УДК 123.456

©2014 р. В.К.Маслюченко, Н.М.Ровенко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМ ПРО ЗВ'ЯЗКИ МІЖ НАРІЗНИМИ І СУКУПНИМИ АНАЛОГАМИ НЕПЕРЕРВНОСТІ

Показано, що для берівського простору X, топологічного простору Y з не більш, ніж зліченною псевдобазою і топологічного простору Z кожне горизонтально ледь неперервне відображення $f : X \times Y \to Z$, у якого множина тих точок $x \in X$, що вертикальний x-розріз $f^x = f(x, \cdot) : Y \to Z$ є майже ледь неперервним, залишкова в X, є сукупно майже ледь неперервним. Ця теорема розвиває попередні результати Я.Борсіка, О.Ванксо і В.Маслюченка на цю тему.

We prove the following result. Let X be a Baire space, Y a topological space with at most countable pseudobase, Z a topological space and let a mapping $f : X \times Y \to Z$ be horizontal somewhat continuous. Assume that the set of all points $x \in X$ for which the vertical x-section $f^x = f(x, \cdot) : Y \to Z$ is nearly somewhat continuous, is residual in X. Then f is jointly nearly somewhat continuous. This theorem develops previous results on the subject of Ya.Borsik, O.Vancso and V.Maslyuchenko.

1.Вступ. В огляді З.Пьотровського [1] було сформульовано три питання щодо зв'язків між деякими нарізними і сукупними послабленнями неперервності. Одне з них стосувалося зв'язку між нарізною ледь неперервністю і сукупною майже ледь неперервністю. Відповідь на це питання була отримана у працях [2-4]. Пізніше в праці [5] були одержані значно загальніші результати на цю тему. Зокрема, там замість класу SS нарізно ледь неперервних відображень розглядалися ширші класи S_hS_n і S_hS горизонтально ледь неперервних відображень, які майже ледь неперервні чи ледь неперервні відносно другої змінної відповідно, і встановлювалося, що всі функції з цих класів мають певні сукупні властивості, наприклад, вказувалися умови на простори X, Y і Z, за яких виконується включення $S_hS_n(X\times Y, Z) \subseteq S_n(X \times Y, Z)$, а не тільки включення $SS(X \times Y, Z) \subseteq S_n(X \times Y, Z)$, як було раніше. Правда, цей загальніший результат про включення $S_hS_n \subseteq S_n$ не охоплював результат Я.Борсіка з [2], оскільки в його теоремі ледь неперервність відносно другої змінної вимагалася не для всіх точок x з X, а лише для точок з деякої залишкової в X множини, тобто замість класу SS у нього розглядався клас, який ми позначаємо символом $S\widetilde{S}$. Тому постало питання про підсилення результату з [5] так, щоб воно включало і результат Я.Борсіка [2], тобто про отримання теореми про включення $S_h\widetilde{S_n}(X \times Y, Z) \subseteq S_n(X \times Y, Z)$.

У цій статті ми, модифікуючи міркування з [5], отримуємо теорему про включення $S_h\widetilde{S_n} \subseteq S_n$. Крім того, узагальнюємо і твердження про три інших включення з теореми 4 праці [5]. До того ж, ми даємо відповідь на одне питання, поставлене в [3]. Попередні версії поданих тут результатів були анонсовані в тезах [6-8].

2. Основні означення і позначення. Нехай X і Y – топологічні простори, $f : X \to Y$ – відображення і $x \in X$. Кажуть, що f *ледь неперервне, ледь майже неперервне, квазінеперервне* чи *майже квазінеперервне в точці* x, якщо воно задовольняє відповідно одну з наступних умов:

S : для кожного околу V точки $f(x)$ в Y існує така відкрита непорожня множина G в X, що $f(G) \subseteq V$;

S_n : для кожного околу V точки $f(x)$ в Y існує така множина A в X, що $int\overline{A} \neq \varnothing$ і $f(A) \subseteq V$;

K : для довільних околів U і V точок x і $f(x)$ у просторах X і Y відповідно існує така відкрита непорожня множина G в X, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$;

K_n : для довільних околів U і V точок x і $f(x)$ у просторах X і Y відповідно існує така множина A у просторі X, що $A \subseteq U$, $int\overline{A} \neq \varnothing$ і $f(A) \subseteq V$.

