Ганс Ган (Hans Hahn)
27.IX.1879 – 24.VII.1934

УДК 517.51

©2014 р. В.К.Маслюченко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ВПЛИВИ ГАНСА ГАНА НА РОЗВИТОК МАТЕМАТИКИ У ЧЕРНІВЕЦЬКОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Прослідковано впливи Ганса Гана на розвиток теорії функцій у Чернівецькому університеті за останні 30 років у таких напрямках: сукупна неперервінсть нарізно неперервних відображень; наближення нарізно неперервних функцій; квазінеперервність та інші аналоги неперервності; напівнеперервні функції та теорема Гана-Д'єдонне-Тонґа-Катетова; діагоналі функцій багатьох змінних.

We follow the influence of Hans Hahn on the development of the function theory in Chernivtsi university for the last 30 years in the following directions: joint continuity of separately continuous mappings; approximation of separately continuous functions; quasicontinuity and others analogs of the continuity; semi-continuous functions and the Hahn-Dieudonne-Tong-Katětov theorem; diagonals of functions of several variables.

1. Ганс Ган: загальна характеристика. Ім'я Ганса Гана (27.IX.1879 – 24.VII.1934), видатного австрійського математика, професора Чернівецького (1909-1916), Боннського (1916-1921) і Віденського (1921-1934) університетів, добре відоме у науковому світі передусім у середовищі математиків та філософів. Перші відомості про його життя і творчість вміщені в некрологах [1-5] та довідниках [6-10]. Багато дат, особливо тих, що стосуються першого і другого віденських періодів життя Г.Гана уточнив у своїй дисертації Р.Айнгорн [11]. У моїй монографії "Знайомство з Гансом Ганом", що вийшла вже трьома виданнями [12-14], детальніше висвітлені чернівецький і боннський періоди і подано історію розвитку двох теорем Гана-Банаха: принципу рівномірної обмеженості та теореми про продовження лінійних функціоналів. Різна інформація про Ганса Гана міститься в моїх працях [15-20]. На даний момент вийшли зібрання математичних і філософських творів Ганса Гана [21,22], де його праці прокоментовані великим колективом учених, зокрема, у [21] поміщена стаття К.Менґера "Вступ до Ганса Гана".

Ганс Ган залишив помітний слід у багатьох розділах математики. Починав він у варіаційному численні під впливом свого наукового керівника Ґустава фон Ешеріха, фахівця саме в цій області, далі його основні наукові інтереси змістилися в бік теорії дійсних функцій, саме в цій галузі він вважався одним з найбільших авторитетів, зокрема, добре відомі його монографії [23-25]. Ганс Ган був одним із засновників таких нових математичних наук як функціональний аналіз і топологія, тут він отримав ряд фундаментальних результатів. Він досліджував аналітичні функції багатьох комплексних змінних і нарізно неперервні функції, ряди та інтеграли Фур'є, методи підсумовування і сингулярні інтеграли, інтерполяцію та інтегральні рівняння, займався аксіоматикою арифметики та історією математики.Крім того, Ганс Ган відомий як один з засновників знаменитого Віденського кола, групи вчених-неопозитивістів, які займалися філософією науки (див., зокрема, підрозділ "Ган і Віденське коло"[14, с.39] і вказану там літературу).

В сучасній математиці ми маємо багато іменних теорем, в яких фігурує персона Ганса Гана: дві вже згадані теореми Гана-Банаха з функціонального аналізу, теорема про розклад у розумінні Гана і теорема Віталі-Гана-Сакса в теорії міри, теорема Гана-Мазуркевича про неперервні образи відрізка в топології, теорема вкладення Гана в теорії частково впорядкованих систем, теорема Гана-Д'єдонне-Тонґа-Катетова про напівнеперервні функції. Все це свідчить, що в особі Ганса Гана ми маємо неординарного вченого, роботи якого в значній мірі вплинули на подальший розвиток науки. Саме тому великим успіхом користуються міжнародні ганські конференції, присвячені пам'яті Ганса Гана, які проводяться у Чернівцях через кожні 10 років, починаючи з 1984 року.

2. Ганс Ган: штрихи біографії. Ганс Ган народився у Відні 27 вересня 1879 року, тут же він закінчив гімназію у 1898 році і за бажанням свого батька, надвірного радника, записався на юридичний факультет Віденського університету, але вже у 1899 році перейшов з юриспруденції на математику. Він вчився в університетах Страсбурга, Мюнхена і Відня, де у 1902 році здобув ступінь доктора філософії. У 1902-1904 роках Г.Ган поглиблює свою освіту в університетах Відня і Ґеттінґена, а в 1905 році пройшов габілітацію у Віденському університеті. До 1909 року працював доцентом у Віденському університеті, замінюючи у 1905/6 році Отто Штольца в Інсбруку. В 1909 році одружився і переїхав у Чернівці, де працював в університеті як екстраординарний професор до 1914 року (хоча числився до 1916 року). Ганс Ган воював на фронті проти Італії, був поранений шрапнеллю в легеню 29.X.1915. З 1916 по 1921 працював у Боннському університеті, де став ординарним професором, а в 1921 році перебрався до Відня, свого рідного міста, де працював до своєї смерті, яка настала 24.VII.1934 внаслідок безуспішної операції на рак.

Ганс Ган справедливо вважається одним з найвідоміших австрійських математиків, він був членом-кореспондентом Австрійської Академії наук.

3. Ганські конференції і основні напрямки впливів Ганса Гана в Чернівецькому університеті. На ту обставину, що Ганс Ган, один з співавторів знаменитої теореми Гана-Банаха про продовження лінійних функціоналів, працював у Чернівецькому університеті, звернув мою увагу А.Плічко ще понад зо років тому назад, коли він працював у Львові в Інституті прикладних проблем механіки і математики, що нині носить ім'я тодішнього його директора академіка Я.С.Підстригача. На той час у Львові у 1982 році успішно пройшла конференція пам'яті Стефана Банаха, в організації якої А.Плічко взяв найактивнішу участь, він запропонував і мені організувати щось подібне, присвячене Гансу Гану, в Чернівцях. Так теорема Гана-Банаха об'єднала Чернівці і Львів.

Конференція була проведена з 27 червня по 30 червня 1984 року і з того часу стала традиційною, наступні дві ганські конференції відбулися 10-15 жовтня 1994 року і 27 червня-3 липня 2004, а цьогорічна – четверта – 30 червня-5 липня 2014 року.

Четверта ганська конференція припала на рік 200-ліття Тараса Шевченка, який виявився чи не найдраматичнішим у новітній історії України. Перемогла революція гідності, маємо нового Президента і нову Верховну Раду, та на Сході триває війна і агресор не заспокоюється. Звичайно, цей час не найкращий для заняття наукою, та все ж конференція пройшла з великим успіхом, початковий тираж її тез виявився замалим, довелося додруковувати.

На цій конференції я робив доповідь [20], за матеріалами якої і написана дана стаття. В ній ми розглянемо як доробок Ганса Гана вплинув на розвиток математики у Чернівецькому університеті за останні 30 років. Ці впливи можна розподілити по таких напрямках:

1. Сукупна неперервність нарізно неперервних відображень;

2. Наближення нарізно неперервних функцій;

3. Квазінеперервність та інші аналоги неперервності;

4.Напівнеперервні функції та теорема Гана-Д'єдонне-Тонґа-Катетова;

5. Діагоналі функцій багатьох змінних.

Подальший наш виклад буде йти за цим планом.

4. Нарізно неперервні відображення у працях Ганса Гана. Зв'язки між нарізною і сукупною неперервністю вперше ґрунтовно став вивчати Рене Бер, дисертація якого [26] лежить в основі всіх подальших досліджень з цієї тематики. В ній Р.Бер вивчав в основному нарізно неперервні функції двох дійсних змінних і лиш деякі результати зміг перенести на функції трьох змінних. Перехід до більшого числа змінних потребував нових ідей, пов'язаних з квазінеперервністю, і його здійснив саме Г.Ган [27] через 20 років після виходу дисертації Бера. Він встановив, що точки сукупної неперервності нарізно неперервних функцій $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ лежать щільно на кожній гіперплошині $x_n = const$. Доведення він проводить у два етапи, з'ясувавши спочатку, що нарізно неперервні функції $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ є квазінеперервними (це Г.Ган виводить з теореми Лебеґа про належність таких функцій до $(n-1)$-го класу Бера [28] і результатів Бера про точкову розривність функцій берівських класів з точністю до множини першої категорії [29]), а далі, здійснюючи індуктивний перехід, де методом від супротивного фактично доводить, що у функції $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка квазінеперервна і точково розривна відносно першої сукупної змінної і неперервна відносно другої змінної, для кожного $y \in \mathbb{R}$ множина $C_y(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in C(f)\}$ всюди щільна в $\mathbb{R}^n$ (тут і далі $C(f)$ – множина точок неперервності функції f, а $D(f)$ – множина її точок розриву). Оскільки квазінеперервні функції на берівському просторі автоматично точково розривні, то методом Гана насправді можна довести набагато загальніше твердження: якщо простір X берівський, Y задовольняє першу аксіому зліченності, Z метризовний і $f : X \times Y \to Z$ – KC-функція, тобто відображення, яке квазінеперервне відносно першої змінної і неперервне відносно другої, то для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ буде залишковою в X. Цей результат був встановлений іншим способом значно пізніше [30, 31]. Доведення Гана можна модифікувати так, щоб воно проходило і для $\overline{K}C$-функцій, які квазінеперервні відносно першої змінної лише для значень другої, які пробігають деяку всюди щільну в Y підмножину і неперервні відносно другої змінної. Якщо при цьому ще скористатися теоремою Банаха про категорію [32, с.87], то і припущення берововсті простору X можна зняти. Таким чином, можна отримати такий результат: якщо X – топологічний простір, Y задовольняє першу аксіому зліченності, Z – метризовний простір і $f : X \times Y \to Z$ – $\overline{K}C$-функція, то для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f)$ залишкова в X. Ця теорема іншим прямим способом була доведена в [65]. Весь цей матеріал увійшов до докторської дисертації автора [34, підрозділ 3.2]. Про подальший розвиток цих результатів ми розповімо пізніше.

