2$ таким, що функція $t(\lambda, z)$ є аналітичною на множині $K_{\frac{1}{ar_1'}} \times K_{r_2'}$, то визначена на множинах $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \frac{1}{ar_1}\} \times \{z \in \mathbb{C} : |z| < r_2\}$ та $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \frac{1}{ar_1'}\} \times \{z \in \mathbb{C} : |z| < r_2'\}$ функція $t(\lambda, z)$ збігається на перетині цих множин.

Навпаки, нехай функція $t(\lambda, z)$ є локально-аналітичною на множині $\overline{K_{\frac{1}{aR_1}}} \times K_{R_2}$. Покажемо, що існує оператор $T \in \mathcal{L}(A_{R_1}, A_{R_2})$, для якого функція $t(\lambda, z)$ є характеристичною. З цією метою розкладемо функцію $t(\lambda, z)$ в ряд виду (2). Тоді $\varphi_n \in A_{R_2}$, $n = 0, 1, \ldots$. Покажемо, що для послідовності функцій $(\varphi_n(z))_{n=0}^{\infty}$ виконується умова (3). Зафіксуємо довільне $r_2 < R_2$ і виберемо r_2' таким, щоб $r_2 < r_2' < R_2$. Нехай функція $t(\lambda, z)$ є аналітичною на множині $K_{\frac{1}{ar_1'}} \times K_{r_2'}$, де $r_1' < R_1$. Виберемо ще число ρ таким, щоб $\frac{1}{aR_1} < \rho < \frac{1}{ar_1'}$. Тоді за нерівностями Коші для коефіцієнтів розкладу аналітичної функції у степеневий ряд з рівності (2) одержимо, що

$$||\varphi_n||_{r_2} \leq C|\alpha_n|^{-1}\rho^{-n},\ n = 0, 1, \ldots,$$

де $C = \max\{|t(\lambda, z)| : |\lambda| \leq \rho, |z| \leq r_2\}$. Таким чином, для послідовності функцій $(\varphi_n(z))_{n=0}^{\infty}$ виконується умова (3). Тому формулою $(Tf)(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\varphi_n(z)$ визначається оператор T з класу $\mathcal{L}(A_{R_1}, A_{R_2})$. При цьому функція $t(\lambda, z)$ є характеристичною для оператора T. Таким чином, є правильним наступне твердження.

Теорема 1. *Формулою* (2) *встановлюється взаємно-однозначна відповідність між операторами $T \in \mathcal{L}(A_{R_1}, A_{R_2})$ і локально-аналітичними на множині $\overline{K_{\frac{1}{aR_1}}} \times K_{R_2}$ функціями $t(\lambda, z)$.*

Зауваження. *У випадку $\alpha(z) = \frac{1}{1-z}$ твердження теореми 1 можна одержати з результатів роботи* [2].

Якщо $R_1 < \infty$, то при $|\lambda| < \frac{1}{aR_1}$ відповідна функція $f_\lambda(z) = \alpha(\lambda z)$ належить до простору A_{R_1}. Тому характеристичну функцію $t(\lambda, z)$ лінійного неперервного оператора $T : A_{R_1} \longrightarrow A_{R_2}$ при $|\lambda| < \frac{1}{aR_1}$ та $|z| < R_2$ можна визначити також формулою $t(\lambda, z) = (Tf_\lambda)(z)$.

2. При $|q| < 1$ q-похідна D_q є частинним випадком оператора узагальненого диференціювання, оскільки $D_q z^n = \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} z^{n-1}$ при $n \geq 1$ та $D_q 1 = 0$, де $\alpha_n = \frac{1}{[n]_q!}$, а $[n]_q! = [1]_q[2]_q \ldots [n]_q$, $[n]_q = \frac{q^n-1}{q-1}$. Надалі вважатимемо, що $[0]_q! = 1$.

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|[n]_q!|} = \frac{1}{|1-q|}$, то оператор D_q лінійно та неперервно діє в кожному з просторів A_R, $0 < R \leq \infty$. В [1] вивчалися умови застосовності операторів нескінченного порядку відносно q-похідної виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(z)\left(D_q^n f\right)(z) \qquad (4)$$

