УДК 123.456

©2014 р. **Маслюченко В. К., Мельник В. С.**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ВІДСТАНЬ ДО МНОЖИН КВАЗІНЕПЕРЕРВНИХ У ТОЧЦІ ФУНКЦІЙ

Доведено, що для топологічного простору X з першою аксіомою зліченності, неізольованої точки x_0 в X, для якої множина $\{x_0\}$ замкнена, і довільної обмеженої функції $f : X \to \mathbb{R}$, яка неперервна при $x \neq x_0$, рівномірне відхилення $d(f, K_{x_0}(X))$ функції f від простору $K_{x_0}(X)$ всіх квазінеперервних у точці x_0 функцій $g : X \to \mathbb{R}$ дорівнює половині відстані від $f(x_0)$ до граничної множини $C(\dot{f}, x_0)$, де $\dot{f} = f|_{X\setminus\{x_0\}}$.

It is proven, that for the first-countable space X, nonisolated point x_0 from X, for which the set $\{x_0\}$ is closed, and any bounded function $f : X \to \mathbb{R}$, that is continuous for $x \neq x_0$, uniform distance $d(f, K_{x_0}(X))$ from function f to space $K_{x_0}(X)$ of all quasi-continuous in the point x_0 functions $g : X \to \mathbb{R}$ is half of the distance from $f(x_0)$ to the cluster set $C(\dot{f}, x_0)$, where $\dot{f} = f|_{X\setminus\{x_0\}}$.

1. Вступ.

Відомо, що рівномірна відстань від довільної функції $f : X \to \mathbb{R}$, заданої на нормальному просторі X, до простору $C(X)$ всіх неперервних функцій $g : X \to \mathbb{R}$ дорівнює $\frac{1}{2}||\omega_f||$, де ω_f — коливання функції f, а $||h|| = \sup\limits_{x\in X} |h(x)|$.

Цей результат для метризовних просторів фактично встановив Г.Ган [1], явно його не сформулювавши. Для паракомпактного простору X, обмеженої функції $f : X \to \mathbb{R}$ і простору $C_b(X)$ всіх обмежених неперервних функцій $g : X \to \mathbb{R}$ рівність $d(f, C_b(X)) = \frac{1}{2}||\omega_f||$ була доведена в монографії [2]. Загальна версія була отримана в праці [3] і анонсована в [4]. Доведення базується на теоремі Гана-Д'єдонне-Тонґа-Катетова [5, с.105].

На сьогодні відомо дуже багато аналогів неперервності: квазінеперервність, ледь неперервність, майже неперервність, тощо. Тому природно виникає питання про знаходження відстані від довільної функції $f : X \to \mathbb{R}$ до пов'язаних з тим чи іншим аналогом неперервності функціональних класів. Така робота була розпочата в [6], де були знайдені відстані $d(f, K_0(\mathbb{R}))$ від деяких конкретних функцій $f : X \to \mathbb{R}$ до простору $K_0(\mathbb{R})$ всіх квазінеперервних у точці 0 функцій $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Для розглядуваних там функцій f виконувалася рівність $D(f) = \{0\}$ ($D(f)$ — це множина точок розриву функції f). Тут ми значно розвиваємо цей результат, знаходячи відстань $d(f, K_{x_0}(X))$ до множини $K_{x_0}(X)$ всіх квазінеперервних у точці x_0 функцій $g : X \to \mathbb{R}$ функції $f : X \to \mathbb{R}$, яка неперервна при $x \neq x_0$.

2. Квазінеперервні відображення

Нехай X і Y — топологічні простори, $f : X \to Y$ — відображення і $x_0 \in X$.

Відображення $f : X \to Y$ називається *квазінеперервним у точці* x_0 з X, якщо для довільних околів U і V точок x_0 і $y_0 = f(x_0)$ у просторах X і Y відповідно існує така відкрита непорожня множина G в X, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$, і просто *квазінеперервним*, якщо воно квазінеперервне в кожній точці x з X.

Сукупність усіх квазінеперервних у точці x_0 дійснозначних функцій $f : X \to \mathbb{R}$ ми позначаємо символом $K_{x_0}(X)$, а сукупність усіх квазінеперервних функцій $f : X \to \mathbb{R}$ через $K(X)$.

3. Верхня та нижня границі функції.

Нехай $E \subseteq \mathbb{R}$. Для точки $x_0 \in \mathbb{R}$ і числа $\delta > 0$ покладемо $E^+_\delta(x_0) = E \cap (x_0, x_0 + \delta)$. Точка x_0 називається *граничною справа* для E, якщо $E^+_\delta(x_0) \neq \emptyset$ для кожного $\delta > 0$. Множину всіх граничних справа точок для E ми позначимо симолом $\overline{E}_+$. Для функції

$f : E \to \mathbb{R}$ і точки $x_0 \in \overline{E}_+$ покладемо

$$M_f^+(x_0;\delta) = \sup_{x\in E_\delta^+(x_0)} f(x),$$

$$m_f^+(x_0;\delta) = \inf_{x\in E_\delta^+(x_0)} f(x),$$

$$\bar{l} = \overline{f}(x_0+0) = \inf_{\delta>0} M_f^+(x_0;\delta)$$

$$\text{і} \qquad \underline{l} = \underline{f}(x_0+0) = \sup_{\delta>0} m_f^+(x_0;\delta)$$

Зрозуміло, що $-\infty \le \underline{l} \le \bar{l} \le \infty$. Якщо звуження $f|_{E_\delta^+(x_0)}$ обмежене для деякого $\delta > 0$, то числа $\underline{l}$ і $\bar{l}$ будуть скінченними. Зауважимо, що числа $\underline{l}$ і $\bar{l}$ позначаються ще так:

$$\bar{l} = \overline{\lim_{x\to x_0+0}} f(x) \qquad \text{і} \qquad \underline{l} = \underline{\lim_{x\to x_0+0}} f(x)$$

і називаються відповідно *правосторонньою верхньою* чи *правосторонньою нижньою границею функції f у точці x_0.*

Аналогічно вводяться числа

$$\bar{l} = \overline{f}(x_0-0) = \overline{\lim_{x\to x_0-0}} f(x)$$

$$\text{і} \qquad \underline{l} = \underline{f}(x_0-0) = \underline{\lim_{x\to x_0-0}} f(x)$$

для точок $x_0 \in \overline{E}_-$, де $\overline{E}_-$ — множина точок, граничних зліва для множини E.