Доведення в дисертації Бера бувають досить довгими і часто займають велике число сторінок. Ця обставина заставляла математиків шукати інші підходи, перший з яких відкрив Е. ван Влек [35], він використовує рівномірну неперервність. Цей метод розвинув Г.Ган [23, с.390], показавши, що для кожної нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, де X – підпростір типу G_δ деякого повного метричного простору (Г.Ган називає такі простори просторами Юнґа), а Y – метризовний компакт, проекція множини $D^\varepsilon(f) = \{p \in X \times Y : \omega_f(p) \geq \varepsilon\}$ на вісь X є ніде не щільною, а значить, $pr_X(D(f))$ – це множина першої категорії, а множина $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\} = X \setminus pr_X(D(f))$ залишкова в X. Це перший результат про сукупну неперервність нарізно неперервних відображень в абстрактних просторах. Він дістав значний розвиток у працях [33, 36].

У своїй підсумковій монографії [24] нарізно неперервним відображенням присвячено цілий параграф у кінці четвертого розділу. Тут Г.Ган отримав значні підсилення і узагальнення своїх попередніх результатів, зокрема, довів таку теорему: якщо $X_1, ..., X_n$ – простори Юнґа, X_{n+1} – метризовний компакт і $f : X_1 \times \cdots \times X_{n+1} \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція, то множина $C_{X_{n+1}}(f) = \{x \in X = X_1 \times \cdots \times X_n : \{x\} \times X_{n+1} \subseteq C(f)\}$ є залишковою в добутку X. Виклад Гана в монографії [24] позначений впливом статті К.Беґеля [37], про яку мова піде далі.

5. Нарізно неперервні відображення у Чернівецькому університеті. Вивчення нарізно неперервних відображень у Чернівецькому університеті почалося приблизно з 1980-го року з моєї ініціативи без впливу Г.Гана. У збірнику [38] я виявив задачу: довести, що кожна нарізно неперервна функція $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ має принаймні одну точку неперервності. Я розв'язав її, використавши теорему Кантора про рівномірну неперервність неперервної на відрізку функції, при цьому довів більше, а саме, що у такої функції є всюди щільна множина точок x на $[0, 1]$, таких, що f сукупно неперервна у всіх точках відрізка $\{x\} \times [0,1]$. Я почав розмірковувати як перенести цей результат на функції від трьох дійсних змінних, але ця задача виявилась значно труднішою. З монографії Ф.Мєдвєдєва [39, с.148] я дізнався, що задача про сукупну неперервність нарізно неперервних функцій була вихідною у дослідженнях Рене Бера, той результат, що там формулювався (про точки неперервності нарізно неперервних функцій на неперервних кривих) легко виводився з доведеної мною теореми і це викликало ще більший інтерес до цієї тематики.

Коли я готував доповідь на першу ганську конференцію, то у некролозі К.Майєргофера [1] виявив, що саме Ганс Ган зробив перші істотні кроки у дослідженні на сукупну неперервність нарізно неперервних функцій $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ від багатьох змінних, але там не згадувалась теорема про проекцію, яка була вже у Р.Бера, але Ф. Мєдвєдєв у [39] теж про неї не згадав, була вона і у Г.Гана, про що ми писали вище, але і К.Майєргофер цей результат не привів. Це було щасливою обставиною для мене, тоді молодого математика, і послужило добрим стимулом. Я за тижнів два встановив, використавши теорему Александрова-Гаусдорфа і відкриту мною властивість продовження нерівностей для нарізно неперервних функцій, що у нарізно неперервних функцій $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ множина тих точок $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, для яких $\{x\} \times \mathbb{R} \subseteq C(f)$ велика, і узагальнив цей результат на відображення $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Z$.

Свій результат я доповідав на першій ганській конференції, а його розвиток на Челябінській школі [40]. М.Й.Кадець, який слухав мою доповідь у Чернівцях відреагував на неї так: "Ну, можливо, Меньшов це знає". Але невдовзі вийшла стаття О. Архангельського [41], з якої я дізнався про теорему Наміоки і про те, що задача про сукупну неперервність нарізно неперервних відображень цікавить і сучасних математиків, зокрема, з цими дослідженнями тісно пов'язана і теорема про перенормування Троянського, учня М.Й.Кадеця, отже, не тільки Д.Меньшов це міг би знати.

Після захисту своєї кандидатської дисертації [129] у 1985 році я цілком захопився новою темою про нарізно неперервні функції, зібрав усю доступну мені літературу, намітив програму майбутніх досліджень і взявся за їх реалізацію. Разом з тим я працював над історичною монографією про Ганса Гана [12] і ця діяльність теж допомога мені в опануванні нової теми.

На початку 90-х років до мене під'єдналися В.Михайлюк і О.Собчук, які пізніше захистили кандидатські дисертації [42, 43]. Надалі наша група розширилась і на даний момент з цієї тематики в Чернівецькому університеті захищено три докторських дисертації [34, 44, 45], десять кандидатських дисертацій [42, 43, 46-53] та виконуються дві докторських (В.Нестеренко і О.Карлова) і три кандидатських дисертації (О.Мироник, В.Косован, Д.Онипа).

Щоб висвітлити всі досягнення з даної тематики, які отримані в Чернівецькому університеті за останні 25 років, потребувався би грубезний том, тому ми обмежелися тут розглядом лише тих, що пов'язані з Гансом Ганом.

6. Горизонтально квазінеперервні відображення. Горизонтально квазінеперервні відображення були введені мною і В.Нестеренком [54, 55] як розвиток умови *(A)* з праці К.Беґеля [37] і вперше фігурували в огляді [56]. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *горизонтально квазінеперервним у точці* $p_0 = (x_0, y_0)$, якщо для кожного околу W точки $z_0 = f(p_0)$ у просторі Z і для довільних околів U і V точок x_0 і y_0 у просторах X і Y відповідно існує відкрита непорожня множина G в X і точка $b \in Y$, такі, що $G \subseteq U$, $b \in V$ і $f(G \times \{b\}) \subseteq W$, і просто *горизонтально квазінеперервним*, якщо воно є таким у кожній точці з добутку $X \times Y$. Сукупність усіх горизонтально квазінеперервних відображень $f : X \times Y \to Z$, які неперервні відносно другої змінної позначається символом $K_hC(X \times Y, Z)$, а елементи з цього класу називаються K_hC-функціями.

У працях [54-56] були отримані перші результати про сукупну неперервність K_hC-функцій, які були розвинені у праці [57], де була встановлена

Теорема 1. Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метризовний простір і $f \in K_hC(X \times Y, Z)$. Тоді:

а) якщо простір Y задовольняє першу аксіому зліченності, то для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ залишкова в X;

б) якщо простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, то множина $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$ залишкова в X.

7. Теорема Калбрі-Троалліка та її розвиток. У 1979 році французькі математики Ж.Калбрі і Ж.-П.Троаллік [58] ввели таке поняття: підмножина B топологічного простору Y називається *множиною зліченного типу*, якщо існує така не більш, ніж зліченна система $\mathcal{V}$ відкритих множин в Y, що для кожного $y \in B$ система $\mathcal{V}(y) = \{V \in \mathcal{V} : y \in V\}$ утворює базу околів точки y у просторі Y. Ними була доведена

Теорема 2. Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метризовний простір, $f : X \times Y \to Z$ – нарізно неперервне відображення і B – множина зліченного типу в Y. Тоді множина $C_B(f) = \{x \in X : \{x\} \times B \subseteq C(f)\}$ є залишковою в X.

Звідси негайно випливає

Наслідок. Нехай X, Y, Z і f – такі ж як в теоремі 2. Тоді:

а) якщо простір Y задовольняє першу аксіому зліченності, то для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f)$ залишкова в X;

б) якщо простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, то множина $C_Y(f)$ є залишковою в X.

Теорема 1 – це узагальнення цього наслідку, яке було отримано іншим методом, ніж теорема Калбрі-Троалліка. Постало природне питання про узагальнення самої теореми 2 на випадок K_hC-функцій.

У праці [36] теорема Калбрі-Троалліка узагальнюється не тільки на K_hC-функції, але й на функції з ширшого класу $\mathcal{N} = \mathcal{N}(X \times Y, Z)$, який складається з відображень $f : X \times Y \to Z$ зі значеннями в метричному просторі Z, що задовольняють умови:

(i) для довільних відкритих непорожніх множин U і V відповідно в X і Y та довільної множини A в X, для якої $U \subseteq \overline{A}$, існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G \times V) \subseteq \overline{f((G \cap A) \times V)}$;

(ii) для кожного $\varepsilon > 0$ множина $Q_\varepsilon(f) = \{(x, y) \in X \times Y : \omega_{f_y}(x) < \varepsilon\}$ всюди щільна в просторі $X \times Y$;

(iii) множина $X_C(f) = \{x \in X : f^x -$ $-$неперервне$\}$ є залишковою в X.

Теорема 3. Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метричний простір, B – множина зліченного типу в Y і $f \in \mathcal{N}(X \times Y, Z)$. Тоді множина $C_B(f)$ є залишковою в X.

Метод доведення цієї теореми використовував категорні міркування і не спирався, як у [58], на теорему Бера про напівнеперервні функції. З теореми 3 випливає як теорема 2 і її наслідок, так і теорема 1, бо $K_hC(X \times Y, Z) \subseteq \mathcal{N}(X \times Y, Z)$ для метричного простору Z.

До речі, у цій же праці було узагальнено теорему про великі коливання, що йде від Г.Гана. Тут метод Гана був перенесений на K_hC-функції, а потім новим прямим методом була доведена

Теорема 4. Нехай X – берівський простір, Y – метризовний компакт, Z – метричний простір, $f \in \mathcal{N}(X \times Y, Z)$, $\varepsilon > 0$ і $D^\varepsilon(f) = \{p \in X \times Y : \omega_f(p) \geq \varepsilon\}$. Тоді проекція $pr_X(D^\varepsilon(f))$ є замкненою і ніде не щільною в X множиною.

Подібну теорему для CU-функцій, які неперервні відносно першої змінної і рівномірно неперервні відносно другої, довели Дж.Бреккенрідж і Т.Нішіура [30], а узагальнення їх результату на $\overline{C}U$-функції було дане в праці [33].

Інше узагальнення теореми Калбрі-Троалліка запропонували А.Бузіад і Ж.-П.Троаллік [59], використавши поняття квазінеперервності знизу для многозначних відображень. Многозначне відображення $F : X \to Y$ називається *квазінеперервним знизу в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного околу U точки x_0 в X і довільної відкритої множини V в Y, такої, що $V \cap F(x_0) \neq \varnothing$, існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $F(x) \cap V \neq \varnothing$ для всіх $x \in G$, і просто *квазінеперервним знизу*, якщо воно є таким у кожній точці з простору X. У праці [59] було встановлено такий результат.

