УДК 517.51

©2014 р. В.В. Нестеренко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ РІЗНИХ ОСЛАБЛЕНЬ НЕПЕРЕРВНОСТІ З ДОПОМОГОЮ ЗАМИКАННЯ

Встановлено зв'язок між двома загальними поняттями ослабленної неперервності. Досліджуються характеризації деяких ослаблень неперервності в термінах замикання. Зокрема встановлено, що відображення f є майже неперервним тоді і тільки тоді, коли $f(\overline{intA}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини A.

We study the relationship between two general concepts weakening of the continuity We study the characterization of various weakening of the continuity in terms of the closure. In particular, it is shown that a mapping f is almost continuous if and only if $f(\overline{intA}) \subseteq \overline{f(A)}$ for any set A.

1. Вступ. Ця стаття є продовженням досліджень, які були розпочаті в праці [1], де було отримано характеризації різних ослаблень неперервності в термінах замикання образу. Там же була дана загальна властивість відображень $f : X \to Y$ між двома топологічними просторами, яка отримала назву $\mathcal{A}$-неперервність. Так сталося, що в роботі [2] під терміном $\mathcal{A}$-неперервність розуміють зовсім іншу властивість відображень. Тому $\mathcal{A}$-неперервність з [1] ми будемо тут називати неперервністю відносно системи $\mathcal{A}$.

В цій роботі буде встановлено зв'язок між двома типами неперервності з [1] і [2], а також одержано нові характеризаційні теореми для квазінеперервності, майже неперервності, α-неперервності та майже квазінеперервності.

2. Спряженість системи з сім'єю. Через $intA$ і $\overline{A}$ ми будемо позначати внутрішність та замикання підмножини A в деякому топологічному просторі. Нехай X – топологічний простір, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x\in X}$ – сім'я непорожніх систем $\mathcal{A}_x \subseteq 2^X$ і $\mathcal{B}$ – деяка система в X. Системи $\mathcal{B}$ називається *спряженою з сім'ю* $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x\in X}$, якщо виконуються наступні дві умови:

1) для кожної множина $B \in \mathcal{B}$, кожної точки $x \in \overline{B} \setminus B$ і для кожної множини $A \in \mathcal{A}_x$ маємо, що $A \cap B \neq \varnothing$;

2) для кожної точки $x \in X$ і довільної сім'ї $(C_A)_{A\in\mathcal{A}_x}$ підмножин C_A простору X, такої, що $A \setminus C_A \notin \mathcal{A}_x$ для кожного $A \in \mathcal{A}_x$, існує сім'я $(B_A)_{A\in\mathcal{A}_x}$ підмножин B_A простору X, така, що $B_A \subseteq C_A$ для кожного $A \in \mathcal{A}_x$, $B = \bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}_x} B_A \in \mathcal{B}$ і $x \in \overline{B}$.

Розглянемо приклади систем, які спряжені з деякими сім'ями.

Приклад 1. Нехай X – довільний топологічний простір, $\mathcal{U}_x$ – система всіх околів точки x в X і $\mathcal{B} = 2^X$. Покажемо, що система $\mathcal{B}$ спряжена з сімє'ю $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_x)_{x\in X}$.

Нехай $B \in \mathcal{B}$, $x \in \overline{B} \setminus B$ і U – окіл точки x. Оскільки $x \in \overline{B}$, то $U \cap B \neq \varnothing$. Отже, умова 1) виконується.

Перевіримо, що виконується умова 2). Нехай $x \in X$ і $(C_U)_{U\in\mathcal{U}_x}$ – така сім'я множин $C_U \in 2^X$, що $U \setminus C_U \notin \mathcal{U}_x$ для кожного $U \in \mathcal{U}_x$.

Нехай $U \in \mathcal{U}_x$. Покладемо $B_U = C_U$. Оскільки $U \setminus B_U$ – не є околом точки x, то $x \in \overline{B_U}$. Справді, якби $x \notin \overline{B_U}$, то відкрита множина $U_0 = X \setminus \overline{B_U}$ була б околом точки x, для якого $U_0 \cap B_U = \varnothing$. Але тоді $U \setminus B_U$ – це окіл точки x, що неможливо.