Відображення називається *ледь неперервним, ледь майже неперервним, квазінеперервним* чи *майже квазінеперервним*, якщо воно є таким у кожній точці простору X. Ці властивості позначаються відповідно символами S, S_n, K і K_n, а сукупності всіх таких функцій $f : X \to Y$ – символами $S(X,Y), S_n(X,Y), K(X,Y)$ і $K_n(X,Y)$. Взагалі, для довільної властивості P відображень символ $P(X,Y)$ означає сукупність всіх відображень $f : X \to Y$, які мають властивість P.

Нехай X, Y і Z – топологічні простори і $f : X \times Y \to Z$ – відображення. Для точки $p = (x,y) \in X \times Y$ покладемо $f^x(y) = f_y(x) = f(x,y)$. Для властивості P відображень нехай

$$X_P(f) = \{x \in X : f^x \in P(Y,Z)\}$$

і

$$Y_P(f) = \{y \in Y : f_y \in P(X,Z)\}$$

Якщо Q ще одна властивість відображень, то ми покладаємо:

$$PQ(X \times Y, Z) = \{f \in Z^{X \in Y} :$$

$X_Q(f) = X$ і $Y_P(f) = Y\}$;

$$P\widetilde{Q}(X \times Y, Z) = \{f \in Z^{X \in Y} :$$

$X_Q(f)$ залишкова в X і $Y_P(f) = Y\}$.

Нагадаємо, що *залишкова множина* B у топологічному просторі X – це множина, доповнення $A = X \backslash B$ до якої є *множиною першої категорії*, тобто подається у вигляді $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, де множини A_n *ніде не щільні в* X, що означає, що $int\overline{A_n} \neq \varnothing$.

Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *горизонтально ледь неперервним* чи *горизонтально квазінеперервним у точці* $p = (x,y) \in X \times Y$, якщо вона задовольняє відповідно одну з наступних умов:

S_h : для довільного околу W точки $f(x,y)$ у просторі Z існують відкрита непорожня множина G в X і точка $b \in Y$, такі, що $f(G \times \{b\}) \subseteq W$;

K_h : для довільних околів U, V і W точок x, y і $f(x,y)$ у просторах X, Y і Z відповідно існують відкрита непорожня множина G в X і точка $b \in Y$, такі, що $G \subseteq U, b \in V$ і $f(G \times \{b\}) \subseteq W$.

Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *горизонтально ледь неперервним* чи *горизонтально квазінеперервним*, якщо воно є таким у кожній точці $p = (x,y)$ добутку $X \times Y$. Ці властивості ми позначаємо символами S_h, K_h відповідно.

Нехай Q – деяка властивість відображень. Ми покладаємо

$$S_hQ(X \times Y, Z) = \{f \in Z^{X \times Y} :$$

$f \in \ S_h(X \times Y, Z)$ і $X_Q(f) = X\}$,

$$S_h\widetilde{Q}(X \times Y, Z) = \{f \in Z^{X \times Y} :$$

$f \in \ S_h(X \times \ Y, Z)$ і $X_Q(f)$ залишкова в $X\}$.

Аналогічно вводяться класи $K_hQ(X \times \ Y, Z)$ і $K_h\widetilde{Q}(X \times Y, Z)$.

