УДК 517.52

©2014 р. В.Ю. Слюсарчук

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

# ІНТЕГРАЛЬНІ ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ

Отримано нову інтегральну ознаку збіжності рядів.

We obtain a new integral test for convergence of series.

У даній статті наведено інтегральну ознаку, що дає змогу досліджувати на збіжність не тільки числові ряди, члени яких можуть мати довільні знаки, але й векторні та операторні ряди, а також послідовності.

**1. Інтегральні ознаки збіжності числових рядів.** Нехай $\mathbb{N}$ – множина всіх натуральних чисел, $\mathbb{C}$ – множина всіх комплексних чисел і $[b]$ – ціла частина числа $b$.

Важливою для теорії рядів є інтегральна ознака Маклорена–Коші, що зводить дослідження збіжності числових рядів із додатними монотонно незростаючими членами до дослідження збіжності невласних інтегралів.

**Теорема 1** (Інтегральна ознака Маклорена–Коші [1]). *Нехай: 1)* $a_n > 0$, $n \geqslant 1$*; 2)* $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ *– неперервна монотонно незростаюча функція і* $f(n) = a_n$, $n \geqslant 1$.

*Тоді числовий ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *і невласний інтеграл* $\int\limits_1^{+\infty} f(t)\,dt$ *одночасно збігаються або розбігаються.*

Для дослідження збіжності числових рядів, члени яких можуть бути довільними, зокрема, комплексними, можна використовувати наступну інтегральну ознаку.

**Теорема 2**. *Нехай: 1)* $a_n \in \mathbb{C}$, $n \geqslant 1$*; 2)* $f : [1, +\infty) \to \mathbb{C}$ *– неперервна функція і* $f(n) = a_n$, $n \geqslant 1$*; 3) невласний інтеграл*

$$\int\limits_1^{+\infty} (f(t) - f([t]))\,dt \qquad (1)$$

*збігається.*

*Тоді числовий ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *і невласний інтеграл* $\int\limits_1^{+\infty} f(t)\,dt$ *одночасно збігаються або розбігаються.*

Зазначимо, що *теорема 1 є окремим випадком теореми 2.* Справді, нехай $f(t)$ – довільна функція, що задовольняє умови теореми 1. Покажемо, що для цієї функції інтеграл (1) є збіжним. Розглянемо функцію

$$S(x) = \int\limits_1^x (f([t]) - f(t))\,dx, \quad x \geqslant 1.$$

Ця функція є монотонно зростаючою й обмеженою зверху, оскільки $f([t]) \geqslant f(t)$ для всіх $t \geqslant 1$ і для кожного $x \geqslant 2$ виконуються співвідношення

$$S(x) = \sum_{k=1}^{[x-1]} \int\limits_k^{k+1} (f([t]) - f(t))\,dt +$$

$$+ \int\limits_{[x]}^{x} (f([t]) - f(t))\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{[x-1]} (a_k - a_{k+1}) + (x - [x])(a_{[x]} - a_{[x]+1}) \leqslant$$

$$\leqslant (a_1 - a_{[x]}) + (a_{[x]} - a_{[x]+1}) \leqslant a_1.$$

Тому існує скінченна границя $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)$ і, отже, інтеграл (1) збігається. За теоремою 2 числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(t)\,dt$, що розглядаються в теоремі 1, одночасно збігаються або розбігаються.

Отже, теорема 1 випливає з теореми 2.

Зазначимо, що теорема 2 є окремим випадком загального твердження, що розглядатиметься у подальшому.

**2. Векторний аналог теореми 2.** Нехай $E$, $E_1$ і $E_2$ – банахові простори з нормами $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_{E_1}$ і $\|\cdot\|_{E_2}$ відповідно і $L(E_1,E_2)$ – банаховий простір лінійних неперервних операторів $A: E_1 \to E_2$ з нормою $\|A\|_{L(E_1,E_2)} = \sup\limits_{\|x\|_{E_1}=1} \|Ax\|_{E_2}$.