Теорема 5. Для топологічних просторів X і Y, метричного простору Z, відображення $f : X \times Y \to Z$, не більш, ніж зліченної системи $\mathcal{B}$ непорожніх підмножин Y, такої, що для кожного $V \in \mathcal{B}$ многозначне відображення $F_V : X \to Z$, $F_V(x) = f(\{x\} \times V)$, квазінеперервне знизу, існує залишкова множина R в X, така, що для кожного $x \in R$ і довільного $y \in Y$ з того, що відображення $f^x : Y \to Z$ неперервне у точці y і система $\mathcal{B}(y) = \{V \in \mathcal{B} : V$ – окіл точки y в $Y\}$ – це база околів точки y в Y, випливає, що f сукупно неперервне в точці (x, y).

З появою цих узагальнень теореми Калбрі-Троалліка, що були опубліковані у 2010 році і отримані під впливом праці [57], постало природне питання порівняти їх між собою. У праці [60] було з'ясовано, що ці результати не порівнянні, і разом з тим, розвиваючи метод з [36] і узагальнюючи поняття з [60], була доведена загальна теорема, з якої випливають результати праць [36] і [59].

По-перше, в [60] було зауважено, що многозначне відображення $F : X \to Y$ буде квазінеперервним знизу тоді і тільки тоді, коли для довільної відкритої в X множини U і довільної множини $A \subseteq X$, такої, що $U \subseteq \overline{A}$, виконується включення $F(U) \subseteq \overline{F(A)}$. На основі цього було введено поняття *псевдоквазінеперервного знизу відображення*, як такого, що для кожної непорожньої відкритої в X множини U і множини $A \subseteq X$, такої, що $U \subseteq \overline{A}$, існує непорожня відкрита в X множина G, така, що $G \subseteq U$ і $F(G) \subseteq \overline{F(A)}$.

З другого боку, в працях [61, 62] були введені певні узагальнення кліковості, спираючись на які в [60] було введено одне нове поняття. Многозначне відображення $F : X \to Y$ називається *покриттєво категорно кліковим знизу*, якщо для кожного відкритого покриття $\mathcal{V}$ простору Y і довільної множини E другої категорії в X існують десь щільна в X множина A і множина $V \in \mathcal{V}$, такі, що $A \subseteq E$ і $F(x) \cap V \neq \varnothing$ для всіх $x \in A$.

Щоб сформулювати загальну теорему з [60], введемо такі позначення. Для системи $\mathcal{V}$ множин у просторі Y і точки $y \in Y$ покладемо

$\mathcal{V}(y) = \{V \in \mathcal{V} : V - \text{окіл точки } y \text{ в } Y\}$

і

$B(\mathcal{V}) = \{y \in Y : \mathcal{V}(y) - \text{база околів точки } y \text{ в } Y\}$.

Теорема 6. Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метризовний простір, $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – не більш, ніж зліченна система множин в Y, $f : X \times Y \to Z$ – таке відображення, шо для кожної множини $V \in \mathcal{V}$, для якої $V \cap B(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, многозначне відображення $F_V : X \to Z$, $F_V(x) = f^x(V)$, псевдоквазінеперервне знизу та покриттєво категорно клікове знизу. Тоді множина

$$R = \{x \in X : \{x\} \times (C(f^x) \cap B(\mathcal{V})) \subseteq C(f)\}$$

є залишковою в X.

Недавно В.Нестеренко [63] покращив теорему 6 і отримав характеризацію властивості Гана, яка означає для відображення $f : X \times Y \to Z$, що множина $C_Y(f)$ залишкова в X. Ці результати, що знаходяться на передньому краю науки про сукупну неперервність нарізно неперервних відображень, згодом безумовно стануть окрасою докторської дисертації В.Нестеренка.

8. Берівська класифікація: Рене Бер. Свою класифікацію розривних функцій Р.Бер запропонував у праці [64], а розгорнутий виклад дав у дисертації [26].

Нагадаємо, що відображення $f : X \to Y$ *нульового класу Бера* – це неперервні відображення , їхня сукупність позначається $B_0(X,Y)$. Кажуть, що $f : X \to Y$ – це відображення *першого класу Бера*, якщо існує така послідовність неперервних відображень $f_n : X \to Y$, яка поточково на X збігається до відображення f, їхня сукупність позначається $B_1(X,Y)$. Подальші класи $B_\alpha(X,Y)$, де α – скінченне або зліченне порядкове число, вводяться індуктивно: $f \in B_\alpha(X,Y)$, якщо існують послідовності порядкових чисел $\xi_n < \alpha$ і відображень $f_n \in B_{\xi_n}(X,Y)$, такі, що $f_n(x) \to f(x)$ в Y для кожного $x \in X$.

Сукупність усіх нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to Z$ ми позначаємо символом $CC(X \times Y, Z)$. Для відображення $f : X^2 \to Z$ відображення $g : X \to Y$, що визначається формулою $g(x) = f(x,x)$, називається його *діагоналлю*.

Ми позначаємо для скорочення запису $B_\alpha(X) = B_\alpha(X,\mathbb{R})$, $CC(X \times Y) = CC(X \times Y,\mathbb{R})$, $B_\alpha[a,b] = B_\alpha([a,b])$ і $CC[a,b]^2 = CC([a,b]^2)$. У своїй дисертації [26] Р.Бер встановив такий результат.

Теорема 7. $g \in B_1[a,b] \Leftrightarrow \exists f \in CC[a,b]^2 \mid g(x) = f(x,x)$ на $[a,b]$.

Таким чином, діагоналями нарізно неперервних функцій $f : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ будуть функції $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ першого класу Бера і тільки вони.

Цей результат він отримав не прямим, а обхідним шляхом з допомогою своєї характеризації функцій першого класу як точково розривних на кожній досконалій множині функцій, яка виявилася ідентичною з відкритою ним же такою ж характеризацією діагоналей нарізно неперервних функцій двох дійсних змінних. При цьому побудова для даної точково розривної на кожній досконалій множині функції g нарізно неперервної функції f з діагоналлю g і послідовності неперервних функцій g_n, яка поточково збігається до g, розтягнулося на багато сторінок [26, с.31-63], займаючи чверть усієї праці.

9. Берівська і лебеґівська класифікації: Анрі Лебеґ. Про класифікацію Бера і результати його дисертації [26] сповіщалося в його попередніх повідомленнях [64, 66, 67], що вийшли у 1897-98 роках. І вже в 1898 році А.Лебеґ у своїй першій друкованій праці [68], окрім нового доведення теореми Вейєрштрасса про рівномірне наближення неперервної функції многочленами, встановлює такий результат.

Теорема 8. $CC([a,b] \times [c,d]) \subseteq B_1([a,b] \times [c,d])$.

З цієї теореми негайно випливає, що діагоналі нарізно неперервних функцій $f : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ належать до $B_1[a,b]$.

В доведенні теореми 8 А.Лебеґ застосовує метод лінійної інтерполяції. Його підхід допускає розвиток, який приводить до такого результату [56, теорема 5.4.1, с.239], [69,70]:

Теорема 9. Для довільного топологічного простору Y і топологічного векторного простору Z справедливе включення $CC(\mathbb{R}^m \times Y, Z) \subseteq B_1(\mathbb{R}^m \times Y, Z)$.

При цьому для функції $f \in CC(\mathbb{R}^m \times Y, Z)$ дограничні сукупно неперервні функції f_n на смузі $\Delta_{n,k} \times Y$ (тут $k = (k_1, ..., k_m) \in Z^m$ і $\Delta_{n,k} = [\frac{k_1}{n}, \frac{k_1+1}{n}] \times \dots \times [\frac{k_m}{n}, \frac{k_m+1}{n}]$ – комірка стандартного розбиття простору $\mathbb{R}^m$ на куби) записуються у явному вигляді

$$f_n(x,y) = \sum_{\alpha \in \{0,1\}^m} \varphi^k_{n,\alpha}(x) f\Big(\frac{k+\alpha}{n}, y\Big),$$

де $\varphi^k_{n,\alpha}(x) = n^m \prod\limits_{i \in I_{\alpha,0}} (\frac{k_i+1}{n} - \xi_i) \times \prod\limits_{i \in I_{\alpha,1}} (\xi_i - \frac{k_i}{n})$, $x = (\xi_1, ..., \xi_m)$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$ і $I_{\alpha,j} = \{i : \alpha_i = j\}$ при $j = 0, 1$.

Інтерполяційні функції $\varphi^k_{n,\alpha}$ виникли в результаті послідовного лінійного інтерполювання відносно кожної змінної ξ_i і при $m = 1$ приводять до таких функцій, що їх використовував ще А.Лебеґ у [68], правда, там він розглядав довільні розбиття $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ відрізка $[a,b]$.

У своїй фундаментальній праці "Про аналітично зображувані функції"[28] А.Лебеґ розвиває раніше отримані результати, вводить класифікацію борелівських множин і відповідну класифікацію функцій, яка зараз називається лебеґівською. Кажуть, що відображення $f : X \to Y$ належить до *α-го класу Лебеґа*, якщо прообраз $f^{-1}(B)$ кожної відкритої в Y множини B є множиною з адитивного класу α. Сукупність усіх таких відображень ми позначаємо символом $H_\alpha(X, Y)$.

10. Результати Ганса Гана про берівську класифікацію нарізно неперервних функцій. Г.Ган [24, §39, п.п.1, 2], узагальнюючи результати А.Лебеґа, на довільному метричному просторі X, відстань між точками x і y якого він позначає просто xy, вводить для кожної послідовності $a_1, ..., a_n$ різних точок з X функції $\psi(x) = min\{xa_1, ..., xa_n\}, \psi_k(x) = max\{2\psi(x), 0\}$ і $h(x; a_1, ..., a_n; \lambda_1, ..., \lambda_n) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \psi_k(x)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \psi_k(x)}$ при $x \neq a_k$ і $h(x; a_1, ..., a_n; \lambda_1, ..., \lambda_n) = \lambda_k$ при $x = a_k$, де $k = 1, ..., n$ і $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$. При цьому він з'ясовує, що для будь-якої неперервної функції $g : X \to \mathbb{R}$ і довільної всюди щільної в X послідовності різних точок a_n на X має місце зображення $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} h(x; a_1, ..., a_n; g(a_1), ..., g(a_n))$. Звідси негайно випливає, що коли $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція, $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ – всюди щільна множина у метричному просторі X, що складається з різних точок a_n, Y – топологічний простір і $f_n(x, y) = h(x; a_1, ..., a_n; f(a_1, y), ..., f(a_n, y))$ на $X \times Y$, то функції $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$ неперервні і $f_n(x, y) \to f(x, y)$ на $X \times Y$. Зокрема, $CC(X \times Y) \subseteq B_1(X \times Y)$ для сепарабельного метризовного простору X і топологічного простору Y. Далі він отримує загальніший результат про те, що нарізно неперервна функція $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{R}$, що визначена на добутку n метризовних просторів, $n - 1$ з яких сепарабельні, належить до $(n - 1)$-го класу Бера.