Нарешті, відображення $f : X \times \ Y \ \to \ Z$ називається *змішано майже ледь неперервним у точці* $p = (x,y) \in X \times Y$, якщо для кожного околу W точки $f(x,y)$ у Z існують множини A і V у просторах X і Y відповідно, такі, що $int\overline{A} \neq \varnothing$, V – відкрита непорожня в Y і $f(A \times V) \subseteq W$, і просто *змішано майже ледь неперервним*, якщо воно є таким у кожній точці добутку $X \times Y$. Сукупність усіх таких відображень $f : X \times Y \to Z$ позначається символом $P_{ns}(X \times Y, Z)$.

3. Допоміжні твердження. Ми будемо спиратися надалі на такі два твердження.

Лема 1. Нехай G – відкрита множина у просторі X, $A \subseteq X$ і $G \subseteq \overline{A}$. Тоді $G \subseteq \overline{G \cap A}$.

Доведення. Нехай $x \in G$. Тоді $x \in \ \overline{A}$, адже $G \subseteq \overline{A}$. Множина G, будучи відкритою, є околом кожної своєї точки, зокрема, точки x. Нехай U – довільний окіл точки x в X. Тоді $U \cap G$ теж буде околом точки x. Але ж x – це точка дотику множини A, отже , $(U \cap G) \cap A \neq \varnothing$. Тоді і $U \ \cap \ (G \ \cap \ A) \neq \ \varnothing$, отже, $x \in \overline{G \cap A}$.

Кажуть, що топологічний простір X *берів* чи *берівський*, якщо кожна непорожня відкрита множина G в X є *множиною другої категорії*, тобто не є множиною першої категорії.

Лема 2. Нехай X – берівський простір, E – залишкова множина в X і G – відкрита непорожня множина в X. Тоді перетин $E \cap G$ є множиною другої категорії в X.

Доведення. За умовою доповнення $X \backslash E$ – це множина першої категорії в X. Оскільки $G \backslash E \subseteq X \backslash E$, то і різниця $G \backslash E$ буде множиною першої категорії в X. Оскільки X – берівський простір, то G – це множина другої категорії в X. Але $G = (G \cap E) \cup (G \setminus E)$. Якби перетин $G \cap E$ був множиною першої категорії, то такою ж була б і множина G, адже об'єднання двох множин першої категорії залишається множиною першої категорії. Але G – це множина другої категорії, отже, таким же буде і перетин $G \cap E$.

Як і в [5] ми будемо використовувати одну властивість горизонтально квазінеперервних відображень [5, теорема 2] і наслідок з неї [5, теорема 3].

Лема 3. Нехай X, Y і Z – топологічні простори, U і V – відкриті множини у просторах X і Y відповідно, $A \subseteq X$, $U \subseteq \overline{A}$ і $f : X \times Y \to Z$ – горизонтально квазінеперервне відображення. Тоді $f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)}$.

Лема 4. Нехай X, Y і Z – топологічні простори, причому простір X регулярний, і $f : X \times Y \to Z$ – горизонтально квазінеперервне і змішано майже ледь неперервне відображення. Тоді f буде сукупно ледь неперервним.

4. Основні результати. Наступна теорема узагальнює теорему 4 з [5]. Нагадаємо, що *псевдобазою* топологічного простору Y називається така система $\mathcal{V}$ його відкритих множин, що для кожної відкритої непорожньої множини G в X існує непорожня множина V з $\mathcal{V}$, така, що $V \subseteq G$.

Теорема 1. Нехай X – берівський простір, Y – топологічний простір, який має не більш, ніж зліченну псевдобазу $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ і Z – довільний топологічний простір. Тоді:

(i) $S_h\widetilde{S_n}(X \times Y, Z) \subseteq S_n(X \times Y, Z)$;

(ii) $S_h\widetilde{S}(X \times Y, Z) \subseteq P_{ns}(X \times Y, Z)$;

(iii) $K_h\widetilde{K_n}(X \times Y, Z) \subseteq K_n(X \times Y, Z)$;

(iv) $K_h\widetilde{K}(X \times Y, Z) \subseteq K(X \times Y, Z)$, якщо простір Z регулярний.