**Теорема 3**. *Нехай: 1) $a_n \in E$, $n \geqslant 1$; 2) $f: [1,+\infty) \to E$ – неперервне відображення і $f(n) = a_n$, $n \geqslant 1$; 3) збігається невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} (f(t) - f([t]))\,dt$.*

*Тоді векторний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(t)\,dt$ одночасно збігаються або розбігаються.*

**Доведення**. Завдяки першим двом умовам теореми справджується співвідношення

$$\int\limits_1^b f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{[b]-1} a_n +$$

$$+ \int\limits_1^{[b]} (f(t) - f([t]))\,dt + \int\limits_{[b]}^b f(t)\,dt, \quad b \geqslant 2. \quad (2)$$

Якщо інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(t)\,dt$ збігається, то існує границя $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b f(t)\,dt$. Тому $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{[b]}^b f(t)\,dt = 0$ і на підставі (2) та третьої умови теореми існує границя $\lim\limits_{b\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{[b]-1} a_n$.

Отже, із збіжності інтеграла $\int\limits_1^{+\infty} f(t)\,dt$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Навпаки, якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Завдяки другій та третій умовам теореми $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{[b]}^b \left(f(t) - a_{[b]}\right)\,dt = 0$ і тому $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{[b]}^b f(t)\,dt = 0$. Отже, кожний доданок правої частини (2) при $b \to +\infty$ має границю. Тому збігається інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(t)\,dt$.

Отже, із збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_1^{+\infty} f(t)\,dt$.

Теорему 3 доведено.

Зауважимо, що в теоремі 3 невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} (f(t) - f([t]))\,dt$ збігається, якщо збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{t\in(n,n+1]} \|f(t) - f([t])\|_E \qquad (3)$$

або у випадку диференційовного на множині $(1,+\infty)\backslash\mathbb{N}$ відображення $f$ збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{\tau\in(n,n+1)} \|f'(\tau)\|_E\,. \qquad (4)$$

Очевидно, що у випадку диференційовного на $(1,+\infty)$ відображення $f$ і монотонної на $(1,+\infty)$ функції $\|f'(t)\|_E$ збіжність ряду (4) рівносильна збіжності невласного інтеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \|f'(t)\|_E\ dt.$$

Очевидно також, що в багатьох випадках досліджувати на збіжність ряд (3) або ряд (4) легше, ніж досліджувати на збіжність інтеграл (1).

Окремим випадком теореми 3 є наступне твердження.

**Теорема 4**. *Нехай: $A_n \in L(E_1,E_2)$, $n \geqslant 1$; 2) $F: [1,+\infty) \to L(E_1,E_2)$ – неперервне відображення і $F(n) = A_n$, $n \geqslant 1$; 3) збігається невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} (F(t) - F([t]))\,dt$.*

*Тоді ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ *і невласний інтеграл* $\int\limits_1^{+\infty} F(t)\,dt$ *одночасно збігаються або розбігаються.*

**3. Множини рядів, до дослідження на збіжність яких застосовна теорема 3.** Справджується наступне твердження.

**Теорема 5**. *Для кожного ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *де* $a_n \in E$, *існує неперервне відображення* $f : [1, +\infty) \to E$, *для якого* $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, *і невласний інтеграл* $\int\limits_1^{+\infty} (f(t) - f([t]))\,dt$ *збігається.*

**Доведення.** Використаємо числові послідовності $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$, $(\delta_n)_{n\geqslant 1}$, для яких

$$0 < \varepsilon_n < 1, \quad n \geqslant 1,$$

$$\delta_n = \frac{\varepsilon_n}{\max\{1, \|a_n - a_{n+1}\|_E\}}, \quad n \geqslant 1,$$

і числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \tag{5}$$

збігається. Розглянемо неперервне відображення $f : [1, +\infty) \to E$, звуження $f|_{[n,n+1)}$ якого на $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, визначається співвідношеннями

$$f|_{[n,n+1)}(t) = a_n \tag{6}$$

для всіх $t \in [n, n+1-\delta_n]$ і

$$f|_{[n,n+1)}(t) = $$
$$= a_n + \frac{t - n - 1 + \delta_n}{\delta_n}(a_{n+1} - a_n) \tag{7}$$

для всіх $t \in [n + 1 - \delta_n, n + 1)$.