Таким чином, $x \in \overline{B_U}$ для кожного $U \in \mathcal{U}_x$, а значить,

$$x \in \bigcap_{U\in\mathcal{U}_x} \overline{B_U} \subseteq \overline{\bigcup_{U\in\mathcal{U}_x} B_U}.$$

Крім того, зрозуміло, що $\bigcup\limits_{U\in\mathcal{U}_x} B_U \in \mathcal{B}$.

Приклад 2. Нехай X – довільний топологічний простір, для кожного $x \in X$ система $\mathcal{A}_x$ – це система $\mathcal{G}$ всіх непорожніх відкритих підмножин в X і $\mathcal{B}$ – система всіх всюди щільних підмножин в X. Покажемо, що система $\mathcal{B}$ спряжена з сім'єю $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x\in X}$.

Нехай $B \in \mathcal{B}$, $x \in \overline{B} \setminus B$ і G – відкрита непорожня множина в X. Оскільки множина B всюди щільна, то $B \cap G \neq \varnothing$. Отже, умова 1) виконується.

Нехай $x \in X$ і кожній множині G з $\mathcal{G}$ співставлено множину $C_G \in 2^X$, таку, що $G \setminus C_G \notin \mathcal{G}$. Покладемо $B_G = C_G$ для кожного $G \in \mathcal{G}$ і $B = \bigcup\limits_{G\in\mathcal{G}} B_G$. Оскільки $G \setminus B_G = G \setminus C_G \neq G$, то $G \cap B_G \neq \varnothing$ для кожної непорожньої відкритої множини G. Тому множина B всюди щільна в X, тобто $B \in \mathcal{B}$. Крім того, з всюди щільності множини B випливає, що $x \in \overline{B}$. Отже, і умова 2) виконується.

3. Зв'язок між $\mathcal{A}$-неперервністю та неперервністю відносно системи множин. Нехай X та Y – топологічні простори, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x\in X}$ – сім'я непорожніх систем $\mathcal{A}_x \subseteq 2^X$ і $\mathcal{B}$ – деяка система в X. Відображення $f : X \to Y$ називається *$\mathcal{A}$-неперервним в точці* $x \in X$, якщо для довільного околу V точки $f(x)$ в Y існує множина $A \in \mathcal{A}_x$, така, що $f(A) \subseteq V$. Відображення f називається *$\mathcal{A}$-неперервним*, якщо воно є таким в кожній точці $x \in X$. Відображення $f : X \to Y$ називається *неперервним відносно системи* $\mathcal{B}$, якщо

$$f(\overline{B}) \subseteq \overline{f(B)}$$

для кожного $B \in \mathcal{B}$.

Теорема 1. *Нехай X та Y – топологічні простори, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x\in X}$ – сім'я непорожніх систем $\mathcal{A}_x \subseteq 2^X$ і $\mathcal{B}$ – система в X, яка спряжена з сім'єю $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x\in X}$. Відображення $f : X \to Y$ є $\mathcal{A}$-неперервним тоді і тільки тоді, коли f неперервним відносно системи $\mathcal{B}$.*

Доведення. Нехай відображення $f : X \to Y$ – $\mathcal{A}$-неперервне, $B \in \mathcal{B}$, $y \in f(\overline{B})$ і V – окіл точки x в X. Розглянемо точку $x \in \overline{B}$, таку, що $f(x) = y$. Будемо вважати, що $x \in \overline{B} \setminus B$. З $\mathcal{A}$-неперервності відображення f в точці x випливає, що існує множина $A \in \mathcal{A}_x$, така, що $f(A) \subseteq V$. Оскільки система $\mathcal{B}$ спряжена з сім'ю $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x\in X}$, то з умови 1) маємо, що $A \cap B \neq \varnothing$. Тоді $f(B) \cap V \neq \varnothing$ і тому $y \in \overline{f(B)}$. Отже, відображення f є неперервним відносно системи $\mathcal{B}$.