Доведення. (i). Нехай $f \in S_h\widetilde{S_n}(X \times Y, Z)$ і $p_0 \in X \times Y$. Доведемо, що відображення f майже ледь неперервне в точці p_0.

Нехай W – відкритий окіл точки $z_0 = f(p_0)$ у просторі Z. Оскільки f горизонтально ледь неперервне в точці p_0, то існують відкрита непорожня множина G в X і точка $b \in Y$, такі, що $f(G \times \{b\}) \subseteq W$. Для кожного номера n розглянемо множини

$$A_n = \{x \in G : (\exists B_{n,x})(B_{n,x} \subseteq V_n \subseteq \overline{B_{n,x}})$$

$$i \quad (f^x(B_{n,x}) \subseteq W)\}.$$

За умовою множина $T = X_{S_n}(f)$ є залишковою в X. Оскільки множина G відкрита в X і непорожня, то за лемою 2 перетин $P = G \cap T$ – це множина другої категорії в X.

Доведемо, що $P \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Справді, нехай $x \in P$. Тоді відображення $f^x : Y \to Z$ буде майже ледь неперервним, адже $x \in T$, зокрема, воно буде таким і в точці b. Оскільки $x \in G$, то $f^x(b) = f(x,b) \in f(G \times \{b\}) \subseteq W$, отже $f^x(b) \in W$. З відкритості W випливає, що W – це окіл точки $f^x(b)$. Відображення f^x майже ледь неперервне, тому існує така множина B в Y, що $H = int\overline{B} \neq \varnothing$ і $f^x(B) \subseteq W$. Оскільки H – це відкрита непорожня множина в Y, а $\mathcal{V}$ – псевдобаза, то існує такий номер n, що $\varnothing \neq V_n \subseteq H$. Покладемо $B_{n,x} = B \cap V_n$. Оскільки $V_n \subseteq H \subseteq \overline{B}$, то $V_n \subseteq \overline{B}$ і $B_{n,x} \subseteq V_n \subseteq \overline{B_{n,x}}$ за лемою 1. Крім того, $f^x(B_{n,x}) \subseteq f^x(B) \subseteq W$. Отже, $x \in A_n$ і потрібне включення доведене.

Оскільки P – це множина другої категорії в X і $P \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, то існує такий номер m, що A_m буде десь щільною множиною, тобто $U = int\overline{A_m} \neq \varnothing$. За лемою

1 для множини $A = U \cap A_m$ будемо мати, що $A \subseteq U \subseteq \overline{A}$. Покладемо $V = V_m$ і $E = \bigcup\limits_{x \in A} (\{x\} \times B_{m,x})$. Оскільки $A \subseteq A_m$, то $f(\{x\} \times B_{m,x}) = f^x(B_{m,x}) \subseteq W$ для кожного $x \in A$. Тому

$$f(E) = \bigcup_{x \in A} f(\{x\} \times B_{m,x}) \subseteq W.$$

Оскільки $U \subseteq \overline{A}$ і $V \subseteq \overline{B_{m,x}}$ для кожного $x \in A$, то, як легко перевірити, $U \times V \subseteq \overline{E}$. Тому $int\overline{E} \neq \varnothing$, адже $int\overline{E} \supseteq U \times V \neq \varnothing$ і множина $U \times V$ відкрита в $X \times Y$. Це показує, що відображення f є майже ледь неперервним в точці p_0.