Очевидно, що $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Завдяки (6), (7) та збіжності ряду (5) невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} (f(t) - f([t]))\,dt$ збігається.

Теорему 5 доведено.

Із теореми 5 випливає, що *кожний ряд можна дослідити на збіжність за допомогою теорем 2, 3 або 4 при відповідному виборі відображень* $f$ *і* $F$.

Із теорем 3 і 5 випливає наступне твердження.

**Теорема 6.** *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *де* $a_n \in E$, *збігається тоді і тільки тоді, коли існує неперервне відображення* $f : [1, +\infty) \to E$, *для якого* $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, *і невласні інтеграли* $\int\limits_1^{+\infty} (f(t) - f([t]))\,dt$ *і* $\int\limits_1^{+\infty} f(t)\,dt$ *збігаються.*

**4. Приклад застосування теореми 2.** Дослідимо на збіжність знакозмінний ряд

$$\sum_{n=3^3}^{\infty} (\sin\ln\ln n) n^{-1} (\ln n)^{-1} (\ln\ln n)^{-p}, \tag{8}$$

де $p \in \mathbb{R}$. Використаємо функцію

$$f(t) = (\sin\ln\ln t) t^{-1} (\ln t)^{-1} (\ln\ln t)^{-p}.$$

Очевидно, що

$$f'(t) = (\cos\ln\ln t) t^{-2} (\ln t)^{-2} (\ln\ln t)^{-p} -$$
$$-(\sin\ln\ln t) t^{-2} (\ln t)^{-1} (\ln\ln t)^{-p} -$$
$$-(\sin\ln\ln t) t^{-2} (\ln t)^{-2} (\ln\ln t)^{-p} -$$
$$-p(\sin\ln\ln t) t^{-2} (\ln t)^{-2} (\ln\ln t)^{-p-1}.$$

Тому

$$|f'(t)| \leqslant (3+|p|) t^{-2} (\ln t)^{-1} (\ln\ln t)^{|p|+1}, \;\; t \geqslant 3^3.$$

Звідси випливає, що збігається ряд

$$\sum_{n=3^3}^{\infty} \sup_{\tau \in (n,n+1)} |f'(\tau)|$$

і, отже, збігається невласний інтеграл

$$\int_{3^3}^{+\infty} (f(t) - f([t]))\,dt.$$

Таким чином, завдяки теоремі 2 при кожному $p \in \mathbb{R}$ ряд (8) і невласний інтеграл

$$\int_{3^3}^{+\infty} (\sin\ln\ln t) t^{-1} (\ln t)^{-1} (\ln\ln t)^{-p}\,dt \tag{9}$$

поводять себе однаково в сенсі збіжності.

Досліджувати на збіжність інтеграл (9) легше, ніж ряд (8). Справді, використавши

для (9) заміну змінної $s = \ln\ln t$, отримаємо рівність

$$\int\limits_{3^3}^{+\infty} (\sin\ln\ln t)t^{-1}(\ln t)^{-1}(\ln\ln t)^{-p}\,dt =$$

$$= \int\limits_{\ln\ln 3^3}^{+\infty} (\sin s)s^{-p}\,ds.$$

Очевидно, що при $p > 0$ невласний інтеграл $\int\limits_{\ln\ln 3^3}^{+\infty} (\sin s)s^{-p}\,ds$ збігається за ознакою Діріхле [1].