Навпаки, нехай відображення f є неперервним відносно системи $\mathcal{B}$. Припустимо, що відображення f не є $\mathcal{A}$-неперервним в деякій точці $x_0 \in X$. Це означає, що існує відкритий окіл V точки $f(x_0)$ в Y, такий, що для довільної множини $A \in \mathcal{A}_{x_0}$ маємо, що $f(A) \not\subseteq V$. Для кожного $A \in \mathcal{A}_{x_0}$ покладемо $C_A = A \setminus f^{-1}(V)$. Оскільки $A \setminus C_A = A \cap f^{-1}(V)$, то $f(A \setminus C_A) \subseteq V$, отже, $A \setminus C_A \notin \mathcal{A}_{x_0}$. Оскільки система $\mathcal{B}$ спряжена з сім'ю $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x\in X}$, то з умови 2) випливає, що для кожної множини $A \in \mathcal{A}_{x_0}$ існує множина $B_A \subseteq C_A$, така, що $B = \bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}_{x_0}} B_A \in \mathcal{B}$ і $x_0 \in \overline{B}$. Скориставшись неперервність відносно системи $\mathcal{B}$ відображення f отримаємо, що

$$f(x_0) \in f(\overline{B}) \subseteq \overline{f(B)} = \overline{f(\bigcup_{A\in\mathcal{A}_{x_0}} B_A)} \subseteq$$

$$\subseteq \overline{f(\bigcup_{A\in\mathcal{A}_{x_0}} C_A)} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V.$$

Одержали суперечність. Отже, відображення f є $\mathcal{A}$-неперервне.

Наступний наслідок теореми 1 – це добре відоме твердження.

Наслідок 1. *Нехай X та Y – топологічні простори. Відображення $f : X \to Y$ неперервне тоді і тільки тоді, коли*

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

для $A \in 2^X$.

Доведення. Відображення $f : X \to Y$ неперервне тоді і тільки тоді, коли воно $\mathcal{A}$-неперервне, де $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x\in X}$ і $\mathcal{A}_x = \mathcal{U}_x$ – система всіх околів точки x в X. З прикладу 1 випливає, що система $\mathcal{B} = 2^X$ є спряженою з сім'єю $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x\in X}$. Згідно з теоремою 1 відображення f неперервне відносно системи $\mathcal{B}$. Тому

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

для $A \in 2^X$.

Ще один наслідок теореми 1 отриманий в праці [1].

Наслідок 2. *Нехай X та Y – топологічні простори. Відображення $f : X \to Y$ ледь неперервне тоді і тільки тоді, коли*

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

для довільної всюди щільної множини A в X.

Доведення. Відображення $f : X \to Y$ ледь неперервне тоді і тільки тоді, коли воно $\mathcal{A}$-неперервне і $\mathcal{A}_x = \mathcal{G}$ – система всіх непорожніх відкритих множин в X для кожного $x \in X$. З прикладу 2 випливає, що система $\mathcal{B}$ всіх всюди щільних підмножин в X є спряженою з сім'єю $\mathcal{A}$. З теореми 1 випливає, що відображення f буде ледь неперервним тоді і тільки тоді, коли воно буде неперервним відносно системи $\mathcal{B}$, тобто коли

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

для довільної всюди щільної множини A в X.

4. Квазінеперервність. Далі ми перейдемо до встановлення характеризаційних теорем деяких типів ослабленної неперервності.

Нехай X і Y – топологічні простори. Відображення $f : X \to Y$ називається *квазінеперервним у точці* $x \in X$ [3, 4], якщо для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y і для кожного околу U точки x в X існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$ і просто *квазінеперервним*, якщо воно є таким у кожній точці.

Лема 1. *Нехай X і Y – топологічні простори. Якщо відображення $f : X \to Y$ не є квазінеперервним в точці $x_0 \in X$, то існують відкриті околи U і V точок x_0 і $f(x_0)$ в просторах X і Y відповідно та щільна в U множина A, така, що $f(A) \subseteq Y \setminus V$.*

Доведення. Оскільки відображення f не є квазінеперервним в точці x_0, то існують відкриті околи U і V точок x_0 і $f(x_0)$ в просторах X і Y відповідно, такі, що для кожної відкритої непорожньої множини $G \subseteq U$ існує точка $x_G \in G$, така, що $f(x_G) \in Y \setminus V$. Покладемо $A = \{x_G : G$ – відкрита непорожня підмножина в $U\}$. Тоді множина A щільна в U і $f(A) \subseteq Y \setminus V$.

