УДК 515.12, 517.51

©2014 р. О.Д. Мироник

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ДО ПИТАННЯ ПРО НЕПЕРЕРВНІСТЬ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В ПЛОЩИНІ СІДРА

Отримано теореми про квазінеперервність та сукупну неперервність нарізно неперервних відображень $f : X_1 \times ... \times X_n \to \mathbb{M}$ зі значеннями в площині Сідра $\mathbb{M}$.

We obtain results on the quasi-continuity and joint continuity of separately continuous mappings $f : X_1 \times ... \times X_n \to \mathbb{M}$ with values in the Ceder plane $\mathbb{M}$.

1. Вступ. В останні роки активно ведуться дослідження множини $C(f)$ точок неперервності нарізно неперервних відображень зі значеннями в просторах близьких до метризовних (див. [1] і вказану там літературу). Одним із класів таких просторів є клас вичерпних просторів, який був уведений Дж.Сідром в [2] під назвою M_3-простори. Там же був наведений приклад вичерпного неметризовного простору – так звана площина Сідра $\mathbb{M}$. В праці [3] були вивчені деякі властивості простору $\mathbb{M}$, а також досліджено множину точок неперервності $C(f)$ нарізно неперервних відображень $f : X_1 \times ... \times X_n \to \mathbb{M}$, визначених на добутку зв'язних топологічних просторів. Крім того, в [4] було показано, що у кожної квазінеперервної функції $f : X \to \mathbb{M}$ множина $C(f)$ залишкова в X, а також була досліджена множина $C(f)$ для KC-функцій $f : X \times Y \to \mathbb{M}$, які квазінеперервні відносно першої змінної і неперервні відносно другої змінної. Ці результати було анонсовано в [5]. Оскільки нарізно неперервні відображення часто виявляються квазінеперервними, то природно виникло питання про квазінеперервність нарізно неперервних відображень зі значеннями в площині Сідра. Це питання ми досліджуємо в даній роботі. Разом з тим з допомогою техніки, розробленої в [6, 7], ми отримуємо тут нові результати про сукупну неперервність нарізно неперервних відображень $f : X_1 \times ... \times X_n \to \mathbb{M}$, у яких зв'язність вимагається лише від останнього простору X_n.

2. Квазінеперервність нарізно неперервних відображень зі значеннями в цілком регулярних просторах. Функція $f : X \to Y$ називається *квазінеперервною в точці* x_0, якщо для довільного околу V точки $y_0 = f(x_0)$ у просторі Y і для довільного околу U точки x_0 в X існує така відкрита непорожня множина G в просторі X, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$, і просто *квазінеперервною*, якщо вона є такою у кожній точці простору X.

Теорема 1. *Нехай X – топологічний простір, Y – цілком регулярний топологічний простір і $x_0 \in X$. Відображення $f : X \to Y$ буде квазінеперервним в точці x_0, тоді і тільки тоді, коли для довільної неперервної функції $g : Y \to \mathbb{R}$ композиція $h = g \circ f : X \to \mathbb{R}$ – це квазінеперервна в точці x_0 функція.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай f – квазінеперервне в точці x_0 відображення, $y_0 = f(x_0)$ і $g : Y \to \mathbb{R}$ – довільна неперервна функція. Доведемо, що h – квазінеперервна в точці x_0 функція. Нехай W – довільний окіл точки $z_0 = h(x_0) = g(f(x_0)) = g(y_0)$ в $\mathbb{R}$. З неперервності функції g в точці y_0, випливає, що існує окіл V точки y_0 в Y, такий, що $g(V) \subseteq W$. Нехай U – довільний окіл точки x_0 в X, з квазінеперервності функції f в точці x_0 випливає, що існує відкрита непорожня множина G в просторі X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$. В такому разі, $h(G) = g(f(G)) \subseteq g(V) \subseteq W$. Отже, функція h квазінеперервна в точці x_0.

Достатність. Припустимо, що f не є

квазінеперервною в точці x_0. Доведемо, що існує неперервна функція $g_0 : Y \to [0,1]$, така, що $h_0 = g_0 \circ f$ не буде квазінеперервною в точці x_0. Нехай існують околи U та V точок x_0 та y_0 в просторах X та Y відповідно, такі, що для довільної відкритої непорожньої множини G в просторі X, такої, що $G \subseteq U$, образ $f(G) \nsubseteq V$. З того, що простір Y цілком регулярний, маємо, що існує неперервна функція $g_0 : Y \to [0,1]$, така, що $g_0(y_0) = 0$ і $g_0(y) = 1$ на $Y \setminus V$. Покажемо, що $h_0 = g_0 \circ f$ не є квазінеперервною в точці x_0. Нехай G – довільна відкрита непорожня множина, така, що $G \subseteq U$. За побудовою, $f(G) \nsubseteq V$, отже існує точка $x \in G$, така, що $f(x) \notin V$. Тоді $h_0(x) = g_0(f(x)) = 1$, а $h_0(x_0) = g_0(f(x_0)) = g_0(y_0) = 0$. Розглянемо окіл $W = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ точки $h_0(x_0) = 0$ в $\mathbb{R}$. За доведеним, для довільної відкритої непорожньої множини G, такої, що $G \subseteq U$ існує точка $x \in G$, така, що $h_0(x) = 1 \notin W$. Отже, функція h_0 не є квазінеперервною в точці x_0. Отримана суперечність доводить достатність вказаної умови.

