УДК 517.5

©2014 р. О.М. Піддубний

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

ГРАНИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ОДНОГО КЛАСУ ФУНКЦІЙ, ГАРМОНІЧНИХ В КРУЗІ

В роботі досліджуються граничні властивості функцій, гармонічних в одиничному крузі комплексної площини. Одержані результати узагальнюють деякі результати Штекбухнера і є аналогом відомої теореми Гарді–Літтлвуда

In this paper we study the boundary behavior of harmonic functions in the unit disc of the complex plane. The obtained results generalize some Stegbuchner results and are analogous to the well-known Hardy - Littlewood theorem

Нехай $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – одиничний круг, а $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ – одиничне коло комплексної площини $\mathbb{C}$. Класична теорема Гарді–Літтлвуда [1] описує залежність між швидкістю росту модуля похідної аналітичної функції при наближенні до межі $\mathbb{T}$ круга $\mathbb{D}$ її аналітичності та гладкістю граничних значень цієї функції. Ця теорема стала ефективним знаряддям у розв'язанні багатьох задач теорії функцій і теорії тригонометричних рядів.

Спочатку наведемо деякі означення і позначення, що використовуються в роботі.

Означення 1 [2]. Будемо говорити, що дійсна функція $\lambda(t)$, задана на деякому сегменті $[0, l]$, належить класу Ω, якщо виконуються умови:

1) $\lambda(0) = 0$, $\lambda(t) > 0$ при $t \in (0, l]$;
2) $\lambda(t)$ не спадає разом із t;
3) $\lambda(t)$ неперервна на $[0, l]$;
4) для $\forall t_1, t_2 \in [0, l]$ справедлива нерівність

$$\lambda(t_1 + t_2) \leq \lambda(t_1) + \lambda(t_2).$$

Функції класу Ω називаються функціями типу модуля неперервності. За теоремою С.М. Нікольського [3] маємо для $\lambda(t) \in \Omega$ таку рівність

$$\lambda(\lambda, t) = \lambda(t).$$

Означення 2 [2]. Якщо $\lambda(t) \in \Omega$ і існує така константа $C > 1$, що $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\lambda(ct)}{\lambda(t)} > 1$, то кажуть, що функція $\lambda(t)$ належить класові Ω^{**}.

Відомо [4], що коли $\lambda(t) \in \Omega^{**}$, то

$$\int\limits_0^t \frac{\lambda(u)}{u} du \leq A\lambda(t),$$

де $A = \text{const} > 0$ не залежить від t.

Означення 3. Будемо говорити, що дійсна функція $f(t)$, задана на проміжку $[-\pi, \pi]$, належить узагальненому класу Гельдера $H_p^\omega[-\pi, \pi], 1 \leq p < \infty$, якщо модуль неперервності $\omega_p(f, t)$ функції $f(t)$ задовольняє умову

$$\omega_p(f, t) \leq \omega(t)$$

де $\omega(t)$ - функція типу модуля неперервності.

Наступна теорема дає достатні умови належності граничних значень гармонічних в одиничному крузі функцій до узагальненого класу Гельдера $H_p^\omega[-\pi, \pi]$.

Теорема. *Нехай $u(re^{i\theta})$ гармонічна в D функція з граничною функцією $u(e^{i\theta}) \in L_p[-\pi, \pi], 1 \leq p < \infty$. Якщо для $\lambda(t) \in \Omega^{**}$ виконуються умови*

$$\left\| \frac{\partial u(re^{i\theta})}{\partial r} \right\|_p \leq C_1 \frac{\lambda(1-r)}{1-r},$$

$$\left\| \frac{\partial u(re^{i\theta})}{\partial \theta} \right\|_p \leq C_2 \frac{\lambda(1-r)}{1-r},$$

де C_1, C_2 — константи, які не залежать від r, тоді $u(e^{i\theta}) \in H_p^\lambda[-\pi, \pi]$.

Доведення. Потрібно довести співвідношення:

$$\varlimsup_{r\to 1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|u(re^{i(\theta+h)})-u(re^{i\theta})\right|^p d\theta \le C[\lambda(h)]^p,$$

де $C = \mathrm{const} > 0$ не залежить від h.

Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $\frac{1}{2} \le r < 1$, $0 < h < \frac{1}{2}$, і запровадимо такі позначення:

$$u'_\theta = \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad u'_r = \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Тоді для $0 < \rho < r$ будемо мати :

$$u(re^{i(\theta+h)}) - u(re^{i\theta}) =$$
$$= \left(u(re^{i(\theta+h)}) - u(\rho e^{i(\theta+h)})\right) +$$
$$+ \left(u(\rho e^{i(\theta+h)}) - u(\rho e^{i\theta})\right) +$$
$$+ \left(u(\rho e^{i\theta}) - u(re^{i\theta})\right) =$$
$$= e^{i(\theta+h)}\int\limits_{\rho}^{r} u'_r(te^{i(\theta+h)})dt +$$
$$+ i\rho\int\limits_{\theta}^{\theta+h} e^{it}u'_\theta(\rho e^{it})dt + e^{i\theta}\int\limits_{\rho}^{r} u'_r(te^{i\theta})dt.$$

