УДК 517.983

©2014 р. Ю.С. Лінчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ДЕРИВАЦІЙНІ ПАРИ ОПЕРАТОРІВ З $\mathcal{H}(G_1)$ В $\mathcal{H}(G_2)$

Описано всі пари лінійних операторів, які діють з простору $\mathcal{H}(G_1)$ у простір $\mathcal{H}(G_2)$ і задовольняють операторне рівняння Рубела.

We describe all pairs of linear operators that act from $\mathcal{H}(G_1)$ to $\mathcal{H}(G_2)$ and satisfy Rubel's operator equation.

Нехай G – довільна область комплексної площини і $\mathcal{H}(G)$ – простір усіх аналітичних в G функцій, що наділений топологією компактної збіжності [1]. В [2] Л.А. Рубел поставив і розв'язав задачу, про знаходження всіх пар лінійних неперервних функціоналів L та M на просторі $\mathcal{H}(G)$, які задовольняють співвідношення

$$L(fg) = L(f)M(g) + L(g)M(f) \qquad (1)$$

для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G)$. Пізніше Н.Р. Нандакумар в [3] та Л. Зальцман в [4] різними способами розв'язали задачу Рубела в класі лінійних функціоналів. В [5] досліджені розв'язки узагальненого рівняння Рубела на просторі $\mathcal{H}(G)$.

Наступні дослідження стосовно опису пар лінійних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$, пов'язані з співвідношеннями, які подібні до рівняння Рубела (1). В [6] Н.Р. Нандакумар поставив задачу про знаходження всіх пар лінійних функціоналів L та M на просторі $\mathcal{H}(G)$, які задовольняють співвідношення, яке є функціональним аналогом теореми додавання для косинуса:

$$L(fg) = L(f)L(g) + M(g)M(f)$$

для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G)$. Пізніше в [7] Н.Р. Нандакумар та П. Каннаппан повністю розв'язали задачу, про опис в класі лінійних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$ розв'язків рівняння

$$L(fg) = L(f)L(g) - M(f)M(g).$$

Подальші дослідження стосовно опису пар лінійних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$, які задовольняють подібні співвідношення, розглянуті у монографії П. Каннаппана [8].

Надалі в різних роботах розглядалися операторні модифікації співвідношення (1) в певних класах операторів, що діють у просторі $\mathcal{H}(G)$. В працях [9]-[10] доведено, що кожна деривація $D : \mathcal{H}(G) \to \mathcal{H}(G)$, тобто адитивний на $\mathcal{H}(G)$ оператор, який задовольняє співвідношення

$$D(fg) = fD(g) + gD(f)$$

для довільних двох функцій $f, g \in \mathcal{H}(G)$, має вигляд: $(Df)(z) = \varphi(z)f'(z)$, де φ – довільна функція з простору $\mathcal{H}(G)$. Зазначимо, що лінійним деріваціям на просторі неперервних функцій $C[0,1]$ присвячена робота [11].

Наступним етапом досліджень став розгляд певних мультиплікативних співвідношень для різних класів операторів, що діють у просторі $\mathcal{H}(G)$. В [12] Р. Баркел та С. Саекі описали всі адитивні оператори $T : \mathcal{H}(G_1) \to \mathcal{H}(G_2)$, які для деякої відмінної від сталої функції $\varphi \in \mathcal{H}(G_2)$ задовольняють співвідношення

$$T(zf) = \varphi T(f)$$

для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G_1)$.

В роботі [13] Н.Р. Нандакумар описав всі адитивні оператори $M : \mathcal{H}(G) \to \mathcal{H}(G)$, які задовольнять співвідношення

$$M(fg) = M(f)M(g),$$

при цьому довівши, що кожен з таких операторів необхідно є лінійним і неперервним.

В [14] він продовжив дослідження мультиплікативних співвідношень у випадку, коли $M:\mathcal{H}(G_1)\to\mathcal{H}(G_2)$.