11. Узагальнення теорем Гана про берівську класифікацію нарізно неперервних функцій. Розвиток результатів Р.Бера, А.Лебеґа і Г.Гана був здійснений у працях багатьох математиків XX століття (К.Куратовський, Д.Монтґомері, В.Моран, Б.Джонсон, Ж.Сан-Ремо, В.Рудін, Ґ.Вера, Р.Генселл, В.Маслюченко, В.Михайлюк, О.Собчук, О.Карлова, Т.Банах та ін.). Ми не маємо можливості тут висвітлити весь внесок чернівецьких математиків у цю тематику, торкнемся лиш деяких аспектів, пов'язаних з Г.Ганом.

У праці [72] результати Гана були узагальнені. Там для множини різних точок $a_1, ..., a_n$ в метричному просторі X окрім функцій ψ і ψ_k з п.10 були введені ще функції $\varphi_{n,k}(x) = \frac{\psi_k(x)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \psi_k(x)}$ при $x \neq a_j$, $\varphi_{n,k}(a_k) = 1$, $\varphi_{n,k}(a_j) = 0$ при $j \neq k$, які є неперервними і утворюють розбиття одиниці. Далі для довільного топологічного векторного простору Z були визначені *оператори Гана* $H_n : C(X, Z) \to C(X, Z)$, які кожній неперервній функції $g : X \to Z$ ставлять у відповідність неперервну функцію

$$g_n(x) = (H_n g)(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{n,k}(x) g(a_k).$$

В роботі [72] був доведений такий результат.

Теорема 10. Нехай X – сепарабельний метричний простір, Z – локально опуклий простір над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$ і $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ – всюди щільна в X зліченна множина, що складається з різних точок a_k. За кожним набором $a_1, ..., a_n$ побудуємо функції $\varphi_{n,k}$ і відповідний оператор Гана H_n. Тоді

а). Якщо $g \in C(X, Z)$ і $g_n = H_n g$, то $g_n \in C(X, Z)$ і $g_n(x) \to g(x)$ у Z для кожного $x \in X$.

б). Якщо Y – топологічний простір, $f \in CC(X \times Y, Z)$ і $f_n(x, y) = (H_n f_y)(x)$ для довільних $(x, y) \in X \times Y$, то $f_n \in C(X \times Y, Z)$ і $f_n(p) \to f(p)$ у просторі Z для кожної точки $p \in X \times Y$. Зокрема, $f \in B_1(X \times Y, Z)$ і $CC(X \times Y, Z) \subseteq B_1(X \times Y, Z)$.

Цей результат можна перенести і на нарізно неперервні відображення $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Z$.

12. Нова редакція теореми Рудіна. У своїй праці [73] В.Рудін, використавши теорему Майкла про розбиття одиниці, узагальнив результати А.Лебеґа і Г.Гана, правда, про останнього він у своїй роботі не згадує. Виходячи з викладу Гана, результат Рудіна можна подати в кращій редакції, ввівши оператори Рудіна, що було зроблено в [72].

Нехай X – метричний простір. Для кожного номера n розглянемо покриття $\mathcal{B}_n$ відкритими кулями $B(x, \frac{1}{n}) = \{u \in X : ux < \frac{1}{n}\}$, де $x \in X$. Згідно з теоремою Стоуна про паракомпактність метричного простору у кожне покриття $\mathcal{B}_n$ можна вписати відкрите локально скінченне покриття $\mathcal{U}_n$. За теоремою Майкла для кожного n існує локально скінченне розбиття одиниці $(\varphi_{n,i})_{i\in I_n}$, яке підпорядковане покриттю $\mathcal{U}_n$ і складається з ненульових неперервних функцій $\varphi_{n,i} : X \to [0,1]$. Виберемо в кожному з носіїв $supp\varphi_{n,i}$ деяку точку $x_{n,i}$.

Для довільного топологічного векторного простору Z визначимо оператор Рудіна $R_n : C(X,Z) \to C(X,Z)$, співставивши кожній неперервній функції $g : X \to Z$ функцію

$$g_n(x) = (R_n g)(x) = \sum_{i\in I_n} \varphi_{n,i}(x) g(x_{n,i}),$$

яка теж буде неперервною.

Теорема 11. Нехай X – метричний простір, Z – локально опуклий простір і R_n – оператори Рудіна. Тоді:

а). Якщо $g \in C(X,Z)$ і $g_n = R_n g$, то $g_n(x) \to g(x)$ на X.

б). Якщо Y – топологічний простір, $f \in CC(X \times Y, Z)$ і $f_n(x,y) = (R_n f_y)(x)$, то $f_n \in C(X \times Y, Z)$ і $f_n(p) \to f(p)$ на $X \times Y$. Зокрема, $f \in B_1(X \times Y, Z)$ і $CC(X \times Y, Z) \subseteq B_1(X \times Y, Z)$.

Оператори Рудіна можна пристосувати і до доведення загальнішого включення $C\overline{B}_\alpha(X \times Y, Z) \subseteq B_{\alpha+1}(X \times Y, Z)$, з якого виводиться, що нарізно неперервне відображення $f : X_1 \times \cdots \times X_{n+1} \to Z$, де простори $X_1, ..., X_n$ – метризовні, X_{n+1} – довільний топологічний простір, а Z – локально опуклий простір, належить до n-го класу Бера.

У самого В.Рудіна насправді було доведено включення $C\overline{C}(X \times Y, Z) \subseteq B_1(X \times Y, Z)$. Рисочка над B_α у позначенні $C\overline{B}_\alpha(X \times Y, Z)$ означає, що для функцій $f \in C\overline{B}_\alpha(X \times Y, Z)$ множина $X_{B_\alpha}(f) = \{x \in X : f^x \in B_\alpha(Y,Z)\}$ всюди щільна в X.

У зв'язку з цією теоремою Рудіна у огляді [69] була поставлена проблема: чи справджується включення $CC(X \times Y, Z) \subseteq B_1(X \times Y, Z)$, якщо X – метричний, Y – топологічний і Z – топологічний векторний простори? Незважаючи на велике число результатів на цю тему, ця проблема залишається досі не розв'язаною.

13. Розвиток теореми Рудіна та берівська класифікація інтегралів, залежних від параметра. Починаючи з праці [74], з'явилося чимало робіт, де розвивається теорема Рудіна, у зв'язку з цим згадаймо лише праці [75-77]. Подамо тут для прикладу один результат з праці [77].

Символом $CB_\alpha(X \times Y, Z)$, де α – скінченне або зліченне порядкове число, позначається клас відображень $f : X \times Y \to Z$, для яких $f_y \in C(X,Z)$ для кожного $y \in Y$ і $f^x \in B_\alpha(Y,Z)$ для кожного $x \in X$. Якщо належність $f^x \in B_\alpha(Y,Z)$ виконується лише для $x \in X_{B_\alpha}(f)$, де $\overline{X_{B_\alpha}(f)} = X$, то відповідний клас функцій позначається через $C\overline{B}_\alpha(X \times Y, Z)$.

Трійка (X,Y,Z) називається *α-трійкою Лебеґа*, якщо $CB_\alpha(X \times Y, Z) \subseteq B_{\alpha+1}(X \times Y, Z)$ і *α-трійкою Рудіна*, якщо $C\overline{B}_\alpha(X \times Y, Z) \subseteq B_{\alpha+1}(X \times Y, Z)$.

Топологічний простір Z називається *рівномірно зв'язним*, якщо на ньому задано неперервне відображення $\lambda : Z \times Z \times [0,1] \to Z$, для якого (i) $\lambda(x,y,0) = x$; (ii) $\lambda(x,y,1) = y$; $(iii)\lambda(x,x,t) = x$ для всіх $x, y \in Z$ і $t \in [0,1]$. Топологічний векторний простір буде рівномірно зв'язним з функцією $\lambda(x,y,t) = (1-t)x + ty$.

У праці [77] доведено таке узагальнення теореми Рудіна.

Теорема 12. Нехай X – метризовний простір, Y – топологічний простір, Z – рівномірно зв'язний простір і $0 \leq \alpha < \omega_1$. Тоді (X,Y,Z) – це α-трійка Рудіна.

У праці [78] досліджується питання про берівську класифікацію інтегралів, залежних від параметра.

Для нарізно неперервної функції $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ розглянемо інтеграл, залежний від параметра, тобто функцію

$$g(y) = \int_0^1 f(x,y)dx,$$

визначену на відрізку [0, 1]. З теореми Лебеґа про граничний перехід під знаком інтеграла випливає, що g неперервна, якщо f обмежена. В загальному випадку функція g може виявитися розривною, але обов'язково належить до першого класу Бера. Наприклад, для нарізно неперервної функції $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, для якої $f(x,y) = \frac{2xy^2}{(x^4+y^4)arctgy^{-2}}$ при $0 \le x \le 1$ і $0 < y \le 1$ і $f(x,0) = 0$ при $0 \le x \le 1$, $g(y) = 1$ при $0 < y \le 1$ і $g(0) = 0$. В [34, 79] було поставлене питання: які функції першого класу Бера на [0, 1] можуть бути подані у вигляді інтеграла, залежного від параметра з нарізно неперервною підінтегральною функцією?

Виявляється, що не всі функції першого класу Бера подаються у такому вигляді, зокрема, такою буде відома функція Рімана. Воно й не дивно, бо для нарізно неперервної функції f функція $g = If$ буде σ-*неперервною*, тобто для неї існує така послідовність замкнених множин F_n, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = [0,1]$ і всі звуження $g|_{F_n}$ неперервні. Але у σ-неперервної функції множина точок розриву ніде не щільна, в той час як у функції Рімана вона всюди щільна. Множина всіх σ-неперервних функцій $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ідентична з множиною усіх поточкових границь так званих *стабільно збіжних послідовностей* неперервних функцій $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, у яких для кожного $y \in [0,1]$ існує такий номер n, що $g_{n+l}(y) = g_n(y)$ для кожного номера l, або, як кажуть, з стабільно першим класом Бера, який є власною частиною першого класу Бера. В [78] встановлено такий результат.