Теорема 2. *Нехай X і Y – топологічні простори. Відображення $f : X \to Y$ – квазінеперервне тоді і тільки тоді, коли $f(int\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної підмножини $A \subseteq X$.*

Доведення. Нехай відображення f квазінеперервне і $A \subseteq X$. Розглянемо довільну точку $y \in f(int\overline{A})$ і її окіл V в Y. Нехай точка $x \in int\overline{A}$, така, що $f(x) = y$. Множина $U = int\overline{A}$ є околом точки x в X і тому з квазінеперервності відображення f випливає, що існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$. Оскільки $G \subseteq \overline{A}$, бо $U \subseteq \overline{A}$, і множина G відкрита, то $G \subseteq \overline{G \cap A}$, але $G \neq \varnothing$, отже, і $G \cap A \neq \varnothing$. Але $f(G \cap A) \subseteq V$ і значить, $f(A) \cap V \neq \varnothing$. Отже, $y \in \overline{f(A)}$.

Навпаки, нехай $f(int\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної підмножини $A \subseteq X$. Припустимо, що відображення f не є квазінеперервним в деякій точці $x_0 \in X$. Згідно з лемою 1 існують відкриті околи U і V точок x_0 і $f(x_0)$ в просторах X і Y відповідно та щільна в U множина A, така, що $f(A) \subseteq Y \setminus V$. Оскільки $U \subseteq \overline{A}$, то $x_0 \in U = intU \subseteq int\overline{A}$ і тому

$$f(x_0) \in f(U) = f(intU) \subseteq f(int\overline{A}) \subseteq$$

$$\subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{Y \setminus V} \subseteq Y \setminus V.$$

Одержали суперечність.

Отримана в теоремі 2 умова тісно пов'язана з відомою характеризацією квазінеперервності [9], згідно з якою відображення $f : X \to Y$ буде квазінеперервним тоді і тільки тоді, коли для довільної відкритої в X множини G і підмножини $A \subseteq X$ випливає, що $f(G) \subseteq \overline{f(A)}$.

5. Майже неперервність. Відображення $f : X \to Y$ називається *майже неперервним в точці* $x \in X$ [5], якщо для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y існує множина A в X, така, що $x \in int\overline{A}$ і $f(A) \subseteq V$. Якщо відображення f майже неперервне в кожній точці, то воно називається *майже неперервним*.

Лема 2. *Нехай X і Y – топологічні простори. Якщо відображення $f : X \to Y$ не* *є майже неперервним в точці $x_0 \in X$, то існує відкритий окіл V точки $f(x_0)$ в Y, такий, що для довільного околу U точки x_0 в X існує відкрита непорожня множина G_U в X, така, що $G_U \subseteq U$ і $f(G_U) \subseteq Y \setminus V$.*

Доведення. Оскільки відображення $f : X \to Y$ не є майже неперервним в точці $x_0 \in X$, то існує відкритий окіл V точки $f(x_0)$ в Y, такий, що для довільної множини E в X, такої, що $x_0 \in int\overline{E}$, маємо, що $f(A) \nsubseteq V$. Припустимо, що існує відкритий окіл U точки x_0, такий, що для довільної відкритої непорожньої множини G в X, існує точка $x_G \in G$, така, що $f(x_G) \in V$. Покладемо $E = \{x_G : G$ – відкрита непорожня підмножина в $U\}$. Оскільки $x_0 \in U \subseteq \overline{E}$, то $x_0 \in int\overline{E}$. Крім того, $f(E) \subseteq V$. Одержали суперечність з тим, що відображення $f : X \to Y$ не є майже неперервним в точці $x_0 \in X$. Отже, наше припущення не вірне.