Наступне твердження легко вивести з означень.

Лема 1. Нехай $f : [x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — деяка функція. Тоді:

1) $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in (x_0, x_0+\delta))$ $(f(x) < \overline{f}(x_0+0)+\varepsilon)$, якщо $\overline{f}(x_0+0) > -\infty$;

2) $(\forall\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x \in (x_0, x_0+\delta))$ $(f(x) > \overline{f}(x_0+0)-\varepsilon)$, якщо $\overline{f}(x_0+0) < +\infty$;

3) $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in (x_0, x_0+\delta))$ $(f(x) > \underline{f}(x_0+0)-\varepsilon)$, якщо $\underline{f}(x_0+0) < +\infty$;

4) $(\forall\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x \in (x_0, x_0+\delta))$ $(f(x) < \underline{f}(x_0+0)+\varepsilon)$, якщо $\underline{f}(x_0+0) > -\infty$;

Лема 2. Нехай $f : [x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — функція, у якої числа $\underline{l} = \underline{f}(x_0+0)$ і $\bar{l} = \overline{f}(x_0+0)$ скінченні. Тоді

1) якщо функція f неперервна при $x > x_0$ і $\underline{l} \le f(x_0) \le \bar{l}$, то f буде квазінеперервною в точці x_0;

2) якщо $f(x_0) \notin [\underline{l}, \bar{l}]$, то f не є квазінеперервною в точці x_0.

Доведення. 1). Позначимо $y_0 = f(x_0)$. Візьмемо довільні додатні числа ε і δ і покладемо $V = (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$ і $U = [x_0, x_0+\delta)$. Покажемо, що існує таке ξ, що $x_0 < \xi < x_0+\delta$ і $f(\xi) \in V$.

За лемою 1 існують такі точки x^* і x_*, що $\{x^*, x_*\} \subseteq (x_0, x_0+\delta) = G$, $f(x^*) > \bar{l}-\varepsilon$, а $f(x_*) < \underline{l}+\varepsilon$.

Припустимо, що $f(x^*) < y_0+\varepsilon$. Оскільки $f(x^*) > \bar{l}-\varepsilon$ і $\bar{l} \ge y_0$, то $f(x^*) > y_0-\varepsilon$, отже,

$$y_0 - \varepsilon < f(x^*) < y_0 + \varepsilon$$

і належність $f(\xi) \in V$ виконується при $\xi = x^*$.

Нехай $f(x_*) > y_0 - \varepsilon$. Оскільки $f(x_*) < \underline{l}+\varepsilon$ і $\underline{l} \le y_0$, то $f(x_*) < y_0+\varepsilon$, отже,

$$y_0 - \varepsilon < f(x_*) < y_0 + \varepsilon.$$

В такому разі $f(\xi) \in V$ виконується при $\xi = x_*$.

Нехай тепер $f(x^*) \ge y_0+\varepsilon$ і $f(x_*) \le y_0-\varepsilon$. Розглянемо відрізок I з кінцями x_* і x^*. Оскільки $x_0 < x^* < x_0+\delta$ та $x_0 < x_* < x_0+\delta$, то $I \subseteq (x_0, x_0+\delta)$. За умовою $D(f) \subseteq \{x_0\}$, тому $I \subseteq C(f)$, тобто функція f неперервна на I. Але

$$f(x_*) \le y_0 - \varepsilon < y_0 = f(x_0) < y_0 + \varepsilon \le f(x^*),$$

Отже, $f(x_*) < y_0 < f(x^*)$. За теоремою про проміжне значення існує точка $\xi \in I$, така, що $f(\xi) = y_0$. Зрозуміло, що $x_0 < \xi < x_0+\delta$. Таким чином, оголошена нами властивість доведена , і ми маємо таку точку ξ, що $x_0 < \xi < x_0+\delta$ і $f(\xi) \in V$.

Оскільки і $V = (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$, і $G = (x_0, x_0+\delta)$ — відкриті інтервали, та V — окіл точки $f(\xi)$, то з неперервності функції f у точці ξ випливає, що існує таке $\delta_0 > 0$, що $U_0 = (\xi-\delta_0, \xi+\delta_0) \subseteq G$ і $f(U_0) \subseteq V$. Ми знайшли відкриту непорожню множину U_0, таку, що $U_0 \subseteq U$ і $f(U_0) \subseteq V$, що і дає нам квазінеперервність функції f у точці x_0.

2). Нехай $y_0 \notin [\underline{l}, \bar{l}]$. Доведемо, що тоді f не буде квазінеперервною в точці x_0.