Загальніший від теореми 1 результат для $\mathcal{A}$-неперервних відображень був встановлений у праці [8]. Ми тут дали доведення для квазінеперервних функцій для повноти викладу.

3. Деякі властивості добутків топологічних просторів. Тут ми встановимо теореми про беровість та наявність зліченної псевдобази добутків n просторів.

Нагадаємо, що система $\mathcal{V}$ відкритих множин називається *псевдобазою* топологічного простору X, якщо для кожної непорожньої відкритої в X множини G існує такий елемент $V \in \mathcal{V}$, що $V \neq \varnothing$ і $V \subseteq G$. Ми кажемо, що *простір X має зліченну псевдобазу*, якщо існує така послідовність $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ відкритих множин в X, що система $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ є псевдобазою в X.

Нам буде потрібний один результат про беровість добутку з [7].

Теорема 2. *Нехай X і Y – берівські простори і Y має зліченну псевдобазу. Тоді і добуток $P = X \times Y$ є берівським.*

Цю теорему можна узагальнити.

Теорема 3. *Нехай X_1 – берівський простір, $X_2, ..., X_{n+1}$ – берівські простори зі зліченною псевдобазою. Тоді і добуток $P = X_1 \times ... \times X_{n+1}$ є берівським.*

Доведення. Застосуємо індукцію відносно n. При $n = 1$ – це теорема 2. Для доведення теореми при $n = 2$, покладемо $X = X_1 \times X_2$ і $Y = X_3$. За теоремою 2 простір X берівський, отже, таким буде і $X \times Y = X_1 \times X_2 \times X_3$. Припустимо тепер, що твердження теореми вірне для добутку n просторів і доведемо, що вона має місце і для $n+1$ множників. Для цього досить покласти $X = X_1 \times ... \times X_n$ і $Y = X_{n+1}$. За припущенням простір X берівський, тому за теоремою 2 простір $X \times Y = X_1 \times ... \times X_{n+1}$ також буде берівським.

Теорема 4. *Добуток $X_1 \times ... \times X_n$ просторів зі зліченною псевдобазою залишається простором зі зліченною псевдобазою.*

Доведення. Перевіримо, що твердження теореми вірне для добутку двох просторів. Нехай $X = X_1$, $Y = X_2$, $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ і $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобази в просторах X та Y відповідно. Розглянемо систему $\mathcal{W}$, що складається з усеможливих добутків $W_{m,n} = U_m \times V_n$, і доведемо, що $\mathcal{W}$ – зліченна псевдобаза в $X \times Y$. Нехай W – довільна відкрита непорожня в $X \times Y$ множина. За означенням топології добутку існують відкриті непорожні множини U та V в просторах X та Y відповідно, такі, що $U \times V \subseteq W$. Крім того, знайдуться непорожні множини U_m та V_n з відповідних псевдобаз, такі, що $U_m \subseteq U$ та $V_n \subseteq V$. В такому разі $W_{m,n} = U_m \times V_n \subseteq U \times V \subseteq W$, а отже, система $\mathcal{W}$ – псевдобаза в $X \times Y$. Зліченність її випливає з того, що подвійну послідовність легко перенумерувати у просту наступним чином: $W_1 = W_{1,1}$, $W_2 = W_{2,1}$, $W_3 = W_{2,2}$, $W_4 = W_{3,1}$, $W_5 = W_{3,2}, ...$.

Припустимо тепер, що теорема вірна для добутку n просторів і перевіримо для $n+1$. Покладемо $X = X_1 \times ... \times X_n$ і $Y = X_{n+1}$. За припущенням X – простір зі зліченною псевдобазою, тому за доведеним для добутку двох просторів $X \times Y = X_1 \times ... \times X_{n+1}$ – простір зі зліченною псевдобазою.

4. Квазінеперервність KC-функцій зі значеннями в цілком регулярному

просторі. Ми будемо використовувати такі позначення. Для функції $f : X \times Y \to Z$ і точки $p = (x, y) \in X \times Y$ покладемо $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$.