Теорема 13. Для функції $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ наступні умови рівносильні:

(i) існує така функція $f \in CC[0,1]^2$, що $g = If$;

(ii) функція g σ-неперервна;

(iii) функція g належить до стабільного першого класу Бера.

Там же отримано і загальніші результати, що стосуються інтегралів

$$g(y) = (If)(y) = \int\limits_X f(x,y)d\mu(x).$$

14. Пошарово рівномірна апроксимація нарізно неперервних функцій. Розглянуті вище результати стосувалися поточкової апроксимації нарізно неперервних функцій та їх аналогів. В останні роки на кафедрі математичного аналізу ЧНУ активно почала розроблятися тематика, в якій досліджується пошарово рівномірне наближення нарізно неперервних функцій, новий розділ теорії апроксимації.

Вихідною тут була проблема, яку поставили В.Михайлюк і О.Собчук [80, 81]: чи для кожної функції $f \in CB_1[0,1]^2$ існує така послідовність нарізно неперервних функцій $f_n : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, що $f_n(p) \to f(p)$ для кожного $p \in [0,1]^2$? Незважаючи на багаторічні зусилля математиків Чернівців, Львова і навіть Парижа, ця проблема до цього часу не розв'язана.

Позначимо символом $CP[0,1]^2$ множину функцій $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, для яких усі вертикальні x-розрізи $f^x : [0,1] \to \mathbb{R}$ поліноміальні і всі горизонтальні y-розрізи $f_y : [0,1] \to \mathbb{R}$ неперервні. Аналогічно до проблеми Михайлюка-Собчука я поставив таку задачу: чи для кожної функції $f \in CC[0,1]^2$ існує така послідовність функцій з $CP[0,1]^2$, що $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $[0,1]$ для кожного $x \in [0,1]$? Ця задача невдовзі була розв'язана у праці [82] з допомогою класичних многочленів Бернштейна

$$(B_n g)(y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k g(\frac{k}{n}) y^k (1-y)^{n-k}.$$

Теорема 14. Нехай $f \in CC[0,1]^2$ і $f_n(x,y) = (B_n f^x)(y)$ на $[0,1]^2$. Тоді $f_n \in C[0,1]^2 \cap CP[0,1]^2$ і $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $[0,1]$ для кожного $x \in [0,1]$.

Ця теорема підсилює теорему Лебеґа про включення $CC \subseteq B_1$ і з її допомогою можна дати елегантне коротке доведення теореми Бера про те, що для кожної нарізно неперервної функції $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ проекція $pr_X(D(f))$ її множини точок розриву $D(f)$ на вісь абсцис є множиною першої категорії. Подібний підхід, але з допомогою апроксимації ламаними (як у А.Лебеґа), застосував Т.Цудзі [83].

У зв'язку з теоремою 14 у роботі [82] було введено два означення. Компакт Y називається *компактом Бера*, якщо для кожного топологічного простору X виконується включення $C(X,C_p(Y)) \subseteq B_1(X,C_u(Y))$ і *компактом Бернштейна*, якщо тотожний оператор $I : C_p(Y) \to C_u(Y)$ належить до першого класу Бера $B_1(C_p(Y),C_u(Y))$. Тут $C_p(Y)$ – локально опуклий простір неперервних функцій $g : Y \to \mathbb{R}$ з топологією поточкової збіжності, а $C_u(Y)$ – банаховий простір неперервних функцій $g : Y \to \mathbb{R}$ з нормою $||g||_\infty = \max\limits_{y\in Y}|g(y)|$. Наступний результат з [82] дає цікаву характеризацію метризовних компактів.

Теорема 15. Для топологічного простору Y наступні умови еквівалентні:
(i) Y – метризовний компакт;
(ii) Y – компакт Бернштейна;
(iii) Y – компакт Бера.

Тематика праці [82] була значно розвинута в серії подальших праць [84-86], їй була присвячена кандидатська дисертація [52].

У зв'язку з цим виникла природна топологізація простору нарізно неперервних функцій $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ на добутку двох компактів X і Y з допомогою сукупності преднорм

$$||f||^x = ||f^x||_\infty, x \in X, \text{ і } ||f||_y = ||f_y||_\infty, y \in Y.$$

Встановлено, що відповідний локально опуклий простір $S(X\times Y)$ буде завжди повним і бочковим, але не берівським, якщо X і Y не мають ізольованих точок, побудовано ізоморфне вкладення $J : S(X \times Y) \to C_u(Y)^X \times C_u(X)^Y$ простору $S(X\times Y)$ у добуток сім'ї банахових просторів, з допомогою якого встановлено, що простір $S(X\times Y)$ при $X = Y = [0,1]$ не є суперповним. З'ясовано, що простір $P = P[0,1]^2$ усіх многочленів від двох змінних всюди щільний у просторі $S = S[0,1]^2$, а простір $C(X\times Y)$ всюди щільний в $S(X\times Y)$. Поставлені проблеми про секвенціальне замикання $\overline{P}^s$ простору P в S і секвенціальне замикання простору $C(X\times Y)$ в $S(X\times Y)$.Багато результатів щодо цих проблем отримано в праці [88], але так і не з'ясовано донині: чи для кожної нарізно неперервної функції $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ існує така послідовність многочленів $f_n : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, що $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $[0,1]$ для кожного $x \in [0,1]$ і $(f_n)_y \rightrightarrows f_y$ на $[0,1]$ для кожного $y \in [0,1]$? Цим питанням присвячені праці [89-93] і [71].

15. Квазінеперервні відображення та інші аналоги неперервності. Квазінеперервність нарізно неперервних функцій від двох дійсних змінних вперше відкрив В.Вольтерра. Про це свідчить у своїй дисертації Рене Бер [26,с.94], який вивів цю властивість з того, що нарізно неперервна функція має на кожній горизонталі $y = const$ всюди щільну множину точок неперервності. Квазінеперервність нарізно неперервних функцій $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ встановив Г.Ган, про це йшла мова раніше. Сам термін квазінеперервність увів С.Кемпістий [94], який встановив квазінеперервність нарізно квазінеперервних функцій $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ та багато інших властивостей.

Математиками XX століття було введено багато інших ослаблень неперервності: майже неперервність, ледь неперервність, майже ледь неперервність, майже квазінеперервність, тощо. Їх нараховується зараз понад 100. Деякі з них розглядаються в оглядах [95-97]. Різним типам квазінеперервності присвячена дисертація В.Нестеренка [46]. В працях [97-102] подано розв'язання деяких проблем, поставлених З.Пьотровським [95]. Найзагальніші результати, що стосуються проблеми Пьотровського щодо зв'язків між нарізною ледь неперервністю і майже ледь неперервністю, які розвивають результати праць [97-102], подані в статті В.Маслюченка і Н.Ровенко, що публікується у цьому спареному номері "Буковинського математичного журналу". Різним аналогам неперервності буде присвячена докторська дисертація В.Нестеренка, який отримав багато цікавих і важливих результатів на цю тему.

16. Перехідність і декомпозиція неперервності. Під декомпозицією неперервності розуміють теореми, які гарантують неперервність відображення при виконанні кількох інших умов. Можливо, першою з таких теорем була теорема Банаха про замкнений графік, яка твердить, що лінійне відображення $f : X \to Y$, що має замкнений графік і діє з банахового простору X у банаховий простір Y, буде неперервним. Таких теорем, зокрема, тих, в яких фігурує умова замкненості графіка зараз досить багато (див., наприклад, [103] і вказану там літературу).

В [104] було з'ясовано, що кожне неперервне за Стеллінґзом відображення $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком буде неперервним. Для цього було введено слабше поняття перехідності функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і з'ясовано, що перехідне і неперервне за Стеллінґзом відображення $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ буде неперервним. У праці [103] було введено поняття перехідного відображення $f : X \to Y$, що діє між топологічними просторами, і встановлена загальна теорема про декомпозицію неперервності з участю перехідності і слабкої властивості Дарбу, яка охоплює всі попередні результати на цю тему. В праці [105] було з'ясовано, що лінійне відображення $f : X \to Y$, що діє між топологічними векторними просторами, завжди має слабку властивість Дарбу, а тому перехідність у цій ситуації рівносильна неперервності. З цього результату випливає, що скінченновимірне лінійне відображення $f : X \to Y$ із замкненим графіком буде неперервним для довільних топологічних векторних просторів X і Y, що є розвитком відомої теореми про те, що лінійний функціонал $f : X \to \mathbb{K}$ із замкненим ядром обов'язково неперервний.

Зауважимо, що в [103] було побудовано приклад перехідної і скрізь розривної функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Питання про опис точок розриву перехідних функцій поки що відкрите.

17. Теорема Гана про напівнеперервні функції та її розвиток. Нагадаємо, що функція $f : X \to \mathbb{R}$, що задана на топологічному просторі X, називається *напівнеперервною зверху чи знизу в точці* x_0, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U точки x_0 в X, що для всіх $x \in U$ виконується нерівність $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ чи $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$ відповідно, і просто *напівнеперервною зверху чи знизу*, якщо вона є такою у кожній точці $x \in X$.

Ганс Ган у праці [106] довів таку теорему: для метричного простору X і довільних функцій $g : X \to \mathbb{R}$ і $h : X \to \mathbb{R}$, які напівнеперервні відповідно зверху і знизу і задовольняють умову $g(x) \leq h(x)$ на X, існує неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, така, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на X. Ж.Д'єдонне [107] переніс цей результат на паракомпактні простори, а Т.Тонґ [108, 109] і М.Катетов [110, 111] встановили такий результат.

Теорема 16 *(Гана-Д'єдонне-Тонґа-Катетова).* T_1-простір буде нормальним тоді і тільки тоді, коли для довільних функцій $g : X \to \mathbb{R}$ і $h : X \to \mathbb{R}$, таких, що $g(x) \leq h(x)$ на X, g – напівнеперервна зверху і h – напівнеперервна знизу, існує така неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на X.

Схема доведення цієї теореми подана в монографії Р.Енгелькінга [112, с.105]. Відомі також її аналоги: теорема Даукера-Катетова [110, 111, 113] і теорема Майкла [114]. Детальну інформацію на цю тему можна отримати з праць [115, 116].