Теорема 3. *Нехай X та Y – топологічні простори. Відображення $f : X \to Y$ – майже неперервне тоді і тільки тоді, коли $f(\overline{intA}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної підмножини $A \subseteq X$.*

Доведення. Нехай відображення f майже неперервне і $A \subseteq X$. Розглянемо довільну точку $y \in f(\overline{intA})$, її окіл V в Y і точку $x \in \overline{intA}$, таку, що $f(x) = y$. Оскільки відображення f майже неперервне в точці x, то існує множина E в X, така, що $x \in int\overline{E}$ і $f(E) \subseteq V$. Множина $U = int\overline{E}$ є околом точки x і тому $U \cap intA \neq \varnothing$. Оскільки $U \subseteq \overline{E}$, то $\overline{E} \cap intA \neq \varnothing$. Тому $E \cap intA \neq \varnothing$ і $E \cap A \neq \varnothing$. Звідси випливає, що $f(A) \cap V \neq \varnothing$. Отже, $y \in \overline{f(A)}$.

Навпаки, нехай $f(\overline{intA}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної підмножини $A \subseteq X$. Припустимо, що відображення f не є майже неперервним в деякій точці $x_0 \in X$. Тоді згідно з лемою 2 існує відкритий окіл V точки $f(x_0)$ в Y, такий, що для довільного околу U точки x в X існує відкрита непорожня множина G_U в X, така, що $G_U \subseteq U$ і $f(G_U) \subseteq Y \setminus V$. Покладемо $A = \bigcup\{G_U : U$ – окіл x_0 в $X\}$. Зрозуміло, що A – це відкрита множина, $x_0 \in \overline{A}$ і $f(A) \subseteq Y \setminus V$. Тоді

$$f(x_0) \in f(\overline{A}) = f(\overline{intA}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq$$

$$\subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V.$$

Одержали суперечність, адже V – це окіл точки $f(x_0)$.

6. α-неперервність. Множина A називається *α-відкритою* [6], якщо $A \subseteq int(\overline{intA})$. Легко переконатися [6, твердження 4], що множина A є α-відкритою в X тоді і тільки тоді, коли $A = U \setminus N$, де U – відкрита множина в X, а N – ніде не щільна. Відображення $f : X \to Y$ називається *α-неперервним у точці $x \in X$* [7], якщо для кожного околу V точки $f(x)$ в Y існує α-відкрита множина A в X, така, що $x \in A$ і $f(A) \subseteq V$, і просто *α-неперервним*, якщо воно є таким у кожній точці.

Лема 3. *Нехай X і Y – топологічні простори. Якщо відображення $f : X \to Y$ не є α-неперервним в точці $x_0 \in X$, то існує відкритий окіл V точки $f(x_0)$ в просторі Y, такий, що для довільного відкритого околу U точки x_0 в X існує множина E_U в X, така, що $E_U \subseteq U$, $int\overline{E_U} \neq \varnothing$ і $f(E_U) \subseteq Y \setminus V$.*

Доведення. Оскільки відображення $f : X \to Y$ не є α-неперервним в точці $x_0 \in X$, то існує відкритий окіл V точки $f(x_0)$ в Y, такий, що для довільної α-відкритої множини A в X, такої, що $x_0 \in A$, одержуємо, що $f(A) \nsubseteq V$. Припустимо, що існує відкритий околу U точки x_0 в X, такий, що множина $N = U \cap f^{-1}(Y \setminus V)$ – ніде не щільна в X. Тоді множина $E = U \setminus N$ α-відкрита і $f(E) \subseteq V$. Це суперечить тому, що відображення f не є α-неперервним в точці $x_0 \in X$. Отже, наше припущення не вірне.

Теорема 4. *Нехай X та Y – топологічні простори. Відображення $f : X \to Y$ – α-неперервне тоді і тільки тоді, коли $f(\overline{int\overline{A}}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної підмножини $A \subseteq X$.*

Доведення. Нехай відображення f α-неперервне і $A \subseteq X$. Розглянемо довільну точку $y \in f(\overline{int\overline{A}})$ і її окіл V в Y. Нехай точка $x \in \overline{int\overline{A}}$, така, що $f(x) = y$. Оскільки відображення f α-неперервне в точці x, то існує α-відкрита множина $U \setminus N$, де U – відкрита множина в X, а N – ніде не щільна, така, що $x \in U \setminus N$ і $f(U \setminus N) \subseteq V$. Зрозуміло, що $x \in U$ і тому $U \cap int\overline{A} \neq \varnothing$. Звідси випливає, що множина A десь щільна в U і тому $(U \setminus N) \cap A \neq \varnothing$. Оскільки $f(U \setminus N) \subseteq V$, то $f(A) \cap V \neq \varnothing$. Отже, $y \in \overline{f(A)}$.