У зв'язку з цими задачами природним чином виникає питання про знаходження всіх пар лінійних операторів A та B, які діють у просторі $\mathcal{H}(G)$ і задовольняють операторне рівняння Рубела

$$(A(fg))(z) = \\ = (Af)(z)(Bg)(z) + (Ag)(z)(Bf)(z) \qquad (2)$$

для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G)$ при $z\in G$. Зазначимо, що в роботі [15] одержано розв'язання цієї задачі в деяких спеціальних класах лінійних операторів на $\mathcal{H}(G)$. Як відзначають автори в [15], в загальному випадку задача про опис всіх пар лінійних операторів, які на $\mathcal{H}(G)$ задовольняють (2), ними не розв'язана. Повністю ця задача розв'язана в [16] для випадку простору цілих функцій $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ і в [17] для довільного простору аналітичних функцій $\mathcal{H}(G)$. Відмитимо також, що всі розв'язки рівняння (2) в класі лінійних неперервних операторів на просторах функцій, аналітичних в довільних однозв'язних областях були описані у [18].

Зазначимо, що для випадку довільної однозв'язної області G в [19] описано всі пари лінійних на просторі $\mathcal{H}(G)$ операторів A та B, які задовольняють операторне рівняння Нандакумара

$$(A(fg))(z) = (Af)(z)(Ag)(z) - (Bg)(z)(Bf)(z)$$

для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G)$ при $z\in G$.

Метою даної статі є опис всіх пар лінійних операторів A та B, що діють з простору $\mathcal{H}(G_1)$ у простір $\mathcal{H}(G_2)$ і задовольняють операторне рівняння Рубела (2).

Наведемо спочатку одне допоміжне твердження про опис мультиплікативних операторів $A:\mathcal{H}(G_1)\longrightarrow\mathcal{H}(G_2)$.

Лема 1. *Нехай G_1, G_2 – довільні області комплексної площини. Для того, щоб лінійний оператор $A:\mathcal{H}(G_1)\longrightarrow\mathcal{H}(G_2)$ задовольняв співвідношення*

$$(A(fg))(z) = (Af)(z)(Ag)(z) \qquad (3)$$

для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G_1)$ при $z\in G_2$, необхідно і достатньо, щоб $A=0$, або $Af=f\circ\psi$ для $f\in\mathcal{H}(G_1)$, де ψ – деяка функція з простору $\mathcal{H}(G_2)$ для якої $\psi(G_2)\subseteq G_1$.

Доведення. Нехай лінійний оператор A: $\mathcal{H}(G_1)\longrightarrow\mathcal{H}(G_2)$ задовольняє співвідношення (3). Надалі через $e(z)$ позначатимемо функцію $e(z)=z$. Для довільної точки $z\in G_2$ формулою $L_z(f)=(Af)(z)$ визначається лінійний мультиплікативний функціонал L_z на $\mathcal{H}(G_1)$. Використовуючи опис лінійних мультиплікативних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G_1)$, (див., наприклад, [20]) одержуємо, що $L_z=0$, або $L_z(f)=f(z_0)$, де $z_0=L_z(e)$, причому $z_0\in G_1$. Нехай $L_z\neq 0$ і $A(e)=\psi$, $\psi\in\mathcal{H}(G_2)$. Тоді $z_0=\psi(z)$, причому $\psi(z)\in G_1$, і тому $L_z(f)=f(\psi(z))$, тобто $(Af)(z)=f(\psi(z))$ для довільної функції $f\in\mathcal{H}(G_1)$.