Припустимо, що $y_0 > \bar{l}$. Тоді $\varepsilon = y_0 - \bar{l} > 0$ і інтервал $V = (\bar{l}+\frac{\varepsilon}{2}, +\infty)$ — це окіл точки y_0, адже $y_0 = \bar{l}+\varepsilon > \bar{l}+\frac{\varepsilon}{2}$. Згідно з п.1) леми 1 знайдеться $\delta > 0$, таке, що для довільного $x \in (x_0, x_0+\delta)$ виконується нерівність

$f(x) < \bar{l} + \frac{\varepsilon}{2}$. Покладемо $U = [x_0, x_0 + \delta)$ і $U_0 = (x_0, x_0+\delta)$. Нехай $G \subseteq U$ і G — відкрита непорожня підмножина променя $[x_0, +\infty)$. Ясно, що існує точка $a \in G \setminus \{x_0\}$, адже множина $\{x_0\}$ не відкрита в $[x_0, +\infty)$. Тоді $a \in U_0$ і $f(a) < \bar{l} + \frac{\varepsilon}{2}$, отже, $f(a) \notin V$, а значить, $f(G) \nsubseteq V$. Таким чином, f не є квазінеперервною в точці x_0.

Припустимо тепер, що $y_0 < \underline{l}$. Візьмемо $\varepsilon = \underline{l} - y_0$ та $V = (-\infty, \underline{l} - \frac{\varepsilon}{2})$ — окіл точки y_0. Згідно з п.3) леми 1 знайдеться $\delta > 0$, таке, що для довільного $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ виконується нерівність $f(x) > \underline{l} - \frac{\varepsilon}{2}$. Покладемо $U = [x_0, x_0 + \delta)$. Так само легко пояснити, що для довільної відкритої непорожньої множини G, такої, що $G \subseteq U$, маємо, що $f(G) \nsubseteq V$, а це показує, що f не є квазінеперервною в точці x_0.

4. Про відстані $d(f, K^+_{x_0})$ та $d(f, K^-_{x_0})$.

Для скорочення запису покладемо $K^+_{x_0} = K_{x_0}([x_0, +\infty))$ і $K^-_{x_0} = K_{x_0}((-\infty, x_0])$.

Теорема 1. Нехай $f : [x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — функція, у якої числа $\bar{l} = \bar{f}(x_0 + 0)$ і $\underline{l} = \underline{f}(x_0 + 0)$ скінченні, $D(f) = \{x_0\}$ і $y_0 = f(x_0) \notin [\underline{l}, \bar{l}]$. Тоді

$$d(f, K^+_{x_0}) = \frac{1}{2} \min\{| \underline{l} - y_0 |, | \bar{l} - y_0 |\} = \Delta.$$

Доведення. Розглянемо функцію $g_0 : [x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$, яка при $y_0 > \bar{l}$ визначається як $g_0(x) = f(x) + \Delta$ при $x > x_0$ та $g_0(x) = y_0 - \Delta$ при $x = x_0$, а при $y_0 < \underline{l}$ визначається як $g_0(x) = f(x) - \Delta$ при $x > x_0$ та $g_0(x) = y_0 + \Delta$ при $x = x_0$ Оскільки $| f(x) - g_0(x) |=| \pm\Delta |= \Delta$ для всіх $x \geq x_0$, то $d(f, g_0) = \Delta$.

Доведемо, що функція g_0 квазінеперервна в точці x_0.

Оскільки f неперервна при $x > x_0$, то такою ж буде і функція g_0, адже $g_0(x) = f(x) + \Delta$ або $g_0(x) = f(x) - \Delta$ при $x > x_0$.

Якщо $y_0 > \bar{l}$, то $0 < y_0 - \bar{l} \leq y_0 - \underline{l}$, тому $\Delta = \frac{1}{2}(y_0 - \bar{l})$. Знайдемо $\overline{g_0}(x_0 + 0)$ і $g_0(x_0)$:

$$\overline{g_0}(x_0 + 0) = \overline{\lim_{x \to x_0+0}} g_0(x) =$$

$$= \overline{\lim_{x \to x_0+0}} (f(x) + \Delta) = \bar{l} + \Delta = \bar{l} + \frac{1}{2}(y_0 - \bar{l}) =$$

$$= \frac{1}{2}(y_0 + \bar{l}),$$

$$g_0(x_0) = y_0 - \Delta = y_0 - \frac{1}{2}(y_0 - \bar{l}) = \frac{1}{2}(y_0 + \bar{l}).$$

Таким чином, $g_0(x_0) = \overline{g_0}(x_0 + 0)$

Якщо $y_0 < \underline{l}$ то $\bar{l} - y_0 \geq \underline{l} - y_0 > 0$, а отже, $\Delta = \frac{1}{2}(\underline{l} - y_0)$. У цьому випадку:

$$\underline{g_0}(x_0 + 0) = \underline{\lim_{x \to x_0+0}} g_0(x) =$$

$$= \underline{\lim_{x \to x_0+0}} (f(x) - \Delta) = \underline{l} - \Delta = \underline{l} - \frac{1}{2}(\underline{l} - y_0) =$$

$$= \frac{1}{2}(y_0 + \underline{l}),$$

$$g_0(x_0) = y_0 + \Delta = \frac{1}{2}(y_0 + \underline{l}).$$

Тут також маємо $g_0(x_0) = \underline{g_0}(x_0 + 0)$. Отже, $g_0(x_0) \in [\underline{g_0}(x_0 + 0), \overline{g_0}(x_0 + 0)]$, звідси за лемою 2 маємо, що g_0 є квазінеперервною в точці x_0.

Таким чином, $g_0 \in K^+_{x_0}$ і $d(f, g_0) = \Delta$. Доведемо тепер, що ця відстань є мінімальною, тобто, що $d(f, g) \geq \Delta$ для довільного $g \in K^+_{x_0}$.

Нехай $g \in K^+_{x_0}$. Припустимо, що $g(x) > f(x) + \Delta$ для деякого $x > x_0$. Тоді

$$d(f, g) = ||f - g|| \geq| g(x) - f(x) |=$$

$$= g(x) - f(x) > \Delta,$$

бо $g(x) - f(x) > \Delta > 0$.