Для $0 < \rho < r$ маємо

$$\Delta_h(\theta) := \left|u(re^{i(\theta+h)}) - u(re^{i\theta})\right| \le$$
$$\le \int\limits_{\rho}^{r}\left|u'_r(te^{i(\theta+h)})\right|dt +$$
$$+ \int\limits_{\theta}^{\theta+h}\left|u'_\theta(\rho e^{it})\right|dt + \int\limits_{\rho}^{r}\left|u'_r(te^{i\theta})\right|dt =:$$
$$=: \Delta_1(\theta) + \Delta_2(\theta) + \Delta_3(\theta) \quad .$$

На основі цього одержуємо оцінку

$$\|\Delta_h(\theta)\| \le \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\Delta_1(\theta))^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} +$$
$$+ \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\Delta_2(\theta))^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} +$$
$$+ \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\Delta_3(\theta))^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} = i_1 + i_2 + i_3.$$

Проведемо тепер оцінку інтегралів i_k, $k = 1, 2, 3$, використовуючи узагальнену нерівність Мінковського, умову теореми та відповідні властивості функції $\lambda(t)$.

$$i_1 = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_{\rho}^{r}\left|u'_r(te^{i(\theta+h)})\right|dt\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \le$$
$$\le \int\limits_{\rho}^{r}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|u'_r(te^{i(\theta+h)})\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} dt \le$$
$$\le C_1\int\limits_{\rho}^{r}\frac{\lambda(1-t)}{1-t}dt = C_1\int\limits_{1-r}^{1-\rho}\frac{\lambda(u)}{u}du,$$
$$C_1 = \mathrm{const} > 0.$$

Покладемо $1-h = r$, $\rho + h = r$. Це можна зробити в силу умов на r : $\frac{1}{2} \le r < 1$. Тоді $\rho = r - h = 1 - 2h$, а тому

$$i_1 \le C_1\int\limits_{h}^{2h}\frac{\lambda(u)}{u}du.$$

Покладаючи $u = t + h$, одержимо :

$$i_1 \le C_1\int\limits_{0}^{h}\frac{\lambda(t+h)}{t+h}dt \le$$
$$\le C_1\int\limits_{0}^{h}\frac{\lambda(t)+\lambda(h)}{t+h}dt \le$$
$$\le C_1\left[\int\limits_{0}^{h}\frac{\lambda(t)}{t}dt + \int\limits_{0}^{h}\frac{\lambda(h)}{h}dt\right] =$$
$$= C_1\left[\int\limits_{0}^{h}\frac{\lambda(t)}{t}dt + \lambda(h)\right].$$

І оскільки $\lambda(t) \in \Omega^{**}$, то

$$i_1 \le (C_1 + A)\lambda(h) = C_1^*\lambda(h), \tag{1}$$

$$C_1^* = \mathrm{const} > 0.$$

Аналогічно встановлюється оцінка

$$i_3 \le C_3\lambda(h). \qquad (2)$$

Оскільки

$$\Delta_2(\theta) = \int\limits_0^h \left|u'_\theta(\rho e^{i(\theta+t)})\right|dt,$$

то, використовуючи умову теореми, аналогічно оцінці величини i_1 одержуємо:

$$i_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\Delta_2(\theta))^p\, d\theta\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\int\limits_0^h \left|u'_\theta\left(\rho e^{i(\theta+t)}\right)\right|dt\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \int\limits_0^h \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|u'_\theta\left(\rho e^{i(\theta+t)}\right)\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} dt \le$$

$$\le \int\limits_0^h \frac{\lambda(1-\rho)}{1-\rho}dt = \frac{\lambda(1-\rho)}{1-\rho}h.$$

Оскільки $\rho + h = r$, і $1-\rho = 2h$, то

$$i_2 \le \frac{\lambda(2h)}{2h}h \le \lambda(h). \qquad (3)$$

Тепер із співвідношень (1) — (3) одержуємо, що $\|\Delta_h(\theta)\| \le C\lambda(h)$, де $C = \mathrm{const} > 0$ не залежить від h.

Теорему доведено.

Зауваження. Вище доведене твердження при $\lambda(t) = t^\alpha, 0 < \alpha \le 1$, збігається з лемою 3 роботи [5].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Hardy G., Littlewood J. E.* Some properties of fractional integrals. II // Math. Zeitschr. – 1931. – **34.** – P. 403-439.

2. *Ковальчук Р. Н.* О некоторых свойствах интегрального модуля гладкости граничной функции класса $H_p (p \ge 1)$ // Теор. функций, функционал. анализ и приложен. — 1969. — 6. — С. 14 – 20.

3. *Никольский С. М.* Ряд Фурье с данным модулем непрерывности // Докл. АН СССР — 1946. — **52**, №3 — С. 191 – 194.

4. *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Труды Моск. матем. о-ва — 1956. —**5.** — С. 483 – 522.

5. *Stegbuchner H.* On some extensions of a theorem of Hardy and Littlewood // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. — 1982. — **7**, № 2. — P. 113 – 117.