Нехай $f(\overline{int\overline{A}}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної підмножини $A \subseteq X$. Припустимо тепер, що відображення f не є α-неперервним в точці $x_0 \in X$. Тоді згідно з лемою 3 існує відкритий окіл V точки $f(x_0)$ в просторі Y, такий, що для довільного відкритого околу U точки x_0 в X існує множина E_U в X, така, що $E_U \subseteq U$, $int\overline{E_U} \neq \varnothing$ і $f(E_U) \subseteq Y \setminus V$. Розглянемо множину $A = \bigcup\{E_U : U$ – окіл точки x_0 в $X\}$. Покажемо, що $x_0 \in \overline{int\overline{A}}$. Візьмемо довільний окіл G точки x_0 в X. Оскільки $E_G \subseteq A \cap G$, то $int\overline{E_G} \subseteq int\overline{A}$. З того, що $E_G \cap int\overline{E_G} \neq \varnothing$ випливає, що $G \cap int\overline{A} \neq \varnothing$. Отже, $x_0 \in \overline{int\overline{A}}$. Тоді

$$f(x_0) \in f(\overline{int\overline{A}}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq$$
$$\subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V.$$

Одержали суперечність.

7. Майже квазінеперервність. Відображення $f : X \to Y$ називається *майже квазінеперервним в точці* $x \in X$ [8], якщо для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y і для кожного околу U точки x в X існує множина A в X, така, що $\varnothing \neq int\overline{A} \subseteq U$ і $f(A) \subseteq V$, і просто *майже квазінеперервним*, якщо воно є таким в кожній точці.

Лема 4. *Нехай X і Y – топологічні простори. Якщо відображення $f : X \to Y$ не є майже квазінеперервним в точці $x_0 \in X$, то існують відкриті околи U та V точок x_0 та $f(x_0)$ в просторах X та Y відповідно і ніде не щільна в X множина N, такі, що $f(U \setminus N) \subseteq Y \setminus V$.*

Доведення. Оскільки відображення f не є майже квазінеперервним в точці $x_0 \in X$, то існують відкриті околи U та V точок x_0 та $f(x_0)$ в просторах X та Y відповідно, такі, що для довільної множини A в X, з умови $\varnothing \neq int\overline{A} \subseteq U$ випливає, що $f(A) \not\subseteq V$. Покладемо $N = U \cap f^{-1}(V)$. З того, що відображення f не є майже квазінеперервним в точці $x_0 \in X$ випливає, що множина N ніде не щільна в X. Тоді $f(U \setminus N) \subseteq Y \setminus V$.

Теорема 5. *Нехай X та Y – топологічні простори. Відображення $f : X \to Y$ – майже квазінеперервне тоді і тільки тоді, коли $f(int(\overline{intA})) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної підмножини $A \subseteq X$.*

Доведення. Нехай відображення f майже квазінеперервне і A – довільна підмножина в X, така, що $int(\overline{intA}) \neq \varnothing$. Розглянемо довільну точку $y \in f(int(\overline{intA}))$ і її окіл V в Y. Нехай точка $x \in int(\overline{intA})$, така, що $f(x) = y$. Зрозуміло, що множина $U = int(\overline{intA})$ є відкритим околом точки x в X. Оскільки відображення f майже квазінеперервне в точці x, то існує множина E в X, така, що $\varnothing \neq int\overline{E} \subseteq U$ і $f(E) \subseteq V$. Тоді $int\overline{E} \subseteq \overline{intA}$. Звідси випливає, що $G = int\overline{E} \cap intA \neq \varnothing$. Оскільки $G \cap E \neq \varnothing$ і $G \subseteq intA \subseteq A$, то $E \cap A \neq \varnothing$. Тому і $f(E) \cap f(A) \neq \varnothing$. Отже, $f(A) \cap V \neq \varnothing$ і $y \in \overline{f(A)}$.