Припустимо тепер, що $g(x) < f(x) - \Delta$ для деякого $x > x_0$. Тоді

$$d(f, g) = ||f - g|| \geq| g(x) - f(x) |=$$

$$= f(x) - g(x) > \Delta,$$

бо $f(x) - g(x) > \Delta > 0$.

Нехай тепер $f(x) - \Delta \leq g(x) \leq f(x) + \Delta$ для кожного $x > x_0$. Тоді

$$\bar{g}(x_0 + 0) = \overline{\lim_{x \to x_0+0}} g(x) \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{x \to x_0+0}} (f(x) + \Delta) = \bar{l} + \Delta$$

і

$$\underline{g}(x_0+0) = \underline{\lim_{x \to x_0+0}} g(x) \geq \underline{\lim_{x \to x_0+0}} (f(x)-\Delta) =$$

$$= \underline{l} - \Delta.$$

За лемою 2 з квазінеперервності функції g в точці x_0 випливає, що

$$\underline{g_0}(x_0+0) \le g(x_0) \le \overline{g_0}(x_0+0).$$

Тому $\underline{l} - \Delta \le g(x_0) \le \bar{l} + \Delta$. В такому разі, якщо $y_0 > \bar{l}$, то $f(x_0) = y_0 > \bar{l} + \Delta \ge g(x_0)$, отже,

$$d(f,g) = ||f-g|| \ge | g(x_0) - f(x_0) | =$$

$$= f(x_0) - g(x_0) \ge y_0 - \bar{l} - \Delta = 2\Delta - \Delta = \Delta,$$

якщо ж $y_0 < \underline{l}$, то уже $f(x_0) = y_0 < \underline{l} - \Delta \le \le g(x_0)$ і

$$d(f,g) = ||f-g|| \ge | g(x_0) - f(x_0) | =$$

$$= g(x_0) - f(x_0) \ge \underline{l} - \Delta - y_0 = 2\Delta - \Delta = \Delta.$$

Ми показали, що для кожної функції $g \in K^+_{x_0}$ виконується нерівність $||f-g|| \ge \Delta$, а для функції $g_0 \in K^+_{x_0}$ має місце рівність $||f-g|| = \Delta$. Тому $d(f, K^+_{x_0}) = \Delta$.

Лема 3. Нехай $f : X \to Y$ — неперервне відкрите відображення, а $g : Y \to Z$ — квазінеперервне в точці $y_0 = f(x_0)$ відображення. Тоді композиція $h = g \circ f$ буде квазінеперервною в точці x_0.

Доведення. Нехай W — окіл точки $z_0 = h(x_0)$ і U — відкритий окіл точки x_0. Тоді образ $V = f(U)$ відкритий, оскільки f — відкрите відображення. Оскільки відображення g квазінеперервне, то існує відкрита і непорожня множина H в Y, така, що $H \subseteq V$ і $g(H) \subseteq W$.

Оскільки H відкрита і f неперервне, то прообраз $f^{-1}(H)$ відкритий. Множина $G = = f^{-1}(H) \cap U$ відкрита і непорожня, оскільки $\emptyset \ne H \subseteq V = f(U)$, причому $G \subseteq U$. Окрім того, $h(G) = g(f(G)) \subseteq g(H) \subseteq W$. Тому h є квазінеперервною в точці x_0.

Зрозуміло, що умови леми 3 будуть виконуватися, коли $f : X \to Y$ — це гомеоморфізм.

Теорема 2. Нехай $f : (-\infty, x_0] \to \mathbb{R}$ — функція, у якої числа $\bar{l} = \overline{f}(x_0 - 0)$ і $\underline{l} = \underline{f}(x_0 - 0)$ скінченні, $D(f) = \{x_0\}$ і $y_0 = = f(x_0) \notin [\underline{l}, \bar{l}]$. Тоді

$$d(f, K^-_{x_0}) = \frac{1}{2}\min\{| \underline{l} - y_0 |, | \bar{l} - y_0 |\} = \Delta.$$

Доведення. Розглянемо функцію $\psi : \mathbb{R} \to \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = 2x_0 - x$, яка є гомеоморфізмом числової прямої. Крім того, $\psi([x_0, +\infty)) = (-\infty, x_0]$, отже, звуження $\varphi = \psi|_{[x_0,+\infty)}$ — це гомеоморфізм променів $[x_0, +\infty)$ і $(-\infty, x_0]$.

Нехай $F = f \circ \varphi$. Оскільки $\varphi : [x_0, +\infty) \to \to (-\infty, x_0]$ — це гомеоморфізм і $\varphi(x_0) = x_0$, то $F(x_0) = f(x_0)$ і $D(F) = D(f) = \{x_0\}$.

Оскільки $\varphi((x_0, x_0 + \delta)) = (x_0 - \delta, x_0)$ для кожного $\delta > 0$, то $F((x_0, x_0 + \delta)) = = f((x_0 - \delta, x_0))$,

$$\overline{F}(x_0 + 0) = \inf_{\delta>0} \sup F((x_0, x_0 + \delta)) =$$

$$= \inf_{\delta>0} \sup f((x_0 - \delta, x_0)) = \overline{f}(x_0 - 0) = \bar{l}$$