(ii). Нехай $f \in S_h\widetilde{S}(X \times Y, Z)$. Покажемо, що $f \in P_{ns}(X \times Y, Z)$. Нехай $p_0 \in X \times Y$ і W – відкритий окіл точки $z_0 = f(p_0)$ у просторі Z. З горизонтальної ледь неперервності відображення f у точці p_0 випливає, що існують відкрита непорожня множина G в X і точка $b \in Y$, такі, що $f(G \times \{b\}) \subseteq W$. Покладемо $T = X_S(f), P = G \cap T$ і $A_n = \{x \in G : f^x(V_n) \subseteq W\}$. Оскільки для кожного $x \in P$ відображення f^x ледь неперервне, то, як легко перевірити, $P \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. З леми 2 випливає, що P є множиною другої категорії, отже, існує такий номер m, що $U = int\overline{A_m} \neq \varnothing$. За лемою 1 для множини $A = U \cap A_m$ будемо мати, що $A \subseteq U \subseteq \overline{A}$. Нехай $V = V_m$ і $E = A \times V$. Оскільки $A \subseteq A_m$, то $f^x(V) = f^x(V_m) \subseteq W$ для кожного $x \in A$.

Таким чином, $f(A \times V) \subseteq W$ і $int\overline{A} = U \neq \varnothing$, отже, відображення f є змішано майже ледь неперервним у точці p_0, а значить, $f \in P_{ns}(X \times Y, Z)$.

(iii). Нехай $f \in K_h\widetilde{K_n}(X \times Y, Z)$ і $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Доведемо, що f є майже квазінеперервним у точці p_0. Розглянемо довільні відкриті околи U точки x_0 у просторі X і V точки y_0 у просторі Y. Для того, щоб відображення f було майже квазінеперервним у точці p_0, досить показати, що звуження $g = f|_{U \times V}$ є майже ледь неперервним у точці p_0. Оскільки множини U і V відкриті у відповідних просторах, то $X_{K_n}(f) \cap U \subseteq U_{K_n}(g) \subseteq U$. За умовою множина $X_{K_n}(f)$ є залишковою в X, тобто доповнення $X \backslash X_{K_n}(f)$ є множиною першої категорії в X. Але

$$U \backslash U_{K_n}(g) \subseteq U \backslash (X_{K_n}(f) \cap U) =$$

$$= U \backslash X_{K_n}(f) \subseteq X \backslash X_{K_n}(f),$$

отже, і $U \backslash U_{K_n}(g)$ – це множина першої категорії в X. Але множина U відкрита в X і $U \backslash U_{K_n}(g) \subseteq U$, тому різниця $U \backslash U_{K_n}(g)$ буде множиною першої категорії і в підпросторі U, а значить, множина $U_{K_n}(g)$ буде залишковою в U. З відкритості U і V легко вивести, що звуження g буде теж горизонтально квазінеперервною функцією як і f. Таким чином, $g \in K_h\widetilde{K_n}(U \times V, Z)$ і тим більше $g \in S_h\widetilde{S_n}(U \times V, Z)$. Відкритий підпростір U берівського простору X сам буде берівським простором, а відкритий підпростір V простору Y з не більш, ніж зліченною псевдобазою сам буде мати не більш, ніж зліченну псевдобазу. Тому ми можемо застосовувати твердження (i), згідно з яким $g \in S_n(U \times V, Z)$, зокрема, g буде майже ледь неперервним у точці p_0, що й треба було довести.

(iv). Нехай $f \in K_h\widetilde{K}(X \times Y, Z)$ і $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Доведемо, що відображення f квазінеперервне в точці p_0. Нехай U – відкритий окіл точки x_0 в X і V – відкритий окіл точки y_0 в Y. Для доведення квазінеперервності відображення f у точці p_0 досить показати, що його звуження $g = f|_{U \times V}$ буде ледь неперервним у точці p_0. Легко перевірити, що $g \in K_h\widetilde{K}(U \times V, Z)$, а значить, і $g \in S_h\widetilde{S}(U \times V, Z)$. З твердження (ii) випливає, що відображення g змішано майже ледь неперервне. Оскільки воно ще й горизонтально неперервне, то за лемою 4 g буде ледь неперервним відображенням, зокрема, буде таким і в точці p_0, що й треба було довести.