Нехай $U=\{z\in G_2 : L_z=0\}$. Якщо $U=G_2$, то $A=0$. У випадку $U=\varnothing$ маємо, що $(Af)(z)=(f\circ\psi)(z)$ при $z\in G_2$ для довільної функції $f\in\mathcal{H}(G_1)$, де ψ – деяка функція з простору $\mathcal{H}(G_2)$, причому $\psi(G_2)\subseteq G_1$. Покажемо, що множина U може набувати лише два наведені вище значення. Дійсно, якби $U\neq G_2$ і $U\neq\varnothing$, то для довільної функції $f\in\mathcal{H}(G_1)$ ми мали б, що

$$(Af)(z)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } z\in U; \\ f(\psi(z)), \text{ якщо } z\in G_2\setminus U. \end{cases}$$

Якщо позначити $h(z)=A(1)$, то ми одержуємо, що функція $h(z)$ з простору $\mathcal{H}(G_2)$ набуває лише два значення: 0 та 1, що неможливо. Необхідність умов леми доведено, а їх достатність є очевидною.

Нехай G_1 і G_2 – довільні області комплексної площини і лінійні оператори A та B, що діють з простору $\mathcal{H}(G_1)$ в $\mathcal{H}(G_2)$ задовольняють співвідношення (2). Позначимо $a(z)=A(1)$, $b(z)=B(1)$. Покладаючи в (2) $f=g=1$, одержимо, що $a(z)(1-2b(z)))=0$ при $z\in G_2$. Оскільки функції $a(z)$ та $b(z)$ є аналітичними в області G_2, то за теоремою єдиності звідси випливає, що $b(z)\equiv\frac{1}{2}$ або $a(z)\equiv 0$ в G_2.

Розглянемо спочатку випадок, коли $a(z)\not\equiv 0$ в G_2. Тоді $b(z)\equiv\frac{1}{2}$ при $z\in G_2$.

Покладаючи в (2) $g(z)=1$, одержимо, що для довільної функції $f\in\mathcal{H}(G_1)$ виконується рівність $(Af)(z)=2a(z)(Bf)(z)$ при $z\in G_2$. Тоді з (2) отримуємо, що $a(z)(2(B(fg)(z)-4(Bf)(z)(Bg)(z))=0$ для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G_1)$ при $z\in G_2$. Оскільки $a(z)\not\equiv 0$ в G_2, то звідси випливає, що $2(B(fg))(z)=2(Bf)(z)2(Bg)(z)$, $f,g\in\mathcal{H}(G_1)$, $z\in G_2$.

Оскільки $b(z)\equiv\frac{1}{2}$, то $2B$ – ненульовий мультиплікативний оператор, що діє з простору $\mathcal{H}(G_1)$ в $\mathcal{H}(G_2)$. Тоді за лемою 1 одержуємо, що $B(f)=\frac{1}{2}(f\circ\psi)$, де ψ – деяка функція з простору $\mathcal{H}(G_2)$, причому $\psi(G_2)\subseteq G_1$. Тому $A(f)=a\cdot(f\circ\psi)$. Таким чином, у випадку, коли $a(z)\not\equiv 0$ в G_2, пара операторів A та B визначається наступними формулами: $A(f)=a\cdot(f\circ\psi)$, $B(f)=\frac{1}{2}(f\circ\psi)$ де $a,\psi\in\mathcal{H}(G_2)$, причому $\psi(G_2)\subseteq G_1$.

Нехай тепер $a(z)\equiv 0$ в G_2. Підставляючи у (2) $g=1$, одержуємо, що $A=0$ або $b(z)\equiv 1$ в G_2. Якщо $A=0$, то для будь-якого лінійного оператора B, який діє з $\mathcal{H}(G_1)$ в $\mathcal{H}(G_2)$, пара операторів $A=0$, B задовольняє співвідношення (2). Надалі вважатимемо, що $A\neq 0$. Тоді $b(z)\equiv 1$ в G_2.