і, аналогічно,

$$\underline{F}(x_0 + 0) = \underline{f}(x_0 - 0) = \underline{l}$$

Згідно з теоремою 1

$$d(F, K^+_{x_0}) = \frac{1}{2}\min\{|F(x_0) - \overline{F}(x_0 + 0)|,$$

$$|F(x_0) - \underline{F}(x_0 + 0)|\} = \frac{1}{2}\min\{| \underline{l} - y_0 |,$$

$$| \bar{l} - y_0 |\} = \Delta.$$

Розглянемо відображення

$$\Phi : \mathbb{R}^{(-\infty, x_0]} \to \mathbb{R}^{[x_0, +\infty)},$$

що задається правилом $G = \Phi(g) = g \circ \varphi$, яке очевидно бієктивне, бо $\varphi : [x_0, +\infty) \to \to (-\infty, x_0]$ — це бієкція. На основі леми 3 маємо, що $\Phi(K^-_{x_0}) = K^+_{x_0}$, адже φ — це гомеоморфізм. Крім того,

$$||\Phi(g_1) - \Phi(g_2)|| = \sup_{x \ge x_0} |g_1(\varphi(x)) - g_2(\varphi(x))| =$$

$$= \sup_{x \le x_0} |g_1(x) - g_2(x)| = ||g_1 - g_2||$$

для довільних функцій $g_1, g_2 : (-\infty, x_0] \to \to \mathbb{R}$, бо відображення φ сюрєктивне. Тому

$$d(f, K^-_{x_0}) = \inf_{g \in K^-_{x_0}} ||f - g|| =$$

$$= \inf_{g \in K^-_{x_0}} ||\Phi(f) - \Phi(g)|| = \inf_{G \in K^+_{x_0}} ||F - G|| =$$

$$= d(F, K_{x_0}^+) = \Delta$$

5. Деякі властивості δ-околів множин.

Нехай (X, d) — метричний простір, $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$ і $\delta > 0$. *Замкненим δ-околом* множини A називається множина всіх $x \in X$, таких, що $d(x, A) \leq \delta$. Він позначається $U_\delta[A]$.

Нам будуть потрібні наступні властивості δ-околів множин.

Лема 4. Нехай $\emptyset \neq A \subseteq X$. Тоді $U_\delta[A]$ — замкнена множина.

Доведення. Нехай $f(x) = d(x, A)$ функція на X. Відомо [7, с.12], що $|f(x') - f(x'')| \leq$ $\leq d(x', x'')$ для довільних $x', x'' \in X$, звідки випливає, що функція $f : X \to \mathbb{R}$ рівномірно неперервна на X, а отже, і неперервна на X. Оскільки відрізок $[0, \delta]$ — це замкнена множина в $\mathbb{R}$, і $f^{-1}([0, \delta]) = U_\delta[A]$, то і $U_\delta[A]$ — це замкнена множина в X як прообраз замкненої множини при неперервному відображенні.

Ми називаємо метричний простір (X, d) *обмежено секвенціально компактним*, якщо з кожної обмеженої послідовності точок $x_n \in X$ можна виділити підпослідовність з елементів x_{n_k}, яка збігається в X до деякої точки $a \in X$.

Лема 5. Нехай X — обмежено секвенціально компактний метричний простір, множини A_n замкнені і $A_n \downarrow A$. Тоді $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_\delta[A_n] = U_\delta[A]$.

Доведення. Нехай $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_\delta[A_n]$. Тоді $x \in U_\delta[A_n]$, а отже, $d(x, A_n) \leq \delta$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Для довільного номера n існує такий елемент $x_n \in A_n$, що $d(x, x_n) \leq \delta + \frac{1}{n}$. Тоді послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ обмежена, отже, існує підпослідовність $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ послідовності $(x_n)_{n=1}^{\infty}$,така, що $x_{n_k} \to a$ для деякого $a \in X$.

Покажемо, що $a \in A$. Нехай m — довільний номер. Оскільки $n_k \geq k$, то при $k \geq m$ виконується нерівність $n_k \geq m$. Тому $A_{n_k} \subseteq A_m$ при $k \geq m$. Але $x_{n_k} \in A_{n_k}$ для кожного k за побудовою. Тому $x_{n_k} \in A_m$ при $k \geq m$. Звідки випливає, що і $a = \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} \in$ $\in A_m$, адже множина A_m замкнена.

Оскільки $d(x, x_{n_k}) \leq \delta + \frac{1}{n_k}$, то при $k \to \infty$, отримуємо, що $d(x, a) \leq \delta$. Але $a \in A$, тому $d(x, A) \leq d(x, a) \leq \delta$, отже, $x \in U_\delta[A]$.

З іншого боку, оскільки $A \subseteq A_n$ для кожного n, то $U_\delta[A_n] \supseteq U_\delta[A]$ для кожного n, звідси випливає, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_\delta[A_n] \supseteq U_\delta[A]$. Таким чином, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_\delta[A_n] = U_\delta[A]$.

Надалі δ-околи множин у метричному просторі Y ми будемо позначати через $V_\delta[A]$.

6. Граничні множини.

Нехай X і Y — топологічні простори, $D \subseteq X$, $x_0 \in \overline{D}$, $\mathcal{U}_{x_0}$ — система всіх околів точки x_0 в X і $f : D \to Y$ — відображення. Перетин $C(f, x_0) = \bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}_{x_0}} \overline{f(U \cap D)}$ називається *граничною множиною відображення f у точці x_0*.

Для відображення $f : X \to Y$ і неізольованої точки $x_0 \in X$, тобто такої, що $x_0 \in \overline{X \setminus \{x_0\}}$, і множини $U \subseteq X$ покладемо $\dot{f} = f|_{X \setminus \{x_0\}}$ і $\dot{U} = U \setminus \{x_0\}$. Ми будемо розглядати граничні множини: $C(\dot{f}, x_0) =$ $= \bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}_{x_0}} f(\dot{U})$.