18. Рівномірна відстань до простору неперервних функцій. Нехай X – довільний топологічний простір і $f : X \to \mathbb{R}$ – деяка функція і $\varnothing \neq E \subseteq \mathbb{R}^X$. Число $||f|| = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$ ми будемо називати *рівномірною нормою* функції f, а число $d(f, E) = \inf\limits_{g \in E} ||f - g||$ – рівномірною відстанню від f до функціонального класу E. При цьому ми трохи розширюємо звичну термінологію, бо і $||f||$, і $d(f, E)$ можуть набувати значення $+\infty$.

У праці Й.Бен'яміні та Й.Лінденштраусса [117, с.23] було доведено, що $d(f, C_b(X)) = \frac{1}{2}||\omega_f||$, де X – паракомпактний простір, $f : X \to \mathbb{R}$ – обмежена функція, ω_f – коливання функції f і $C_b(X)$ – простір неперервних обмежених функцій $g : X \to \mathbb{R}$. Доведення базувалося на теоремі Гана-Д'єдонне-Тонґа-Катетова, яку автори довели для паракомпактного простору з допомогою теореми Майкла про селекцію. Між тим, як ми бачили вище, ця теорема справджується для нормальних просторів і є для них характеристичною. Крім того, в [118], незалежно від [117], було знайдено рівномірну відстань $d(f, C(\mathbb{R}))$ до простору $C(\mathbb{R})$ всіх неперервних функцій $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ для деяких функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, зокрема, і для необмеженої функції $f(x) = [x]$. Тому постало питання про розширення результату Бен'яміні-Лінденштраусса. Це було здійснено в недавній праці [119], де з допомогою тієї ж теореми Гана-Д'єдонне-Тонґа-Катетова був отриманий такий результат.

Теорема 17. Нехай X – нормальний простір і $f : X \to \mathbb{R}$ – довільна функція. Тоді $d(f, C(X)) = \frac{1}{2}||\omega_f||$, причому існує така неперервна функція $g : X \to \mathbb{R}$, що $d(f, C(X)) = ||f - g||$.

Зауважимо, що Г.Ган [106] застосував свою теорему про напівнеперервні функції до доведення того, що для метричного простору X функція $f : X \to \mathbb{R}$, у якої $\omega_f(x) \leq k$, може бути подана у вигляді суми $f = g+h$ неперервної функції g і функції h, у якої $|h(x)| \leq \frac{k}{2}$ на X. Звідси легко виводиться, що $d(f, C(X)) \leq \frac{1}{2}||\omega_f||$. Оскільки обернену нерівність пояснити нескладно, то фактично вже у Г.Гана доведено, що $d(f, C(X)) = \frac{1}{2}||\omega_f||$ для метризовного простору X.

Теорема Гана-Д'єдонне-Тонґа-Катетова застосовувалася і в праці [87]. Можна довести, що для зростаючих напівнеперервних відповідно зверху і знизу функцій $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$, для яких $g(x) \leq h(x)$ на $[a, b]$ існує зростаюча неперервна функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, для якої $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на $[a, b]$. З допомогою цього можна встановити, що для кожної зростаючої функції $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ існує послідовність зростаючих неперервних функцій $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, така, що $f_n(x) \to f(x)$ на $[a, b]$. Цими питаннями під моїм керівництвом займається С.Петей, студент III курсу.

19. Діагоналі нарізно неперервних функцій. Ми вже зазначали, що Р.Бер у своїй дисертації [26] для дійсних змінних з'ясував, що функції першого класу і тільки вони є діагоналями нарізно неперервних функцій двох змінних. Ознайомившись з результатами Бера, В.Вольтерра запропонував пряму побудову нарізно неперервної функції f двох дійсних змінних з наперед заданою діагоналлю g першого класу. Як сповістив мені Ф.Мєдвєдєв, В.Вольтерра виклав свої міркування на цей рахунок у листі до П.Аппеля від 31.XII.1897, вони тепер опубліковані у праці П.Дюґака [120, с.359-361].

А.Лебеґ [28] продовжив дослідження Р.Бера і В.Вольтерри, розглянувши загальнішу задачу: як побудувати нарізно неперервну функцію $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, діагональ $g(x) = f(x, ..., x)$ якої збігається з заданою функцією $(n-1)$-го класу Бера. Цю побудову А.Лебеґ здійснює індуктивно: спочатку при $n = 2$, поміщаючи неперервні функції g_k, які апроксимують дану функцію g з першого класу, на паралельних прямих $|x - y| = \eta_k$, де $(\eta_k)_{k=1}^{\infty}$ – спеціальним чином підібрана спадна послідовність додатних чисел, що прямує до нуля, і застосовуючи далі лінійне інтерполювання, а потім для довільного n, розбираючи при доведенні індуктивного кроку лише перехід від $n = 2$ до $n = 3$. При цьому А.Лебеґ зауважує [71, с.203], що у 1899 році Р.Бер сповістив йому одну побудову, що йшла від В.Вольтерри і проходила у випадку $n = 2$, а не для довільного n, як про це помилково твердиться в [121, с.150].

Побудова Лебеґа використовує мову евклідової геометрії (прямі, площини, кути), яка на перший погляд видається для його конструкції дуже істотною. Принаймні Г.Ган, маючи вже досить великий досвід у роботі з абстрактними просторами, у своїй монографії [24, с.328] розглядає це питання лише для функції дійсних змінних, правда, подає його у значно детальнішому і повнішому вигляді, реалізувавши при цьому вказівки А.Лебеґа.

У той час, коли питання берівської класифікації нарізно неперервних відображень добутків топологічних просторів досить глибоко розроблялося потім багатьма математиками XX століття, задача про побудову нарізно неперервної функції з даною діагоналлю впродовж тривалого часу залишалася поза увагою і ми не знайшли в інших авторів будь-яких спроб розв'язати її в абстрактному випадку хоча б для метризовних просторів.

Лише порівняно недавно дослідження цієї задачі були відновлені у Чернівцях з моєї ініціативи. Спочатку було показано [122, 43, 56], що кожна функція $g : X \to \mathbb{R}$ першого класу Бера на топологічному просторі X з нормальним квадратом X^2, діагональ $\Delta_2 = \{(x, x) : x \in X\}$ якого має тип G_δ, є діагоналлю деякої нарізно неперервної функції $f : X^2 \to \mathbb{R}$. При цьому метод доведення, на відміну від застосованих А.Лебеґом і Г.Ганом міркувань, не був прив'язаний безпосередньо до геометрії площини, а використовував лему Урисона і техніку функціональної інтерполяції, яка раніше успішно застосовувалась для розвитку теореми Рудіна в [74]. Пізніше у [80, 81, 43] цей результат було узагальнено: за таких же умов на X для кожної функції $g : X \to \mathbb{R}$ скінченного класу n Бера існує функція $f : X^2 \to \mathbb{R}$ з діагоналлю g, яка неперервна відносно першої змінної і є берівського класу $n - 1$ відносно другої. Нарешті, в [123] була доведена

Теорема 18. При $n \geq 2$ для кожної функції $g : X \to \mathbb{R}$, яка належить до берівського класу $n - 1$ на топологічному просторі X з нормальним n-им степенем X^n і G_δ-діагоналлю $\Delta_n = \{(x, ..., x) : x \in X\}$, існує нарізно неперервна функція $f : X^n \to \mathbb{R}$ з діагоналлю g.

Тут же було дано іншу побудову для $n = 2$, яка використовує замість функціональної інтерполяції спеціальні розбиття одиниці. Таким чином, первісна ідея Лебеґа дістала свою природну топологічну форму, звільнившись від чужої їй евклідової одежі. Пізніше В.Михайлюк [124, 125] розвинув цю техніку, розглянувши побудову нарізно неперервних функцій з даним звуженням.

20. Діагоналі функцій різних класів. Недавно О.Карлова, В.Михайлюк і О.Собчук [126-128] отримали ряд чудових результатів щодо опису діагоналей нарізно точково ліпшицевих, нарізно абсолютно неперервних та функцій інших класів. Наведу для прикладу результат з [128].

Нехай X – топологічний простір і Z – метричний простір. Відображення $g : X \to Z$ називається відображенням *абсолютного першого класу Бера*, якщо існує така послідовність неперервних функцій $g_n : X \to Z$, що $g_n(x) \to g(x)$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |g_{n+1}(x) - g_n(x)|_Z < +\infty$ на X.

Теорема 19. Нехай X – проміжок в $\mathbb{R}$, Z – нормований простір і $g : X \to Z$ – відображення. Тоді наступні умови рівносильні:

(i) існує нарізно абсолютно неперервне відображення $f : X^2 \to Z$ з діагоналлю g;

(ii) відображення g належить до абсолютного першого класу Бера.

21. Прикінцеві зауваги. Як ми побачили у цій порівняно короткій статті, вплив Ганса Гана на розвиток досліджень з теорії функцій і функціонального аналізу у Чернівецькому університеті досить значний. При цьому чернівецьким математикам вдалося створити нові потужні методи, які дозволили розвинути результати Ганса Гана та інших математиків, а часом отримати і цілком нові результати і поставити оригінальні проблеми. Щоб написати повний огляд робіт з цієї таматики, що були опубліковані на кафедрі математичного аналізу ЧНУ, потребувалося би значно більшого об'єму, можливо, колись такий огляд буде написаний. Але і цей неповний аналіз показує, що традиції Ганса Гана, традиції сумлінної математичної праці у Чернівецькому університеті живуть і розвиваються.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Mayerhofer K. Hahs Hahn // Monatsh. Math. Phys. – 1934. – **41**. – S. 221 – 238.
2. Menger K. Hans Hahn // Ergebniss eines mathematischen Kolloquiums. – 1934. – №6. – S. 40 – 44.
3. Menger K. Hans Hahn // Fund. math. – 1935. – **24**. – S.317 – 320.
4. Frank Ph. Hans Hahn // Erkenntnis. – 1934. – **4**, №5. – S. 315 – 316.
5. Wirtinger W. Hans Hahn // Alm. Akad. Wiss. Wien. – 1936. – **85**. – S. 252 – 257.
6. Lense J. Hahs Hahn // Neue deutsche Biographie. 7. Band. – Berlin: Dunker and Humblot. – S. 506.
7. Wenig O. Verzeichniss des Professoren und Dozenten der Rheinischen Fridrich-Wilhelms-Universität zu Bonn 1818 – 1968. – Bonn: H.Bouvier u. Co Verlag, Ludvig Röhrscheid Verlag, 1968. – S. 103.
8. Бородін О.І., Бугай А.С. Біографічний словник діячів у галузі математики. – К.: Рад.школа, 1973. – 552 с.