Нехай тепер $a(z)\equiv 0$ і $b(z)\equiv 1$ в G_2. Візьмемо довільне $z\in G_2$ і нехай $L_z(f)=(A(f))(z)$ і $M_z(f)=(B(f))(z)$. Тоді з (2) випливає, що пара лінійних функціоналів L_z та M_z задовольняє співвідношення виду (1). Крім того, $L_z(1)=0$ і $M_z(1)=1$. Тоді з [3] випливає, що пара функціоналів L_z та M_z визначається однією із наступних трьох умов:

1) $L_z=0$, M_z – довільний лінійний функціонал на $\mathcal{H}(G_1)$;

2) $L_z(f)=C\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}$, $M_z(f)=\frac{1}{2}(f(z_1)+f(z_2))$, де $z_1,z_2\in G_1$, $C\in\mathbb{C}$;

3) $L_z(f)=Cf'(z_1)$, $M_z(f)=f(z_1)$, де $z_1\in G_1$, $C\in\mathbb{C}$.

Через S позначимо множину тих точок $z\in G_2$, для яких пара функціоналів L_z та M_z визначаються формулами 1). Тоді $(Af)(z)=0$ для довільної функції $f\in\mathcal{H}(G_1)$ і для довільної точки $z\in S$. Через $Im(A)$ позначимо множину значень оператора A. Оскільки $A\neq 0$, то існує функція $\alpha\in Im(A)$, яка не дорівнює тотожному нулеві в G_2. Тоді множина S є підмножиною множини нулів функції $\alpha(z)$ в G_2. Тому множина S є не більш ніж зліченною і не має граничних точок в G_2. Для довільної точки z із S позначимо $m_z=\min\{m\in\mathbb{N}: g(z)=g'(z)=\ldots=g^{(m-1)}(z)=0,\forall g\in Im(A)\}$. З визначення числа m_z випливає, що для кожної точки $z\in S$ існує функція $g_z\in Im(A)$, для якої $g_z^{(m_z)}(z)\neq 0$. Нехай h – довільна аналітична в області G_2 функція, множина нулів якої в G_2 збігається з множиною S, причому кратність довільного нуля $z\in S$ функції $h(z)$ дорівнює m_z. Для довільної функції $f\in\mathcal{H}(G_1)$ функція $\frac{1}{h(z)}(Af)(z)$ є аналітичною в області G_2, оскільки за властивістю функції $h(z)$ кожна особлива точка цієї функції є усувною. Тому формулою $(A_1f)(z)=\frac{1}{h(z)}(Af)(z)$ визначається лінійний оператор A_1, який діє з простору $\mathcal{H}(G_1)$ у $\mathcal{H}(G_2)$. Рівність (2) можна записати у вигляді

$$h(z)(A_1(fg))(z)=$$
$$=h(z)(A_1f)(z)(Bg)(z)+h(z)(A_1g)(z)(Bf)(z)$$

$f,g\in\mathcal{H}(G_1)$, $z\in G_2$. При $z\in G_2\backslash S$ звідси випливає, що

$$(A_1(fg))(z)=$$
$$=(A_1f)(z)(Bg)(z)+(A_1g)(z)(Bf)(z)\quad(4)$$

для $f,g\in\mathcal{H}(G_1)$. Оскільки кожна точка з множини S є ізольованою, то з рівності (4) і аналітичності в G_2 функцій цієї рівності випливає, що співвідношення (4) є правильним для довільних функцій f та g із $\mathcal{H}(G_1)$ при $z\in G_2$. Для довільної точки $z\in G_2$ позначимо $L'_z(f)=(A_1(f))(z)$. Тоді з (4) випливає, що пара лінійних функціоналів L'_z та M_z задовольняє співвідношення виду (1). Крім того, $L'_z(1)=0$ і $M_z(1)=1$. Оскільки для довільної точки $z\in G_2$ функціонал $L'_z\neq 0$, то пара функціоналів L'_z та M_z визначаються однією з вищенаведених формул 2) або 3).