Лема 6. Нехай X — топологічний простір, Y — компактний простір, $x_0 \in X$, $f : X \to Y$ — функція і $C(\dot{f}, x_0)$ — гранична множина функції $\dot{f} = f|_{X \setminus \{x_0\}} : X \setminus \{x_0\} \to$ $\to Y$. Тоді для довільної відкритої в Y множини W, такої, що $W \supseteq C(\dot{f}, x_0)$, існує окіл $U \in \mathcal{U}_{x_0}$, такий, що $\overline{f(\dot{U})} \subseteq W$.

Доведення. Нехай $\overline{f(\dot{U})} \nsubseteq W$ для довільного $U \in \mathcal{U}_{x_0}$. Тоді множини $F_U = \overline{f(\dot{U})} \setminus W$ замкнені і непорожні для кожного $U \in \mathcal{U}_{x_0}$. Але для довільних $U_1, ..., U_n \in \mathcal{U}_{x_0}$ і $U = U_1 \cap ... \cap U_n \in \mathcal{U}_{x_0}$, причому $U_k \supseteq U$ при $k = 1, ..., n$, а тому і $F_{U_k} \supseteq F_U$ при $k = 1, ..., n$, а значить, $F_{U_1} \cap ... \cap F_{U_n} \supseteq F_U \neq$ $\neq \emptyset$. Тому $\{F_U : U \in \mathcal{U}_{x_0}\}$ — центрована система замкнених множин у компактному просторі Y. А отже, $\bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}_{x_0}} F_U \neq \emptyset$. Проте з другого боку:

$$\bigcap_{U\in\mathcal{U}_{x_0}} F_U = \bigcap_{U\in\mathcal{U}_{x_0}} (\overline{f(\dot{U})}\backslash W) = C(\dot{f}, x_0)\backslash W = \emptyset,$$

бо $C(\dot{f}, x_0) \subseteq W$. Отримана суперечність показує, що існує такий окіл $U \in \mathcal{U}_{x_0}$, що $\overline{f(\dot{U})} \subseteq W$.

Теорема 3. Нехай X — топологічний простір, $x_0 \in X$, $\{x_0\}$ — замкнена множина в X, $x_0 \in \overline{X\setminus\{x_0\}}$, $f : X \to \mathbb{R}$ — деяка функція і $C(\dot{f}, x_0)$ — гранична множина функції $\dot{f} = f|_{X\setminus\{x_0\}} : X\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$ зі значеннями в розширеній числовій прямій $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{+\infty, -\infty\}$. Тоді:

а) якщо $D(f) \subseteq \{x_0\}$ і $f(x_0) \in C(\dot{f}, x_0)$, то $f \in K_{x_0}(X)$;

б) якщо $f(x_0) \notin C(\dot{f}, x_0)$, то $f \notin K_{x_0}(X)$.

Доведення. а) Припустимо, що $y_0 = f(x_0) \in C(\dot{f}, x_0)$ і $D(f) \subseteq \{x_0\}$. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і розглянемо ε-окіл $V = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ точки y_0. Нехай U — довільний окіл точки x_0 в X і U_1 — відкритий окіл точки x_0, такий, що $U_1 \subseteq U$. Оскільки $y_0 \in C(\dot{f}, x_0)$, то $y_0 \in \overline{f(\dot{U}_1)}$, а тому $V \cap f(\dot{U}_1) \neq \emptyset$. Отже, існує точка $a \in \dot{U}_1$, така, що $f(a) = \dot{f}(a) \in V$, тобто $|f(a) - y_0| < \varepsilon$. Позначимо $\varepsilon_0 = \varepsilon - |f(a) - y_0| > 0$. Оскільки $a \neq x_0$, то функція f неперервна в точці a, а отже, існує відкритий окіл U_2 точки a, такий, що $|f(x) - f(a)| < \varepsilon_0$, як тільки $x \in U_2$. Оскільки одноточкова множина $\{x_0\}$ замкнена в X, то множина $\dot{U}_2 = U_2\backslash\{x_0\}$ відкрита в X, як різниця відкритої і замкненої множин. Тоді перетин $G = \dot{U}_1 \cap \dot{U}_2$ — це відкрита множина в X та непорожня, бо $a \in \dot{U}_1$ і $a \in \dot{U}_2$. Крім того, для довільного $x \in G$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - f(x_0)| <$$

$$< \varepsilon_0 + |f(a) - y_0| = \varepsilon,$$

отже, $f(x) \in V$.

Таким чином, для довільного базисного околу V точки $f(x_0)$ і довільного околу U точки x_0 ми знайшли відкриту і непорожню множину G, таку, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$, що і дає нам квазінеперервність f в точці x_0.

б) Припустимо, що $y_0 = f(x_0) \notin C(\dot{f}, x_0)$. Нехай $V = \mathbb{R}\setminus C(\dot{f}, x_0)$. Оскільки множина $C(\dot{f}, x_0)$ замкнена в $\overline{\mathbb{R}}$, то множина V відкрита в $\overline{\mathbb{R}}$, а значить, і в $\mathbb{R}$, бо $V \subseteq \mathbb{R}$ і $\mathbb{R}$ — відкрита в $\overline{\mathbb{R}}$. Отже, оскільки $y_0 \in V$, то існує таке $\varepsilon > 0$, що $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \subseteq V$. Множина $W = \overline{\mathbb{R}}\setminus[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ відкрита в $\overline{\mathbb{R}}$. Очевидно, що $W \supseteq \overline{\mathbb{R}}\setminus V \supseteq C(\dot{f}, x_0)$. Тому за лемою 4 маємо, що існує окіл $U \in \mathcal{U}_{x_0}$, такий, що $\overline{f(\dot{U})} \subseteq W$. Окрім того, $f(x_0) \notin W$.