При $p \leqslant 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, очевидно, справджується нерівність

$$\int\limits_{2n\pi+\pi/6}^{2n\pi+\pi/2} (\sin s)s^{-p}\,ds > \frac{\pi(2n\pi+\pi/6)^{|p|}}{6}$$

і тому

$$\int\limits_{2n\pi+\pi/6}^{2n\pi+\pi/2} (\sin s)s^{-p}\,ds \not\to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Отже, інтеграл $\int\limits_{\ln\ln 3^3}^{+\infty} (\sin s)s^{-p}\,ds$ при $p \leqslant 0$ розбігається.

Таким чином, інтеграл (9) збігається лише при $p > 0$. За теоремою 2 *числовий ряд* (8) *також збігається лише при* $p > 0$.

**5. Приклад застосування теореми 4.** Дослідимо на збіжність операторний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin\ln n)n^{-A}, \tag{10}$$

де $A \in L(E, E)$.

При дослідженні цього ряду крім теореми 4 також будемо використовувати наступні три твердження.

Нехай $\sigma(A)$ і $\partial\sigma(A)$ – спектр і границя спектра оператора $A$ відповідно.

**Теорема 7** [2]. *Якщо* $\lambda \in \partial\sigma(A)$, *то для кожного числа* $\varepsilon > 0$ *існує нормований вектор* $x \in E$ ($\|x\|_E = 1$), *для якого* $\|(A - \lambda I)x\|_E < \varepsilon$.

**Теорема 8** [2]. *Для того, щоб дійсному числу* $\rho$ *відповідало додатне число* $N_\rho$ *таке, щоб* $\|e^{tA}\|_{L(E,E)} \leqslant N_\rho e^{\rho t}$, $t \geqslant 0$, *необхідно, щоб* $\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda \leqslant \rho\}$, *і достатньо, щоб* $\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda < \rho\}$.

**Теорема 9** (Теорема Данфорда [2]). *Якщо функція* $\varphi(\lambda)$ *зі значеннями в* $\mathbb{C}$ *кусково-аналітична на* $\sigma(A)$, *то* $\sigma(\varphi(A)) = \varphi(\sigma(A))$.

Спочатку дослідимо ряд (10) у випадку

$$\sigma(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}. \tag{11}$$

Використаємо функцію

$$F(t) = (\sin\ln t)t^{-A}.$$

Очевидно, що ця функція задовольняє перші дві умови теореми 4 і

$$F'(t) = (\cos\ln t)t^{-I-A} - (\sin\ln t)At^{-I-A},$$

де $I$ – одиничний оператор. Також $F(t)$ задовольняє третю умову цієї теореми, оскільки $\sigma(-I - A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z < -1\}$, $t^{-I-A} = e^{-(\ln t)(I+A)}$ ($t \geqslant 1$) і за теоремою 8 для деяких чисел $\rho > 1$ і $N \geqslant 1$ виконується нерівність $\left\|t^{-I-A}\right\|_{L(E,E)} \leqslant Nt^{-\rho t}$, $t \geqslant 1$. Тому у випадку виконання співвідношення (11) ряд (10) і невласний інтеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} (\sin\ln t)t^{-A}\,dt \tag{12}$$

поводять себе однаково в сенсі збіжності.

Досліджувати на збіжність інтеграл (12) легше, ніж ряд (10), як це видно з подальшого. Справді, здійснивши в (12) заміну змінної $t = e^s$, отримаємо

$$\int\limits_{1}^{+\infty} (\sin\ln t)t^{-A}\,dt = \int\limits_{0}^{+\infty} (\sin s)e^{s(I-A)}\,ds.$$

За допомогою диференціювання легко перевіряється, що при $x \geqslant 1$

$$\left(I + (I-A)^2\right)\int\limits_{0}^{x} (\sin s)e^{s(I-A)}\,ds =$$

$$= e^{x(I-A)}((\sin x)(I-A) - (\cos x)I) + I. \tag{13}$$

Нехай

$$\sigma(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}. \tag{14}$$

Оскільки завдяки теоремі 9

$$\sigma(I - A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$$

(у цьому випадку $0 \notin \sigma\left(I + (I - A)^2\right)$ і оператор $I + (I - A)^2$ має неперервний обернений), то за теоремою 8 $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x(I-A)} = O$, де $O$ – нульовий оператор. Тому на підставі співвідношення (13)

$$\lim_{x \to +\infty} \left(I + (I - A)^2\right) \int_0^x (\sin s) e^{s(I-A)}\, ds = I.$$