Через V позначимо множину тих точок $z\in G_2$, для кожної з яких пара функціоналів L'_z та M_z визначається формулами

2). Нехай $V \neq \varnothing$ і $z \in V$. Тоді $L'_z(f) = C\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}$, $M_z(f) = \frac{1}{2}(f(z_1)+f(z_2))$, де $z_1, z_2 \in G_1$, $C \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(G_1)$. Позначимо $A_1(e) = a_1$, $a_1 \in \mathcal{H}(G_2)$. Тоді $C = L'_z(e) = a_1(z)$. Нехай $B(e) = b$ і $B(e^2) = b_1$, $b, b_1 \in \mathcal{H}(G_2)$. Тоді $M_z(e) = b(z) = \frac{1}{2}(z_1+z_2)$ і $M_z(e^2) = b_1(z) = \frac{1}{2}(z_1^2+z_2^2)$. З цих рівностей знаходимо, що $z_1 = b(z) + \sqrt{b_1(z) - b^2(z)}$, $z_2 = b(z) - \sqrt{b_1(z)-b^2(z)}$, де розглядається одне із значень кореня $\sqrt{b_1(z)-b^2(z)}$, тобто $\sqrt{w} = \sqrt[+]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\arg w}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\arg w}{2}\right)\right)$ при $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Нехай функції u та v визначаються наступними формулами: $u(z) = b(z)$ і $v(z) = b_1(z) - b^2(z)$, $z \in G_2$. Тоді $u, v \in \mathcal{H}(G_2)$ і крім того точки $u(z) + \sqrt{v(z)}$ та $u(z) - \sqrt{v(z)}$ належать області G_1. Таким чином, одержуємо, що

$$L'_z(f) = a_1(z)\cdot$$

$$\cdot\frac{f\left(u(z)+\sqrt{v(z)}\right) - f\left(u(z)-\sqrt{v(z)}\right)}{2\sqrt{v(z)}},$$

$$M_z(f) =$$

$$= \frac{f(u(z)+\sqrt{v(z)}) + f(u(z)-\sqrt{v(z)})}{2}.$$

Зауважимо, що $v(z) \neq 0$, оскільки $z \in V$.

Нехай $V \neq G_2$ і $z \in G_2 \setminus V$. Тоді $L'_z(f) = Cf'(z_1)$ і $M_z(f) = f(z_1)$, де $z_1 \in G_1$. Тому

$$L'_z(f) = a_1(z)f'(u(z)),$$

$$M_z(f) = f(u(z)),$$

де $a_1 = A_1(e)$, $u = B(e)$, причому $u(z) \in G_1$.

Позначимо $\varphi(z) = h(z)a_1(z)$, $z \in G_2$. Враховуючи визначення функціоналів L'_z та M_z і те, що $(Af)(z) = h(z)(A_1 f)(z)$, $z \in G_2$, одержуємо, що для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G_1)$

$$(Af)(z) =$$

$$= \begin{cases} \varphi(z)\frac{f\left(u(z)+\sqrt{v(z)}\right)-f\left(u(z)-\sqrt{v(z)}\right)}{2\sqrt{v(z)}}, z \in V, \\ \varphi(z)f'(u(z)), \text{ якщо } z \in G_2 \setminus V; \end{cases} \tag{5}$$

$$(Bf)(z) =$$

$$= \begin{cases} \frac{f\left(u(z)+\sqrt{v(z)}\right)+f\left(u(z)-\sqrt{v(z)}\right)}{2}, z \in V, \\ f(u(z)), \text{ якщо } z \in G_2 \setminus V. \end{cases} \tag{6}$$

При цьому, функції $u(z)$ та $v(z)$ є аналітичними в області G_2 і такими, що для функцій $\chi_1(z) = u(z) + \sqrt{v(z)}$, $\chi_2(z) = u(z) - \sqrt{v(z)}$ виконуються умови: $\chi_1(G_2) \subseteq G_1$, $\chi_2(G_2) \subseteq G_1$.

Множина $G_2 \setminus V$ збігається з множиною нулів функції $v(z)$ на множині G_2. Якщо $v \equiv 0$ на G_2, то $V = \varnothing$ і з формул (5) та (6) випливає, що $A(f) = \varphi\cdot(f'\circ u)$, $B(f) = f\circ u$, де $\varphi, u \in \mathcal{H}(G_2)$, причому $u(G_2) \subseteq G_1$. Якщо ж $v \not\equiv 0$, то множина $G_2 \setminus V$ є не більш ніж зліченною.