Нехай G — довільна відкрита непорожня підмножина U і $V_0 = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$. Покажемо, що $f(G) \nsubseteq V_0$. Для цього з'ясуємо, що існує точка $a \in G$, для якої $a \neq x_0$. Якщо $x_0 \notin G$, то за a можна взяти довільну точку непорожньої множини G, якщо ж $x_0 \in G$, то G — буде відкритим околом точки x_0 в X, але $x_0 \in \overline{X\setminus\{x_0\}}$, отже, $G \cap (X\setminus\{x_0\}) \neq \emptyset$, тому існує точка $a \in G \cap (X\setminus\{x_0\})$, яка й буде шуканою.

Для знайденої точки $a \in G$ будемо мати, що $a \in \dot{U}$, тому $f(a) \in f(\dot{U}) \subseteq \overline{f(\dot{U})} \subseteq W$. Тоді $f(a) \notin V_0$, бо $W \cap V_0 = \emptyset$. Таким чином, $f(a) \in f(G)\setminus V_0$, отже, $f(G) \nsubseteq V_0$.

Ми побудували такі околи V_0 точки $f(x_0)$ і U точки x_0, що $f(G) \nsubseteq V_0$ для довільної відкритої підмножини G околу U. Отже, f не є квазінеперервною в точці x_0.

7. Відстань до множини $K_{x_0}(X)$.

Для непорожньої підмножини E числової прямої $\mathbb{R}$ і точки y покладемо $\rho(y, E) = \inf\{|y - v| : v \in E\}$.

Теорема 4. Нехай X — топологічний простір з першою аксіомою зліченності, x_0 — неізольована точка в X, для якої множина $\{x_0\}$ замкнена в X, $f : X \to \mathbb{R}$ — обмежена функція, для якої $D(f) \subseteq \{x_0\}$, і $\dot{f} = f|_{X\setminus\{x_0\}}$. Тоді:

$$d(f, K_{x_0}(X)) = \frac{1}{2}\rho(f(x_0), C(\dot{f}, x_0)) = \delta$$

Доведення. Оскільки множина $C(\dot{f}, x_0)$ компактна в $\mathbb{R}$, то існує точка $v_0 \in C(\dot{f}, x_0)$, така, що $\rho(y_0, C(\dot{f}, x_0)) = \inf\{|y_0 - v| : v \in C(\dot{f}, x_0))\} = \min\limits_{v\in C(\dot{f}, x_0))} |y_0 - v| = |y_0 - v_0|$.

Очевидно, що $|y_0 - v_0| = 2\delta$ і $v_0 \in \overline{f(\dot{U})}$ для кожного $U \in \mathcal{U}_{x_0}$.

Відповідно визначимо функцію g_0 наступним чином : при $y_0 > v_0$ покладемо

$g_0(x) = f(x)+\delta$, коли $x \neq x_0$, і $g_0(x) = y_0-\delta$, коли $x = x_0$, а при $y_0 < v_0$ покладаємо $g_0(x) = f(x)-\delta$, коли $x \neq x_0$, і $g_0(x) = y_0+\delta$, коли $x = x_0$. Оскільки $|f(x) - g_0(x)| = \delta$ для довільного $x \in X$, то $||f - g_0|| = \delta$.

Нехай $U \in \mathcal{U}_{x_0}$. Доведемо, що $g_0(x_0) \in \overline{g_0(\dot{U})}$ для довільного $U \in \mathcal{U}_{x_0}$. Якщо $y_0 > v_0$, то $\overline{g_0(\dot{U})} = \overline{(f+\delta)(\dot{U})} = \overline{f(\dot{U})+\delta} = \overline{f(\dot{U})}+\delta$. Оскільки $y_0-v_0 = 2\delta$, то $y_0-\delta = v_0+\delta$, а $g_0(x_0) = f(x_0)-\delta = y_0-\delta = v_0+\delta$. Зауважимо, що $v_0 \in \overline{f(\dot{U})}$, адже $v_0 \in C(\dot{f}, x_0)$. Тому $g_0(x_0) = v_0 + \delta \in \overline{f(\dot{U})}+\delta = \overline{g_0(\dot{U})}$.

Якщо ж $y_0 < v_0$, то $\overline{g_0(\dot{U})} = \overline{(f-\delta)(\dot{U})} = \overline{f(\dot{U})-\delta} = \overline{f(\dot{U})}-\delta$, і $v_0 - \delta \in \overline{f(\dot{U})} - \delta$. З того, що $v_0 - y_0 = 2\delta$, маємо, що $v_0-\delta = y_0+\delta = f(x_0)+\delta = g_0(x_0)$. А тому $g_0(x_0) = v_0 - \delta \in \overline{f(\dot{U})} - \delta = \overline{g_0(\dot{U})}$.

Таким чином, $g_0(x_0) \in \overline{g_0(\dot{U})}$ для кожного $U \in \mathcal{U}_{x_0}$. Тоді $g_0(x_0) \in C(\dot{g}_0, x_0)$, а значить, $g_0 \in K_{x_0}(X)$ за теоремою 3. Таким чином, $d(f, K_{x_0}(X)) \leq ||f - g_0|| = \delta$.

Доведемо тепер, що $d(f,g) \geq \delta$ при довільному $g \in K_{x_0}(X)$.

Нехай $g \in K_{x_0}(X)$. Припустимо, що $g(x) > f(x) + \delta$ для деякого $x \neq x_0$. Тоді:

$$d(f,g) = ||f-g|| \geq |g(x) - f(x)| =$$

$$= g(x) - f(x) > \delta,$$

бо $g(x) - f(x) > \delta > 0$.

Припустимо, що $g(x) < f(x) - \delta$ для деякого $x \neq x_0$. Тоді:

$$d(f,g) = ||f-g|| \geq |f(x) - g(x)| =$$

$$= f(x) - g(x) > \delta,$$

бо $f(x) - g(x) > \delta > 0$.