Звідси та з оборотності оператора $I+(I-A)^2$ випливає, що

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x (\sin s) e^{s(I-A)}\, ds = \left(I + (I - A)^2\right)^{-1},$$

тобто збігається інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} (\sin s) e^{s(I-A)}\, ds$, а, отже, й інтеграл (12).

Отже, у випадку виконання співвідношення (14) ряд (10) збігаються (за теоремою 4).

Нехай тепер виконується співвідношення (11) і

$$\sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z \leqslant 1\} \neq \varnothing. \tag{15}$$

Покажемо, що у цьому випадку невласний інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} (\sin s) e^{s(I-A)}\, ds$ розбігається. Справді, на підставі (13) для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$\left(I + (I - A)^2\right) \int\limits_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} (\sin s) e^{s(I-A)}\, ds =$$

$$= e^{2n\pi(I-A)} \left(e^{\pi(I-A)} + I\right). \tag{16}$$

Оскільки для кожного числа $\mu \in \partial\sigma(A)$, для якого $0 < \operatorname{Re} \mu \leqslant 1$, за теоремою 7 існує послідовність $(x_m)_{m \geqslant 1}$ нормованих векторів, для якої $\lim\limits_{m \to \infty} \|(\mu I - A) x_m\|_E = 0$, то за теоремою 9 для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{m \to \infty} \left\| e^{2n\pi(I-A)} \left(e^{\pi(I-A)} + I\right) x_m - \right.$$

$$\left. - e^{2n\pi(1-\mu)} \left(e^{\pi(1-\mu)} + 1\right) x_m \right\|_E = 0.$$

Тому для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| e^{2n\pi(I-A)} \left(e^{\pi(I-A)} + I\right) \right\|_{L(E,E)} =$$

$$= \sup_{\|x\|_E = 1} \left\| e^{2n\pi(I-A)} \left(e^{\pi(I-A)} + I\right) x \right\|_E \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{m \to \infty} \left\| e^{2n\pi(I-A)} \left(e^{\pi(I-A)} + I\right) x_m \right\|_E =$$

$$= \left| e^{2n\pi(1-\mu)} \left(e^{\pi(1-\mu)} + 1\right) \right|. \tag{17}$$

Аналогічно

$$\left\| \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} (\sin s) e^{s(I-A)}\, ds \right\|_{L(E,E)} \geqslant$$

$$\geqslant \left| \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} (\sin s) e^{s(1-\mu)}\, ds \right|, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Якщо $\mu \notin \{1 + i, 1 - i\}$, то, очевидно,

$$e^{2n\pi(1-\mu)} \left(e^{\pi(1-\mu)} + 1\right) \not\to 0$$

при $n \to +\infty$. Тому завдяки (17)

$$e^{2n\pi(I-A)} \left(e^{\pi(I-A)} + I\right) \not\to O$$

при $n \to +\infty$ і на підставі (16) та обмеженості оператора $I + (I - A)^2$ також

$$\int\limits_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} (\sin s) e^{s(I-A)}\, ds \not\to O$$

при $n \to +\infty$. У випадку $\mu \in \{1 + i, 1 - i\}$

$$\left| \int\limits_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} (\sin s) e^{s(1-\mu)}\, ds \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} (\sin s) e^{\pm is}\, ds \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} (\sin s)(\cos s \pm i \sin s)\, ds \right| =$$

$$= \int\limits_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} (\sin s)^2\, ds = \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тому завдяки (18) також

$$\int\limits_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} (\sin s)e^{s(I-A)}\,ds \not\to O$$

при $n \to +\infty$ і, отже, у випадку виконання співвідношень (11) і (15) невласний інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} (\sin s)e^{s(I-A)}\,ds$ розбігається.