Функція $f : X \times Y \to Z$ називається KC-*функцією*, якщо для кожного $x \in X$ функція $f^x : Y \to Z$ неперервна і для кожного $y \in Y$ функція $f_y : X \to Z$ квазінеперервна. Сукупність усіх таких функцій ми позначаємо символом $KC(X \times Y, Z)$.

Нам знадобиться теорема, яка випливає з результатів праці [6].

Теорема 5. *Нехай X і Y – топологічні простори, причому Y задовольняє першу аксіому зліченності, Z – метризовний простір і $f \in KC(X \times Y, Z)$. Тоді для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ залишкова в X.*

З неї легко виводиться

Теорема 6. *Нехай X – берівський простір, Y – топологічний простір, що задовольняє першу аксіому зліченності, Z – цілком регулярний простір і $f : X \times Y \to Z$ – KC-функція. Тоді f – квазінеперервна функція.*

Доведення. Нехай $g : Z \to \mathbb{R}$ – неперервна функція і $h = g \circ f$. Доведемо, що $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ – це квазінеперервна функція.

Нехай $p_0 = (x_0, y_0)$ – довільна точка з $X \times Y$. Доведемо, що h квазінеперервна в точці p_0. Зауважимо, що $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ – це теж KC-функція. Справді, для кожного $x \in X$ функція $h^x = g \circ f^x$ є неперервною, як композиція двох неперервних функцій і для кожного $y \in Y$ функція $h_y = g \circ f_y$ є квазінеперервною за доведеним у пункті 2. За теоремою 5 множина $C_{y_0}(h)$ залишкова в X, адже h набуває значень у метризовному просторі $\mathbb{R}$. Оскільки простір X берівський, то кожна залишкова множина в ньому є всюди щільною, а отже, $\overline{C_{y_0}(h)} = X$.

Нехай $\varepsilon > 0$, U – довільний окіл точки x_0 в X, V – довільний окіл точки y_0 в Y і $O = U \times V$ – базисний окіл точки p_0 в $X \times Y$. Оскільки функція $h_{y_0} : X \to \mathbb{R}$ квазінеперервна в точці x_0, то існує така відкрита непорожня множина U_1 в X, що $U_1 \subseteq U$ і $|h_{y_0}(x) - h_{y_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$, як тільки $x \in U_1$. Множина $C_{y_0}(h)$ всюди щільна в X, тому $C_{y_0}(h) \cap U_1 \neq \varnothing$. Отже, існує точка $x_1 \in U_1 \cap C_{y_0}(h)$. В такому разі, $p_1 = (x_1, y_0) \in C(h)$ і $x_1 \in U_1$. З неперервності функції h в точці p_1 випливає, що існують такі відкриті околи U_0 і V_0 точок x_1 і y_0 в просторах X і Y відповідно, що $U_0 \subseteq U_1$, $V_0 \subseteq V$ і $|h(p) - h(p_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$ на множині $O_0 = U_0 \times V_0$. Тоді $O_0 \subseteq O$, множина O_0 відкрита і непорожня в $X \times Y$ і для довільної точки $p = (x, y) \in O_0$ будемо мати

$$|h(p) - h(p_0)| = |h(p) - h(p_1) + h(p_1) - h(p_0)| \leq$$
$$\leq |h(p) - h(p_1)| + |h(p_1) - h(p_0)| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + |h_{y_0}(x_1) - h_{y_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

бо $x_1 \in U_1$. Це й дає нам квазінеперервність функції h в точці p_0. Тоді за теоремою 1 функція f квазінеперервна в точці p_0.

5. Квазінеперервність нарізно неперервних функцій багатьох змінних зі значеннями в площині Сідра. *Площиною Сідра* $\mathbb{M}$ ми називаємо топологічний простір, що складається з точок півплощини $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$, топологічна структура на якому вводиться так: множина W буде околом точки $p = (x, y)$ з $y > 0$ в $\mathbb{M}$, якщо існує таке $\varepsilon \in (0, y)$, що $W_\varepsilon(p) = \{x\} \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subseteq W$, і околом точки $p = (x, 0)$ в $\mathbb{M}$, якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що $W_\varepsilon(p) = ((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times [0, \varepsilon)) \setminus (\{x\} \times (0, \varepsilon)) \subseteq W$.

Наступна теорема є наслідком теореми 6.

Теорема 7. *Нехай X – берівський простір, Y – топологічний простір, що задовольняє першу аксіому зліченності і $f : X \times Y \to \mathbb{M}$ – KC-функція. Тоді f – квазінеперервна функція.*

Доведення. Площина Сідра $\mathbb{M}$ – гаусдорфовий і вичерпний простір, а значить нормальний [9]. Тому $\mathbb{M}$ – цілком регулярний простір. Отже, за теоремою 6 функція $f : X \times Y \to \mathbb{M}$ є квазінеперервною.