Таким чином, ми довели необхідність умов наступної теореми.

Теорема. *Нехай G_1, G_2 – довільні області комплексної площини. Для того, щоб лінійні оператори $A, B : \mathcal{H}(G_1) \longrightarrow \mathcal{H}(G_2)$ задовольняли співвідношення* (2), *необхідно і достатньо, щоб пара цих операторів визначалася однією з наступних умов:*

1) $A = 0$, B *– довільний лінійний оператор,* $B : \mathcal{H}(G_1) \longrightarrow \mathcal{H}(G_2)$;

2) $A(f) = \varphi\cdot(f\circ\psi)$; $B(f) = \frac{1}{2}f\circ\psi$, *де* $\varphi, \psi \in \mathcal{H}(G_2)$, *причому* $\psi(G_2) \subseteq G_1$;

3) $A(f) = \varphi\cdot(f'\circ u)$, $B(f) = f\circ u$, *де* $\varphi, u \in \mathcal{H}(G_2)$, *причому* $u(G_2) \subseteq G_1$;

4) *оператори A та B визначаються формулами* (5) *та* (6), *в яких* $\varphi, u, v \in \mathcal{H}(G_2)$, *причому* $v \not\equiv 0$, *а множина* $G_2 \setminus V$ *збігається з множиною нулів функції v; крім того, функції u та v є такими, що для функцій* $\chi_1(z) = u(z)+\sqrt{v(z)}$, $\chi_2(z) = u(z)-\sqrt{v(z)}$ *виконуються умови:* $\chi_1(G_2) \subseteq G_1$, $\chi_2(G_2) \subseteq G_1$.

Доведення. Достатність. Якщо оператори A та B визначаються однією з умов 1)–3) то вони лінійно діють з простору $\mathcal{H}(G_1)$ у простір $\mathcal{H}(G_2)$ і задовольняють співвідношення (2). Нехай тепер оператори A та B визначаються умовою 4). Покажемо спочатку, що ці оператори діють з $\mathcal{H}(G_1)$ у $\mathcal{H}(G_2)$.

Візьмемо довільну точку $z_0 \in G_2$ і виберемо замкнуту спрямну жорданову криву γ, яка міститься в G_1 разом зі своєю внутрішністю і таку, що точки $\chi_1(z_0)$ та $\chi_2(z_0)$ лежать всередині області D, що обмежена кривою γ (при цьому $\chi_1(z_0) = \chi_2(z_0)$, якщо $z_0 \in G_2 \setminus V$). Оскільки корені рівняння $(\lambda - u(z))^2 - v(z) = 0$ відносно λ неперервним чином залежать від параметра z, то існує окіл V_{z_0} точки z_0, для якого одночасно виконуються умови: $\chi_1(V_{z_0}) \subseteq D$, $\chi_2(V_{z_0}) \subseteq D$. Використовуючи інтегральну формулу Коші одержуємо, що для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G_1)$ при $z \in V_{z_0}$ виконуються рівності

$$(Af)(z) = \frac{\varphi(z)}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\lambda)d\lambda}{(\lambda - u(z))^2 - v(z)}, \quad (7)$$

$$(Bf)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{(\lambda - u(z))f(\lambda)d\lambda}{(\lambda - u(z))^2 - v(z)}. \quad (8)$$

За властивістю інтеграла типу Коші функції $(Af)(z)$ та $(Bf)(z)$, які визначаються формулами (7) і (8), є диференційовними на множині V_{z_0}, а тому і в точці z_0. В силу довільності точки z_0 звідси випливає, що функції $(Af)(z)$ та $(Bf)(z)$ є аналітичними в області G_2. Тому оператори A та B діють в діють з простору $\mathcal{H}(G_1)$ у простір $\mathcal{H}(G_2)$. Їх лінійність є очевидною. Безпосередньою перевіркою переконуємося в тому, що ці оператори задовольняють співвідношення (2). Теорема доведена.