Навпаки, нехай $f(int(\overline{intA})) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної підмножини $A \subseteq X$. Припустимо, що відображення f не є майже квазінеперервним в деякій точці $x_0 \in X$. Тоді згідно з лемою 4 існують відкриті околи U та V точок x_0 та $f(x_0)$ в просторах X та Y відповідно і ніде не щільна в X множина N, такі, що $f(U \setminus N) \subseteq Y \setminus V$. Оскільки $int(U \setminus N) = U \setminus \overline{N}$, множини N та $\overline{N}$ ніде не щільні, а множина U відкрита, то

$$\overline{int(U \setminus N)} = \overline{U \setminus \overline{N}} = \overline{U}.$$

З того, що множина U є відкритим околом точки x_0 в X випливає, що

$$x_0 \in int\overline{U} = int(\overline{int(U \setminus N)}).$$

Таким чином,

$$f(x_0) \in f(int\overline{U}) = f(int(\overline{int(U \setminus N)})) \subseteq$$
$$\subseteq \overline{f(U \setminus N)} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V.$$

Одержали суперечність.

8. Застосування. На завершення ми доведемо відомий результат про декомпозицію α-неперервності, використовуючи наведені вище характеризації α-неперервності, квазінеперервності та майже неперервності.

Теорема 6. *Нехай X та Y – топологічні простори. Відображення $f : X \to Y$ – α-неперервне тоді і тільки тоді, коли воно квазінеперервне і майже неперервне.*

Доведення. Нехай відображення f α-неперервне і A – довільна підмножина простору X. Оскільки $int\overline{A} \subseteq \overline{int\overline{A}}$, то з α-неперервності відображення f випливає, що

$$f(int\overline{A}) \subseteq f(\overline{int\overline{A}}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

З теореми 2 випливає, що відображення f квазінеперервне. Очевидно, що $\overline{intA} \subseteq \overline{int\overline{A}}$. Оскільки відображення f f α-неперервне, то

$$f(\overline{intA}) \subseteq f(\overline{int\overline{A}}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

З теореми 3 випливає, що відображення f майже неперервне.

Навпаки, нехай відображення f квазінеперервне і майже неперервне. Нехай A – довільна підмножина простору X. Зрозуміло, що $\overline{int\overline{A}} = \overline{int(int\overline{A})}$. Тоді з майже неперервності та квазінеперервності відображення f випливає, що

$$f(\overline{int\overline{A}}) = f(\overline{int(int\overline{A})}) \subseteq$$

$$\subseteq \overline{f(int\overline{A})} \subseteq \overline{\overline{f(A)}} = \overline{f(A)}.$$

З теореми 4 випливає, що відображення f α-неперервне.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Нестеренко В.В.* Нові характеризації деяких ослаблень неперервності // Буковинський математичний журнал. – 2013. – **Т.1**, № 3-4. – С. 106-113.

2. *Маслюченко О.В.* Множина точок розриву $\mathcal{A}$-неперервних функцій // Мат. Студії. – 2012. – **37**, N1. – С. 89–97.

3. *Kempisty S.* Sur les fonctions quasicontinues // Fundam. Math. – 1932. –**19**. – P. 184-197.

4. *Marcus S.* Sur les fonctions quasicontinues an sens de S. Kempisty // Colloq. Math. **8** (1961), 47–53.

5. *Husain T.* Almost continuous mappings // Pr. Mat. – 1966. – **10**. – P. 1-7.

6. *Njåstad O.* On some classes of nearly open sets // Pacific J. Math. – 1965. – **15**. – P. 961–970.

7. *Noiri T.* A function which preserves connected spaces // Casopis Pest. Mat. – 1982. – **101**. – P. 393-396.

8. *Маслюченко В.К.* Про нарізні та сукупні модифікації неперервності // Мат. Студії. – 2006. – **25**, N.2. – С. 213-218.

9. *Маслюченко В.К.* Нарізно неперервні відображення і простори Кете: дис. докт. фіз.-мат. наук: 01.01.01. – Чернівці, 1999. – 345 с.