9. Боголюбов А.Н. Математики и механики. Биографический справочник. – К.: Наукова думка, 1983. – 640 с.

10. Математический энциклопедический словарь. – М.: Сов.энц., 1988. – 848 с.

11. Einhorn R. Vertreter der Mathematik und Geometrie an den Wiener Hochschulen: Dissertation zur Erlangung eines Doktorgrades an der Technisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der TU in Wien, 1983.

12. Маслюченко В.К. Знайомство з Гансом Ганом. – Львів, 1992. – 66 с. – (Препр. / АН України. Ін-т прикл. проблем механіки і математики; № 23 – 90).

13. Маслюченко В.К. Знайомство з Гансом Ганом // Чернівці: Рута, 2004. – 92 с.

14. Маслюченко В.К. Знайомство з Гансом Ганом // Чернівці: Вид-во ЧНУ, 2014. – 108 с.

15. Маслюченко В.К. Ганс Ган і математики Чернівецького університету австрійських часів // Буковинський журнал. – 1994. – Ч. 1-2. – С. 144 – 151.

16. Маслюченко В.К. Друга сходинка до Ганса Гана, Міжнар. мат. конф., присв. пам. Ганса Гана (10–15 жовтня 1994, Чернівці). Тези доповідей. – Чернівці: Рута, 1994. – С. 98.

17. Маслюченко В.К. Друга сходинка до Ганса Гана, Матеріали міжнар. мат. конф., присв. пам. Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1995. – С.13-24.

18. Masljuĉenko V.K. Die Mathematikprofessoren der Universität Czernowitz unter der österreichiche Verwaltung // Die Bukovina: Vergangenheit und Gegenwart /hrsq. von I. Slawinski und I.P. Strelka. – Bern - Berlin - Frankfurt a.M. - New York - Paris - Wien: Lang, 1995. – S. 171 – 177.

19. Маслюченко В.К. Ганс Ган і розвиток досліджень з теорії функцій і функціонального аналізу в Чернівецькому університеті, Міжнар. конф. присв. 125 річн. від дня нар. Ганса Гана (27 червня – 3 липня 2004, Чернівці) Тези доповідей. – Чернівці, 2004. – С.62-63.

20. Маслюченко В.К. Розвиток ідей Ганса Гана у Чернівецькому університеті // Міжнар. конф., присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана, 30 червня-5 липня 2014р. Тези доповідей. – Чернівці, 2014. – С.105-110.

21. Hahn H. Empiricism, Logic and Mathematics. Philosophical Papers. edited by Brian McGuinness. – Dordrecht; Boston; London: D. Reidel Publishing Company, 1980.

22. Hahn H. Mathematische Werke in drei B. – Springer-Verlag, 1995-1997.

23. Hahn H. Theorie des reelen Funktionen. 1. Band. – Berlin: Verlag von Julius Springer, 1921. – VIII+600 S.

24. Hahn H. Reele Funktionen. 1. Teil. Punktfunktionen. – Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft M. B. H., 1932. – XI+415 S.

25. Hahn H., Rosenthal A. Set functions. – Albuquerque: The University of New Mexico Press., 1948. – IX+224 p.

26. Baire R. Sur les fonctions de variables reélles// Ann. Mat. Pura Appl., ser.3. – 1899. – **3**. – P.1-123.

27. Hahn H. Über Funktionen mehrerer Veränderlicher, die nach jeder einzelnen Veränderlichen stetig sind// Math. Z. – 1919. – 4. – S.306-319.

28. Lebesgue H. Sur les fonctions représentables analytiqment // Journ.de Math. sér 6. – 1905. – **1**. – P.139-216.

29. Baire R. Sur la représentation des fonctions discontinues // Acta Math. – 1906. – **30**. – P.1-47.

30. Breckenridge J.C., Nishiura T. Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces// Bull. Inst. Acad. Sinica. – 1976. – **4**, N2. – P.191-203.

31. Piotrowski Z. Continuity points in $\{x\} \times Y$// Bull. Soc. Math. France. – 1990. – **108.** – P.113-115.

32. Куратовский К. Топология. Т.1. – М.: Мир, 1966. – 594с.

33. Маслюченко В.К. Задача Діні та рівномірна неперервність// Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Вип.46. Математика. – Чернівці.: ЧДУ, 1999. – С.80-87.

34. Маслюченко В.К. Нарізно неперервні відображення і простори Кете // Дис....докт. фіз. - мат. наук. – Чернівці, 1999. – 345 с.

35. Vleck E.B. van. A proof of some theorems on pointwise discontinuous functions// Trans. Amer. Math. Soc. – 1907. – 8. – P.189-204.

36. Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. Сукупна неперервність і квазінеперервність горизонтально квазінеперервних відображень// Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, №12. – С.1711–1714.

37. Bögel K. Über partiell differenzierbare Funktionen// Math. Z. – 1926. – **25**. – S.490-498.

38. Березин Ф.А., Гвишиани А.Д., Горин Е.А., Кириллов А.А. Сборник задач по функциональному анализу. – М.: Изд-во Моск. ун-та., 1977. – 100с.

39. Медведев Ф.А. Очерки истории теории функций действительного переменного. – М: Наука., 1975. – 248с.

40. Маслюченко В.К. Совокупная и раздельная непрерывность// XI школа по теории операторов в функциональных пространствах. Ч.I. – Челябинск. – 1986. – С.68.

41. Архангельский А.В. Пространства функций в топологии поточечной сходимости и компакты// Успехи мат. наук. – 1984. – **39**, N5. – С.11-50.

42. Михайлюк В.В. Обернені задачі теорії нарізно неперервних відображень // Дис. ... канд. фіз.мат. наук: 01.01.01. – Чернівці. – 1994. – 82 с.

43. Собчук О.В. Берівська класифікація нарізно неперервних відображень та дискретні обернені задачі // Дис... канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці. – 1996.– 82 с.

44. Михайлюк В.В. Координатний метод і теорія нарізно неперервних відображень // Дис. ... доктора фіз.-мат. наук. – Чернівці. – 2009. – 333 с.

45. Маслюченко О.В. Побудова ω-первісних та різні аналоги компактних операторів // Дис. ... доктора фіз.-мат. наук. – Чернівці. – 2012. – 300 с.

46. Нестеренко В.В. Різні типи квазінеперервності та їх застосування // Дис... канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці. – 1999. – 111 с.

47. Маслюченко О.В. Коливання нарізно неперервних функцій і топологічні ігри // Дис... канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці. – 2002. – 149 с.

48. Карлова О.О. Берівська та лебеґівська класифікації векторнозначних і многозначних відображень // Дис... канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці. – 2006. – 137 с.

49. Фотій О.Г. Зв'язки між різними типами неперервності многозначних відображень // Дис... канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці. – 2007. – 124 с.

50. Герасимчук В.Г. Розриви і коливання нарізно диференційовних функцій // Дис... канд. фіз.-мат. наук. –

Чернівці. – 2008. – 122 с.
51. Філіпчук О.І. Нарізно неперервні відображення та їх аналоги зі значеннями в неметризовних просторах // Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці. – 2010. – 134 с.
52. Волошин Г.А. Нарізно неперервні відображення і теорія наближень // Дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.01.01. – Чернівці. – 2012. – 138 с.
53. Гайдукевич-Ратушна О.І. Функції Каратеодорі та властивість Скорца-Драґоні // Дис. ... канд. фіз.-мат.наук. – Чернівці. – 2013. – 112 с.
54. Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. Про розвиток одного результату Беґеля // Всеукр. наук. конф., присв. 70-річч. нар. проф. П.С.Казимірського (5–7 жовтня 1995, Львів). Тези доп. Ч.І. – Львів, 1995. – С.80.
55. Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. Горизонтальна квазінеперервність та її застосування // Чернів. ун-т. – Чернівці, 1996. – 15с. Деп. в УкрІНТЕІ 1.XI.96, №98–Ук96.
56. Маслюченко В.К., Михайлюк О.В., Собчук О.В. Дослідження про нарізно неперервні відображення // Матеріали міжнар. мат. конф., присв. пам. Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1995.– С.192–246.
57. Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. Точки сукупної неперервності та великі коливання // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, №6. – С.791–800.
58. Calbrix J., Troallic J.P. Applications séparément continues// C.R. Acad. Sc. Paris. Séc. A. – 1979. – **288**. – P.647-648.
59. Bouziad A., Troallic J.P. Lower quasicontinuity, joint continuity and related concepts // Topol. Appl. – 2010. – **157**, №18. – P. 2889-2894.
60. Maslyuchenko V., Nesterenko V. A new generalization of Calbrix–Troallic's theorem // Topol. Appl. – 2014. – **164**. – P.162-169.
61. Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Філіпчук О.І. Сукупна неперервність K_hC-функцій зі значеннями в просторах Мура // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, №11. – С.1539 – 1549.
62. Маслюченко В.К., Філіпчук О.І. Зв'язки між кліковістю та її аналогами // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Вип.528. Математика. – Чернівці: ЧНУ, 2010. – С.100-103.
63. Нестеренко В. В. Характеризація властивості Гана // Доповіді НАН України. – 2014. – № 2. – С.32-37.
64. Baire R. Sur les fonctions discontinues qui se rattachent aux fonctions continues// C.R. – 1898. – **126**. – P.1521-1523.
65. Маслюченко В.К. Простори Гана і задача Діні// Мат. методи і фіз-мех. поля. – 1998. – **41**, N4. – С.39-45.
66. Baire R. Sur la théorie générale de fonctions de variables réelles// C.R. – 1897. – **125**. – P.691-694.
67. Baire R. Sur les fonctions discontinues développables enséries de fonctions continues// C.R. – 1898. – **126**. – P.884-887.
68. Lebesque H. Sur l'approximation des fonctions// Bull. Sci. Math. – 1898. – **22**. – P.278-287.
69. Каланча А.К., Маслюченко В.К. Берівська класифікація векторнозначних нарізно неперервних функцій на добутках із скінченновимірними співмножником// Чернів. ун-т. – Чернівці, 1996. – 7с. – Деп. в ДНТБ України 12.VI.96, N1406-Ук96.
70. Каланча А.К., Маслюченко В.К. Берівська класифікація векторнозначних нарізно неперервних функцій на добутках із скінченновимірним співмножником// Зб. наук. пр. Кам'янець-Под. пед. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. (математика). – 1998. – **4**. – С.43-46.
71. Маслюченко О.В. Бочковість простору нарізно неперервних функцій // Міжнар. конф., присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана, 30 червня-5 липня 2014р. Тези доповідей. – Чернівці: ЧНУ, 2014. – С.117-118.
72. Глушко Г.А., Маслюченко В.К. Функції Гана і класифікація Бера// Мат.студії. –2011. – **36**, №1. – С.97-106.
73. Rudin W. Lebesgue first theorem// Math. Analysis and Aplications, Part B. Edited by Nachbin. Adv. in Math. Supplem. Studies 78. – Academic Press. – 1981. – P.741-747.
74. Маслюченко В.К., Собчук О.В. Берівська класифікація і σ-метризовні простори// Мат. студії. – 1994. – **3**. – С.95-101.
75. Banakh T. (Metrically) quarter-stratifiable spaces and their applications // Мат.студії. – 2002. – **18**, №1. – С.10-28.
76. Карлова О.О., Маслюченко В.К. Нарізно неперервні відображення зі значеннями в не локально опуклих просторах // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, №11. – С.1639–1645.
77. Karlova O., Maslyuchenko V., Mykhaylyuk V. Equiconnected spaces and Baire classification of separately continuous functions and their analogs// Cent. Eur. J. Math. – 2012. – **10**, №3. – 1042-1053.
78. Банах Т.О., Куцак С.М., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В. Прямі та обернені задачі берівської класифікації інтегралів, залежних від параметра //Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, №11. – С.1443–1457.
79. Maslyuchenko V. Connections between separate and joint properties of several variables functions // Internat. Conf. on Funct. Analysis and its Appl. Dedic. to the 110th ann. of Stefan Banach. May 28–31, 2002, Lviv. – P.135–136.
80. Михайлюк В.В., Собчук О.В. Функції з діагоналлю скінченного класу // Всеукр.наук.конф., присв. 70-річчю нар. проф. П.С.Казимірського (5-7 жовтня 1995). Тези доп. Ч.І. – Львів. – 1995. – С.82.
81. Михайлюк В.В., Собчук О.В. Функції з діагоналлю скінченного класу Бера // Мат.студії. – 2000. – **14**, №1. – С.23-28.
82. Власюк Г., *Маслюченко В.К.* Многочлени Бернштейна і нарізно неперервні функції. // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Вип.336–337. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С.52–59.
83. Tsuji M. On Baire's Theorem concerning a function $f(x, y)$, which is continuous with respect to each variable x and y // J.Math.Soc.Japan. – 1951. – **2**, №3-4. – P.210-212.
84. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. Про наближення нарізно неперервних функцій, 2π-періодичних відносно другої змінної//Карп. матем.публ. – 2010. – **2**, №1 – С. 4-14.
85. Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В. Про наближення нарізно і сукупно неперервних функцій//Карп. матем.публ. – 2010.– **2**, №2 – С.11-21.
86. Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Нестеренко О.Н. Про апроксимацію відображень зі значеннями у