до простору A_R. Нехай $(\psi_n(z))_{n=0}^{\infty}$ – послідовність з простору A_{R_2} і $R_2 \leq R_1$. Диференціальний оператор нескінченного порядку (4) відносно q-похідної називається застосовним до простору A_{R_1} у простір A_{R_2}, якщо для довільної функції $f \in A_{R_1}$ ряд (4) збігається за топологією простору A_{R_2}. Аналогічно як і теорема 2 з [1] доводиться наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай $|q| < 1$, $0 < R_2 \leq R_1 \leq \infty$, а $(\psi_n(z))_{n=0}^{\infty}$ – послідовність функцій з простору A_{R_2}. Для того, щоб диференціальний оператор нескінченного порядку* (4) *був застосовним до простору A_{R_1} у простір A_{R_2} необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова*

$$\forall r_2 < R_2 \ \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{||\psi_n||_{r_2}} < |q-1|R_1. \qquad (5)$$

3. Дослідимо можливість зображення довільного лінійного неперервного оператора $T : A_{R_1} \longrightarrow A_{R_2}$ у вигляді диференціального оператора нескінченного порядку відносно q-похідної. Для $|q| < 1$ формулою $e_q(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{[n]_q!}$ визначається q-експонента. З рівності $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|[n]_q!|} = \frac{1}{|1-q|}$ випливає, що q-експонента є аналітичною функцією в крузі $|z| < \frac{1}{|1-q|}$. При цьому $e_q(z) \neq 0$ при $|z| < \frac{1}{|1-q|}$ [4]. q-експонента є власною функцією для оператора D_q. Сформулюємо і доведемо тепер основний результат даної роботи.

Теорема 3. *Нехай $|q| < 1$, $0 < R_2 \leq R_1 \leq \infty$. Тоді довільний лінійний неперервний оператор $T : A_{R_1} \longrightarrow A_{R_2}$ зображає-*

ться у вигляді оператора нескінченного порядку відносно D_q-похідної виду

$$(Tf)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(z)\left(D_q^n f\right)(z), \qquad (6)$$

де $(\psi_n(z))_{n=0}^{\infty}$ *– деяка послідовність функцій з простору* A_{R_2} *і ряд в правій частині* (6) *збігається для довільної функції* $f\in A_{R_1}$ *до* $(Tf)(z)$ *за топологією простору* A_{R_2}.

Доведення. Нехай T – довільний лінійний неперервний оператор, $T: A_{R_1}\longrightarrow A_{R_2}$. Через $t(\lambda,z)$ позначимо характеристичну функцію оператора T виду $t(\lambda,z)=T\left[e_q(\lambda z)\right]$. За теоремою 1 функція $t(\lambda,z)$ є локально аналітичною на множині $\overline{K_{\frac{1}{|1-q|R_1}}\times K_{R_2}}$. Функція $e_q(\lambda z)$ також локально аналітична на множині $\overline{K_{\frac{1}{|1-q|R_1}}}\times K_{R_2}$ і не перетворюється в нуль при $|z|<R_2$ та $|\lambda|<\frac{1}{|1-q|R_1}$. Тому функція $t_1(\lambda,z)=t(\lambda,z)e_q^{-1}(\lambda z)$ є локально аналітичною на множині $\overline{K_{\frac{1}{|1-q|R_1}}}\times K_{R_2}$ функцією, як частка двох таких функцій при відмінному від нуля знаменнику. Розкладемо функцію $t_1(\lambda,z)$ в ряд за степенями λ: $t_1(\lambda,z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\psi_n(z)\lambda^n$, де $\psi_n\in A_{R_2}$, $n=0,1,\ldots$. Оскільки функція $t_1(\lambda,z)$ є локально аналітичною на множині $\overline{K_{\frac{1}{|1-q|R_1}}}\times K_{R_2}$, то для послідовності функцій $(\psi_n(z))_{n=0}^{\infty}$ виконується умова (5). Тому за теоремою 2 диференціальний оператор нескінченного порядку (4) є застосовним до простору A_{R_1} у простір A_{R_2}. За принципом рівномірної обмеженості формулою

$$(T_1 f)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(z)\left(D_q^n f\right)(z)$$

визначається лінійний неперервний оператор $T_1: A_{R_1}\longrightarrow A_{R_2}$. Оскільки характеристична функція оператора T_1 збігається з характеристичною функцією оператора T, то $T=T_1$. Отже, оператор T зображається у вигляді диференціального оператора нескінченного порядку (6). Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Лінчук С.С.* Про застосовність диференціальних операторів нескінченного порядку відносно q-похідної // Бук. мат. журн. – 2014. – **1** , № 3-4. – С. 81-83.

2. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie // J. reine und angew. Math.– 1953.– **191**.– P.30-49.

3. *С.С. Лінчук, Ю.С. Лінчук.* Оператори у просторах аналітичних функцій. – Чернівці: Рута, 2011. – 147 с.

4. *H. Exton.* q-Hypergeometric Functions and Applications. – New York: Halstead Press, Chichester: Ellis Horwood, 1983. – 347 p.