Зазначимо, що оператори A та B, які визначаються однією з умов 2)–4) доведеної теореми, неперервно діють діють з простору $\mathcal{H}(G_1)$ у простір $\mathcal{H}(G_2)$. Тому є правильним наступне твердження.

Наслідок. *Нехай G_1, G_2 – довільні області комплексної площини. Для того, щоб лінійні неперервні оператори $A, B : \mathcal{H}(G_1) \longrightarrow \mathcal{H}(G_2)$ задовольняли співвідношення* (2), *необхідно і достатньо, щоб пара цих операторів визначалася однією з умов* 2)–4) *попередньої теореми або $A = 0$, а B був довільним лінійним неперервним оператором, що діє з простору $\mathcal{H}(G_1)$ у простір $\mathcal{H}(G_2)$.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *G. Köthe.* Dualität in der Funktionentheorie // J. reine und angew. Math.–1953. – **191**. – P.30–49.

2. *L. A. Rubel.* Derivation pairs on the holomorphic functions // Funkcial. Ekvac. – 1967. – №10. – P. 225-227.

3. *N. R. Nandakumar.* A Note on Derivation Pairs // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – №21. – P. 535–539.

4. *L. Zalcman.* Derivation pairs on algebras of analytic functions // J. Func. Anal. – 1970. – **5**. – №3. – P. 329–333.

5. *Лінчук Ю.С.* Узагальнене рівняння Рубела // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. – 2011. – **1**. – №4. – С. 88-90.

6. *N. R. Nandakumar.* A note on the functional equation $M(fg) = M(f)M(g) + L(f)L(g)$ on $H(G)$ // Rend. Sem. Fac. Sci. Cagl. – 1998. – **68**. – P. 13–17.

7. *Pl. Kannappan, N. R. Nandakumar.* On a cosine functional equation for operators on the algebra of analytic functions in a domain // Aequationes Mathematicae – 2001.– **61.** – №3. – P. 233-238.

8. *Pl. Kannappan.* Functional Equations and Inequalities with Applications, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2009. – 810 p.

9. *J. Becker* A note on derivations of algebras of analytic functions // J. Reine Angew. Math. – 1978. – **297**. – P. 211-213.

10. *N.R. Nandakumar.* An application of Nienhuys-Thiemann s theorem to ring derivations on H(G) // Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetensch – 1988. – **91**. – P. 199-203

11. *Y. Watatani.* Derivations on continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1980. – **79**. – №2. – P. 206

12. *R. B. Burckel, S. Saeki.* Additive mappings on rings of holomorphic functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1983. – **89**. – №1. – P. 79-85

13. *N.R. Nandakumar.* Ring homomorphisms on H(G) // Int. J. Math. Math. Sci. – 1990. – **13**. – №2. – P. 393-396.

14. *N.R. Nandakumar.* Ring homomorphisms on algebras of analytic functions // Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska. – 1990. – **44**. – P. 37-43.

15. *A. K. Gaur, N. R. Nandakumar.* Derivation pairs of operators on algebras of analytic functions // Functional analysis, Narosa. – 1998. – P 104–110.

16. *Ю.С. Лінчук* Дериваційні пари операторів у просторі цілих функцій // Бук. мат. журн. – 2013. – **1**. – № 3–4. – С. 84-88.

17. *Yu.S. Linchuk.* On Rubel's Problem in the class of linear operators on the space of analytic functions // Complex Anal. Oper. Theory, (2014, to appear).

18. *Лінчук Ю.С.* Операторне узагальнення одного результата Рубела // Укр. матем. журнал.– 2011.– **63**. – № 12.–С 1710-1716.

19. *Yu.S. Linchuk.* On an operator analog of the cosine addition theorem // J. Math. Sci. – 2014. – **200**. – № 3. – С. 345-351.

20. *John B. Garnett.* Bounded analytic functions. – Academic Press, New York, 1981. – 468 p.