Таким чином, за теоремою 4 ряд (10) розбігається, якщо виконуються співвідношення (11) і (15).

Далі дослідимо на збіжність ряд (10) у випадку

$$\sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leqslant 0\} \neq \varnothing. \qquad (19)$$

Покажемо, що загальний член ряду не прямує до $O$ при $n \to \infty$. Справді, для кожної точки $\mu \in \partial\sigma(A)$, для якої $\operatorname{Re}\mu \leqslant 0$, за теоремою 7 існує послідовність $(x_m)_{m\geqslant 1}$ нормованих векторів, для якої

$$\lim_{m\to\infty} \|(\mu I - A)x_m\|_E = 0.$$

Тому

$$\lim_{m\to\infty} \left\|(n^{-A} - n^{-\mu}I)x_m\right\|_E = 0$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$ і

$$\begin{aligned}
&\left\|(\sin\ln n)n^{-A}\right\|_{L(E,E)} = \\
&= \sup_{\|x\|_E=1} \left\|(\sin\ln n)n^{-A}x\right\|_E \geqslant \\
&\geqslant \sup_{m\geqslant 1} \left\|(\sin\ln n)n^{-A}x_m\right\|_E \geqslant \\
&\geqslant \lim_{m\to\infty} \left\|(\sin\ln n)n^{-A}x_m\right\|_E = \\
&= \lim_{m\to\infty} \left\|(\sin\ln n)n^{-\mu}x_m\right\|_E = \\
&= |(\sin\ln n)n^{-\mu}| \geqslant |\sin\ln n|,
\end{aligned}$$

тобто

$$(\sin\ln n)n^{-A} \not\to O \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Тому операторний ряд (10) розбігається, якщо виконується співвідношення (19).

Таким чином, *ряд* (10) *збігається лише у випадку* $\sigma(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$.

Зазначимо, що інші ознаки збіжності рядів можна знайти, наприклад, в [3]–[6].

**6. Інтегральна ознака збіжності послідовностей.** Розглянемо довільну послідовність

$$(b_n)_{n\geqslant 1} \qquad (20)$$

елементів банахового простору $E$. Ця послідовність збігається тоді і тільки тоді, коли збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1} - b_n).$$

Тому на підставі теореми 5 для дослідження збіжності послідовності (20) можна використати теорему 3. Завдяки цій теоремі справджується наступне твердження.

**Теорема 10**. *Нехай: 1)* $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *– довільна послідовність елементів простору* $E$*; 2)* $f : [1, +\infty) \to E$ *– неперервне відображення і* $f(n) = b_{n+1} - b_n$*,* $n \geqslant 1$*; 3) збігається невласний інтеграл* $\int\limits_1^{+\infty} (f(t) - f([t]))\,dt$.

*Тоді послідовність* $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *та невласний інтеграл* $\int\limits_1^{+\infty} f(t)\,dt$ *одночасно збігаються або розбігаються.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Фихтенгольц Г.М.* Дифференциальное и интегральное исчисления, Т. 2. – М: Наука, 1966. – 800 с.

2. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом постранстве. – М: Наука, 1970. – 535 с.

3. *Слюсарчук В.Ю.* Загальні теореми про збіжність числових рядів. – Рівне: Вид-во РДТУ, 2001. – 240 с.

4. *Слюсарчук В.Ю.* Операторний аналог ознаки д'Аламбера // Математика сьогодні '09. – Київ: Вид-во „Освіта України“, 2009. – №15. – С. 101–115.

5. *Слюсарчук В.Ю.* Операторний аналог ознаки Коші // Мат. Студії. – 2010. – **33**, №1. – С. 97–100.

6. *Слюсарчук В.Ю.* Операторний аналог ознаки Бертрана // Мат. Студії. – 2011. – **35**, №2. – С. 181–195.