Теорема 8. *Нехай X_1 – берівський простір, $X_2, ..., X_{n+1}$ – берівські простори зі зліченною псевдобазою і першою аксіомою зліченності і $f : X_1 \times ... \times X_{n+1} \to \mathbb{M}$ – нарізно неперервне відображення. Тоді f квазінеперервне.*

Доведення. Застосуємо індукцію відносно n. Для $n=1$ твердження теореми випливає з теореми 7, адже довільна нарізно неперервна функція є KC-функцією. Припустимо, що твердження теореми вірне для добутку n просторів і доведемо, що воно виконується і для $n+1$ множників. Покладемо $X = X_1 \times ... \times X_n$ і $Y = X_{n+1}$. Зауважимо, що за теоремою 3 простір X є берівським. Для довільного $y_0 \in Y$ розглянемо відображення $f_{y_0} : X \to \mathbb{M}$. За індуктивним припущенням воно є квазінеперервним. Але для довільного $x_0 \in X$ відображення $f^{x_0} : Y \to \mathbb{M}$ є неперервним, отже f – це KC-функція. Таким чином, згідно з теоремою 7 функція $f : X \times Y \to \mathbb{M}$ є квазінеперервною.

6. Сукупна неперервність нарізно неперервних функцій багатьох змінних зі значеннями в площині Сідра.

Для встановлення основного результату даної роботи нам буде потрібний спрощений варіант одного результату з $[4, 5]$.

Теорема 9. *Нехай X – топологічний простір зі зліченною псевдобазою, Y – зв'язний берівський простір і $f : X \times Y \to \mathbb{M}$ – KC-функція. Тоді*

(i) якщо Y задовольняє першу аксіому зліченності, то для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ залишкова в X;

(ii) якщо Y задовольняє другу аксіому зліченності, то множина $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$ залишкова в X.

Теорема 10. *Нехай X_1 – берівський простір зі зліченною псевдобазою, $X_2, ..., X_n$ – берівські простори зі зліченною псевдобазою, що задовольняють першу аксіому зліченності, X_{n+1} – зв'язний берівський простір, $f : X_1 \times ... \times X_{n+1} \to \mathbb{M}$ – нарізно неперервне відображення, $X = X_1 \times ... \times X_n$ і $Y = X_{n+1}$. Тоді*

(i) якщо Y задовольняє першу аксіому зліченності, то для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ залишкова в X;

(ii) якщо Y задовольняє другу аксіому зліченності, то множина $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$ залишкова в X.

Доведення. За теоремою 8 для кожного $y \in Y$ відображення $f_y : X \to \mathbb{M}$ буде квазінеперервним. Крім того, за умовою для кожного $x \in X$ відображення $f^x : Y \to \mathbb{M}$ є неперервним. Тому $f : X \times Y \to \mathbb{M}$ – це KC -функція. Зауважимо, що за теоремою 4 добуток $X = X_1 \times ... \times X_n$ є простором з не більш ніж зліченною псевдобазою. Залишилось скористатить теоремою 9.

Висловлюю щиру вдячність Маслюченку Володимиру Кириловичу за допомогу та постійну увагу при написанні цієї статті.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Маслюченко В., Мироник О.* Сукупна неперервність відображень зі значеннями у різних узагальненнях метризовних просторів // Всеукр. наук. конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(20 - 26 лютого 2012 р.). Тези доповідей. – Ів.-Франківськ: Прик. нац. ун-т, 2012. – С. 5-6.

2. *Ceder J.* Some generalizations of metric spaces // Pacif. J. Math. – 1961.–**11**. – P. 105-126.

3. *Мироник О.Д.* Про нарізно неперервні відображення зі значеннями в площині Сідра // Бук. мат. журн. – 2013. – **1**, №3-4. – С. 100-105.

4. *Маслюченко В.К., Мироник О.Д.* Про неперервність KC-функцій зі значеннями в площині Сідра // Карпатські математичні публікації. (у друці)

5. *Маслюченко В., Мироник О.* KC-функції зі значеннями у площині Сідра // Всеукр. наук. конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(24 лютого - 2 березня 2014 р.). Тези доповідей. – Ів.-Франківськ: Прик. нац. ун-т, 2014. – С. 73-76.

6. *Маслюченко В.К.* Простори Гана і задача Діні // Мат. методи і фіз-мех. поля. – 1998. – **41**, №4. – С. 39-45.

7. *Маслюченко В.К.* Нарізно неперервні відображення і простори Кете. Дис. ... доктора фіз.-мат. наук. – Чернівці, 1999. – 345с.

8. *Маслюченко В.К.* Про нарізні і сукупні модифікації неперервності // Мат. студії. – 2006. – **25**, №2. – С. 213–218.

9. *Borges C.* On stratifiable spaces // Pacif. J. Math. – 1966.–**17**, N1. – P. 1-16.