просторі неперервних функцій//Карп. матем.публ. – 2012. – **4**, №1 – С.23-27.

87. Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В. Про пошарово рівномірне наближення нарізно неперервних функцій многочленами // Мат. вісник НТШ. – 2013. – **10**. – С. 135-158.

88. Maslyuchenko V., Voloshyn H. Closure of the set of polynomials in the space of separately continuous functions// Int. conf. ded to the 120th anniversary of S.Banach. Abstracts of Reports. – Lviv, 17-21 September, 2012. – P.97.

89. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. Про секвенціальне замикання поліномів у просторі нарізно неперервних функцій// Всеукр. наук.конф. "Алгебра, топологія, аналіз, стохастика"(АТАС - 2012), Микуличин, 20-23 вересня 2012. Тези доповідей. – Івано-Франківськ: 2012. – С. 3-5.

90. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. Топологізація простору нарізно неперервних функцій // Карп. матем. публ. – 2013. – **5**, №2. – С.199-207.

91. Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В. Про берівську категорію простору нарізно неперервних функцій // Всеукраїнська наук. конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(24 лютого - 2 березня 2014 р.). Тези доповідей. – Ів.-Франківськ: Прик. нац. ун-т. – 2014. – С.46-47.

92. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. Вкладення простору нарізно неперервних функцій у добуток банахових просторів // Міжнар. конф., присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана, 30 червня-5 липня 2014р. Тези доповідей. – Чернівці: ЧНУ. – 2014.– С.17-20.

93. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. Лінійна інтерполяція векторнозначних функцій та її застосування // Міжнар. конф., присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана, 30 червня-5 липня 2014р. Тези доповідей. – Чернівці: ЧНУ. – 2014.– С.20-23.

94. Kempisty S. Sur les fonctions quasicontinues// Fund. Math. – 1932. – **19**. – P.184-197.

95. Piotrowski Z. A survey of results concerning generalized continuity on topological spaces// Acta Math. Univ. Comen. – 1987-1988. – **52-53**. – P.91-110.

96. Neubrunn T. Quasi-continuity// Real Anal. Exch.. – 1988-1989. – **14**, N3. – P.259-306.

97. Natkaniez T. Almost continuity. - Bydgoszcz:Wyzcza Szkola Pedagogiczna w Bydgozczy. – 1992. – 131p.

98. Borsik J. On almost quasicontinuous functions // Math. Bohemica. – 1993. – **118**, №3. – P. 241-248.

99. Vancso O. On jointly somewhat nearly continuous functions // Acta Math. Univ. Comenianae. – 1994. – **63**, №2. – P. 241-245.

100. Вітренко О. В., Маслюченко В. К. Про нарізно ледь неперервні функції // Мат. студії. – 1996. – **6**. – С. 113-118.

101. Маслюченко В. К. Про нарізні і сукупні модифікації неперервності // Мат. студії. – 2006. – **25**, №2. – С. 213-218.

102. Маслюченко В., Ровенко Н. Модифікації теорем про зв'язки між нарізними і сукупними аналогами неперервності // International Conference "Complex analysis and related topics"(23-28 вересня 2013р.). Тези доповідей. – Львів. – 2013. – С.104-105.

103. Маслюченко В., Нестеренко В. Декомпозиція неперервності та перехідні відображення // Мат. вісн. НТШ. – 2011. – **8**. – С. 132-150.

104. Крецу В., Маслюченко В. Неперервність за Стеллінґзом, нарізна неперервність та функції з замкненим графіком // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Вип.349. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С.50–54.

105. Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. Слабка властивість Дарбу і перехідність лінійних відображень у топологічних векторних просторах // Карп. матем. публ. – 2013. – **5**, №1. – С. 79-88.

106. Hahn H. Über halbsstetige und unstetige Funktionen // Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. Math. - naturwiss. Kl. Abt. IIa. – 1917. – **126**. – P. 91 – 110.

107. Dieudonne J. Une generalisation des espaces compacts // J. de Math.Pyres et Appl. – 1944. – **23**. – P.65-76.

108. Tong H. Some characterizations of normal and perfectly normal spaces // Bull.Amer.Math.Soc. — 1948. — **54**. — P.65.

109. Tong H. Some characterizations of normal and perfectly normal spaces // Duke Math.J. — 1952. — **19**. — P.289-292.

110. Katetov M. On real-valued functions in topological spaces // Fund.Math. — 1952. — **38**. — P.85-91.

111. Katetov M. Correction to 'On real-valued functions in topological spaces' // Fund.Math. — 1953. — **40**. — P.203-205.

112. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986. — 752 с.

113. Dowker C. H. On countably paracompact spaces // Canad. J. Math. — 1951. — **3**. — P.219-224.

114. Michael E. Continuous selections I // Ann. of Math. — 1956. — **63**. — P.361–382.

115. Yamazaki K. The range of maps on classical insertion theorems // Acta Math. Hungar. — 2011. — **132**(1-2). — P.42-48.

116. Good C., Stares I. New proofs of classical insertion theorems // Comm. Math. Univ. Carolinae. — 2000. — **41**,№1. — P.139-142.

117. Benyamini Y., Lindenstrauss J. Geometric nonlinear functional analysis. V.1. — Amer.Math.Soc., 2000. — 488p.

118. Мельник В. Знаходження відхилень від функцій першого класу Бера до простору неперервних функцій // Матеріали студ. наук. конф. ЧНУ. 17 - 18 травня 2011. Фіз.-мат. науки. — Чернівці: ЧНУ, 2011. — С. 409 - 410.

119. Маслюченко В.К., Мельник В. С. Про рівномірне відхилення від простору неперервних функцій // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – **11**, №3: Теорія наближення функцій і суміжні питання/ Відп. ред. А. С. Романюк. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2014. – С.158-166.

120. Dugac P. Notes et documents sur la vie et l'oeuvre de René Baire// Arch. Hist. Exact. Sci. – 1976. – **15**, N4. – P.297-383.

121. Медведев Ф.А. Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX-XX вв. – М.: Наука. – 1976. – 232с.

122. Собчук О.В. Нарізно непервні функції з даною діагоналлю// Міжнар. мат. конф., присв. пам. Ганса Га-

на (10-15 жовтня 1994). Тези доповідей. - Чернівці: Рута, 1994. - С.139.

123. Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Собчук О.В. Побудова нарізно неперервної функції від n змінних з даною діагоналлю// Мат. студії. – 1999. – **12**, N1. – С.101-107.

124. Михайлюк В.В. Побудова нарізно неперервних функцій з даним звуженням // Міжнар.конф."Диф.рівн. і нелінійні коливання", 27-29 серпня 2001 р. Тези доповідей. – Київ. – 2001. – С.112.

125. Михайлюк В.В. Побудова нарізно неперервних функцій з даним звуженням // Укр.мат.журн. – 2003. **55**, №5. – С.716-721.

126.Karlova O., Mykhaylyuk V., Sobchuk O. Diagonals of separately continuous functions and their analogs // Topol. Appl. – 2013. – **160.** – P.1-8.

127. Михайлюк В.В., Собчук О.В. Діагоналі нарізно точково ліпшицевих функцій // Укр. мат. вісник. – 2013. – **10**, №3. – С.343-359.

128. Карлова О.О. Михайлюк В.В., Собчук О.В. Нарізно абсолютно неперервні відображення та їх діагоналі // Міжнар. конф., присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана, 30 червня-5 липня 2014р. Тези доповідей. – Чернівці: ЧНУ, 2014. – С.71-72.

129. Маслюченко В.К. Некоторые вопросы теории обобщённых пространств Кёте // Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 – Черновцы. – 1983. – 131с.