5. Відповідь на одне питання Ванксо. У праці [3] О.Ванксо довів, що включення $SS(X \times Y, Z) \subseteq S_n(X \times Y, Z)$ виконується, коли X – берівський простір, Y – топологічний простір з другою аксіомою зліченності і Z – метризовний простір. Зрозуміло, що цей результат легко вивести з тверджень (i) чи (ii) теореми 1. Тут же він поставив питання: чи має місце вказане включення, коли X – берівський простір, Y – сепарабельний простір з першою аксіомою зліченності і Z – регулярний простір? Сам автор висловив припущення, що відповідь на це питання негативна. Насправді ж це не так, що ми й встановимо у даному пункті. Для доведення буде потрібна

Лема 5. Нехай X – сепарабельний топологічний простір з першою аксіомою зліченності. Тоді X має не більш, ніж зліченну псевдобазу.

Доведення. Нехай $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ – не більш, ніж зліченна всюди щільна в X множина. Для кожного номера n існує не більш, ніж зліченна база $\mathcal{U}_n = \{U_{n,k} : k \in \mathbb{N}\}$ відкритих околів точки a_n. Легко перевірити, що не більш, ніж зліченна система $\mathcal{U} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n = \{U_{n,k} : (n,k) \in \mathbb{N}^2\}$ відкритих непорожніх в X множин буде псевдобазою простору X. Справді, нехай G – відкрита непорожня множина в X. Оскільки $\overline{A} = X$, то існує такий номер n, що $a_n \in G$. Але G – це окіл точки a_n, тому існує такий номер k, що $U_{n,k} \subseteq G$. Це і показує, що $\mathcal{U}$ – псевдобаза в X.

Звідси легко виводиться результат, який дає позитивну відповідь на питання Ванксо.

Теорема 2. Нехай X – берівський простір, Y – сепарабельний топологічний простір з першою аксіомою зліченності, Z – довільний топологічний простір. Тоді

$$S_h\widetilde{S_n}(X \times Y, Z) \subseteq S_n(X \times Y, Z)$$

і

$$S_h\widetilde{S}(X \times Y, Z) \subseteq P_{ns}(X \times Y, Z).$$

Доведення. Це негайно випливає з леми 5 і тверджень (i) та (ii) теореми 1.

Оскільки

$$SS(X\times Y, Z) \subseteq S_h\widetilde{S_n}(X\times Y, Z) \subseteq S_h\widetilde{S}(X\times Y, Z)$$

і $P_{ns}(X \times Y, Z) \subseteq S_n(X \times Y, Z)$,

то з теореми 2 випливає, що відповідь на питання Ванксо позитивна.

З теореми 1 випливають всі результати праць [2 - 5], що дають відповідь на проблему Пьотровського і суміжні питання.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Piotrowski Z.* A survey of results concerning generalized continuity of topological spaces // Acta Math. Univ. Comen. – 1987 -1988. – **52-53.** – P. 91-110.
2. *Borsik J.* On almost quasicontinuous functions // Math. Bohemica. – 1993. – **118**, №3. – P. 241-248.
3. *Vancso O.* On jointly somewhat nearly continuous functions // Acta Math. Univ. Comenianae. – 1994. – **63**, №2. – P. 241-245.
4. *Вітренко О. В., Маслюченко В. К.* Про нарізно ледь неперервні функції // Мат. студії. – 1996. – **6.** – C. 113-118.
5. *Маслюченко В. К.* Про нарізні і сукупні модифікації неперервності // Мат. студії. – 2006. – **25**, №2. – C. 213-218.
6. *Ровенко Н.* Про одну проблему Ванксо // Матеріали студ. конференції. – ЧНУ. – 2012. – с. 357-358.
7. *Ровенко Н.* Узагальнення деяких результатів про зв'язки між нарізними і сукупними аналогами неперервності // Матеріали студ. конференції. – ЧНУ. – 2013. – с. 469-470.
8. *Маслюченко В., Ровенко Н.* Модифікації теорем про зв'язки між нарізними і сукупними аналогами неперервності // International Conference.Complex Analysis and Related Topics. – ЛНУ. – 2013. – P. 104-105.