Нехай тепер $f(x) - \delta \leq g(x) \leq f(x)+\delta$ для кожного $x \neq x_0$. Доведемо, що тоді $|g(x_0)-f(x_0)| \geq \delta$. Оскільки $|f(x)-g(x)| \leq \delta$ при $x \neq x_0$, то $g(x) \in V_\delta[f(x)] = [f(x)-\delta, f(x) + \delta]$ для кожного $x \neq x_0$. Отже, $g(\dot{U}) \subseteq V_\delta[f(\dot{U})]$ для довільного околу $U \in \mathcal{U}_{x_0}$. Тоді маємо, що $\overline{g(\dot{U})} \subseteq \overline{V_\delta[f(\dot{U})]} \subseteq V_\delta[f(\dot{U})] \subseteq V_\delta[\overline{f(\dot{U})}]$ для кожного $U \in \mathcal{U}_{x_0}$.

Оскільки X — простір з першою аксіомою зліченності, то існує база $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ околів точки x_0 в X, така, що $U_n \supseteq U_{n+1}$ для кожного n.

В такому разі

$$C(\dot{f}, x_0) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_{x_0}} \overline{f(\dot{U})} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{f(\dot{U}_n)}.$$

Оскільки f обмежена на $X \setminus \{x_0\}$, то і g обмежена на $X \setminus \{x_0\}$, бо $f(x)-\delta \leq g(x) \leq f(x)+\delta$ при $x \neq x_0$. А тоді $\overline{g(\dot{U})}$ і $\overline{f(\dot{U}_n)}$ — замкнені і обмежені множини в $\mathbb{R}$, а отже, і компактні для кожного $U \in \mathcal{U}_{x_0}$.

Оскільки $\overline{g(U_n)} \subseteq V_\delta[\overline{f(U_n)}]$ для кожного n, то за лемою 5,

$$C(\dot{g}, x_0) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_{x_0}} \overline{g(\dot{U})} =$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{g(\dot{U}_n)} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} V_\delta[\overline{f(\dot{U}_n)}] =$$

$$= V_\delta[\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{f(\dot{U}_n)}] = V_\delta[\bigcap_{U \in \mathcal{U}_{x_0}} \overline{f(\dot{U})}] = V_\delta[C(\dot{f}, x_0)].$$

Отже, $C(\dot{g}, x_0) \subseteq V_\delta[C(\dot{f}, x_0)]$. Оскільки $g \in K_{x_0}(X)$, то $g(x_0) \in C(\dot{g}, x_0)$ за теоремою 3, звідки $g(x_0) \in V_\delta[C(\dot{f}, x_0)]$. Тоді

$$\rho(g(x_0), C(\dot{f}, x_0)) \leq \delta.$$

З іншого боку, $\rho(f(x_0), C(\dot{f}, x_0)) = 2\delta$.

З компактності множини $C(\dot{f}, x_0)$ випливає, що існує такий елемент $b \in C(\dot{f}, x_0)$, що $|g(x_0) - b| = \rho(g(x_0), C(\dot{f}, x_0)) \leq \delta$. Тоді

$$|g(x_0) - f(x_0)| = |f(x_0) - b - (-b + g(x_0))| \geq$$

$$\geq |f(x_0) - b| - |g(x_0) - b| \geq 2\delta - \delta = \delta.$$

Таким чином, $|g(x_0) - f(x_0)| \geq \delta$, і $d(f,g) \geq |g(x_0) - f(x_0)| \geq \delta$. Отже, ми довели, що $d(f,g) \geq \delta$ для кожного $g \in K_{x_0}(X)$ і $d(f, g_0) = \delta$ для деякого $g_0 \in K_{x_0}(X)$. Тому $d(f, K_{x_0}(X)) = \delta$.

Зауважимо, що побудована в доведенні теореми 4 функція $g_0 : X \to \mathbb{R}$ квазінеперервна в точці x_0 і неперервна при $x \neq x_0$, отже, вона буде квазінеперервною. Тому в умовах теореми 4 і

$$d(f, K(X)) = \delta$$

причому ця відстань досягається на деякій функції $g_0 \in K(X)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Hahn H.* Uber halbstetige und unstetige Functionen // Sitzungsberichte Akad.Wiss.Wien.Math. — naturwiss.Kl.Abt.IIa. — 1917. — **126**. — S.91-110.

2. *Benyamini Y., Lindenstrauss J.* Geometric nonlinear functional analysis. V.1. — Amer.Math.Soc., 2000. — 488p.

3. *Маслюченко В. К., Мельник В. С.* Про рівномірне відхилення від простору неперервних функцій // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. т.11, №3: Теорія наближення функцій і суміжні питання/ Відп. ред. А. С. Романюк. — Київ: Інститут математики НАН України, 2014. — С.158-166.

4. *Мельник В.* Навколо теореми Гана-Д'єдонне-Тонґа-Катетова // Матеріали студ. наук. конф. ЧНУ. 17 - 19 квітня 2013. Фіз.-мат. науки. — Чернівці: ЧНУ, 2013. — С. 441-442.

5. *Энгелькинг Р.* Общая топология. — М.: Мир, 1986. — 752 с.

6. *Мельник В.* Про відстань до множин квазінеперервних або ледь неперервних у нулі функцій // Матеріали студ. наук. конф. ЧНУ. 5 - 6 квітня 2012. Фіз.-мат. науки. — Чернівці: ЧНУ, 2012. — С. 341-342.

7. *Маслюченко В. К.* Лекції з функціонального аналізу. ч.1. Метричні і нормовані простори. — Чернівці: ЧНУ, 2010. — 184с.