УДК 517.928

©2014 р. О.В. Тарасенко

Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя

ПРО ПОБУДОВУ АСИМПТОТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ В КРИТЕРІЇ ЯКОСТІ

Отримано результати, які стосуються побудови асимптотики розв'язку задачі оптимального керування процесом, який описується лінійною сингулярно збуреною системою диференціальних рівнянь з вироджуваною матрицею при похідних, у випадку простих елементарних дільників граничної в'язки матриць. Досліджується випадок виродженості головної матриці критерія якості. Задача зводиться до розгляду двоточкової крайової задачі, яка одержується після застосування принципу максимуму Понтрягіна. У ході дослідження використано відомі результати асимптотичного аналізу загального розв'язку лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженнями.

We obtain some results concerning the investigation of built an asymptotic solution of optimal control problem which is describing by a linear singularly perturbed system of differential equations with degenerate matrix of derivatives, in the case of simple elementary divisors. The case of degenerations of main matrix of criterion quality is suggested. The problem is taken to consideration of boundary-value problems, which turns out after the application of Pontryagin's maximum principle. For this purpose, it was used results of asymptotic analysis of the general solution for a linear singularly perturbed system of differential equations with degenerations.

У роботі вивчається задача про знаходження керування $u(t,\varepsilon)$, під дією якого система диференціальних рівнянь

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + C(t,\varepsilon)u, \qquad (1)$$

переходить із стану

$$x(0,\varepsilon) = x_1(\varepsilon) \qquad (2)$$

в стан

$$x(T,\varepsilon) = x_2(\varepsilon) \qquad (3)$$

за фіксований проміжок часу T, мінімізуючи квадратичний функціонал

$$J = \frac{1}{2\varepsilon^h}\int\limits_0^T (D(t,\varepsilon)u,u)\,dt \to \min_u, \qquad (4)$$

де $x(t,\varepsilon)$, $u(t,\varepsilon)$ — шукані n-вимірний вектор стану та m-вимірний вектор керування відповідно, $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ — дійсні квадратні матриці n-го порядку, $C(t,\varepsilon)$ — $(n\times m)$-матриця з дійсними елементами, $D(t,\varepsilon)$ — симетрична матриця m-го порядку, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ — малий параметр: $\varepsilon_0 \ll 1$; $h \in N$, $t\in[0;T]$.

Будемо вважати, що виконуються наступні умови:

1° Матриці $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$, $C(t,\varepsilon)$ і $D(t,\varepsilon)$ допускають на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра:

$$A(t,\varepsilon)\sim\sum_{k\ge0}\varepsilon^k A_k(t),\, B(t,\varepsilon)\sim\sum_{k\ge0}\varepsilon^k B_k(t),$$
$$C(t,\varepsilon)\sim\sum_{k\ge0}\varepsilon^k C_k(t),\, D(t,\varepsilon)\sim\sum_{k\ge0}\varepsilon^k D_k(t). \qquad (5)$$

2° Коефіцієнти $A_k(t)$, $B_k(t)$, $C_k(t)$, $D_k(t)$, $k=0,1,\ldots$, розвинень (5) нескінченно диференційовні на $[0;T]$.

3° Вектори початкового і кінцевого станів зображуються у вигляді розвинень

$$x_1(\varepsilon)\sim\sum_{k\ge0}\varepsilon^k x_k^{(1)},\; x_2(\varepsilon)\sim\sum_{k\ge0}\varepsilon^k x_k^{(2)}. \qquad (6)$$

4° $\det B_0(t)\equiv 0$, $\forall t\in[0;T]$.

5° Гранична в'язка матриць

$$A_0(t)-\lambda B_0(t) \qquad (7)$$

на відрізку $[0;T]$ має $n-1$ простих скінченних елементарних дільників $\lambda-\lambda_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, і один — нескінченний.

6° $\mathrm{Re}\lambda_i(t)<0$, $\forall t\in[0;T]$.

7° $\lambda_i(t)+\bar\lambda_j(t)\neq 0$, $\forall t\in[0;T]$, $i,j=\overline{1,n-1}$.

8° $\Big(B_1(t)\tilde\varphi(t),\tilde\psi(t)\Big)<0$, $\forall t\in[0;T]$, де $\tilde\varphi(t)$ — власний вектор матриці $B_0(t)$, що відповідає її нульовому власному значенню, $\tilde\psi(t)$ — відповідний власний вектор спряженої матриці $B_0^*(t)$.

9° Матриця $D(t,\varepsilon)$ додатно визначена на $[0;T]$, причому $\det D_0(t)\equiv 0$, $\mathrm{rank} D_0(t)=r$, $\forall t\in[0;T]$.

10° $\det\left(Q^*(t)D_1(t)Q(t)\right)\neq 0$, $\forall t\in[0;T]$, де $Q(t)=[q_1(t),\ldots,q_{m-r}(t)]$, $q_i(t)$, $i=\overline{1,m-r}$, — базисні вектори нуль-простору матриці $D_0(t)$.

11° $\det\left(Q^*(t)D_1(t)Q(t)\right)\neq 0$, $\forall t\in[0;T]$.

12° Область допустимих значень для керування $u(t,\varepsilon)$ збігається з усім заданим m–вимірним простором.

Аналогічна задача за умови вироджуваності критерія якості розглядалась у [1], але у більш простому випадку, коли матриця при похідних у системі рівнянь (1) одинична.

Наявність при похідних у системі рівнянь (1) матриці $B(t,\varepsilon)$, яка вироджується при $\varepsilon=0$, а також виродженість матриці $D(t,\varepsilon)$ в критерії якості вносить суттєві труднощі в розв'язання даної задачі, які вдається подолати, використовуючи результати асимптотичного аналізу загального розв'язку сингулярно збурених систем з виродженнями даного типу, здійсненого в роботах [2], [3].

За даних умов будемо шукати керування $u(t,\varepsilon)$ та відповідну траєкторію $x(t,\varepsilon)$ у вигляді розвинень за степенями малого параметра.

Незважаючи на виродженість матриці $B(t,0)=B_0(t)$, як показано в [2] за виконання умови 8° матриця $B(t,\varepsilon)$ неособлива при досить малих $\varepsilon>0$. Тому до задачі (1), (4) можна застосувати принцип максимуму Л.С. Понтрягіна [4].

Побудуємо функцію Гамільтона

$$H(t,x,p,u)=\varepsilon^{-h}(A(t,\varepsilon)x,p)+$$
$$+\varepsilon^{-h}((t,\varepsilon)u,p)-\frac{1}{2\varepsilon^h}(D(t,\varepsilon)u,u),$$

де p — n-вимірний вектор спряжених змінних.

Для мінімізації критерія (4) необхідно, щоб

$$\mathrm{grad}_u H=\varepsilon^{-h}C^*(t,\varepsilon)p-\varepsilon^{-h}D(t,\varepsilon)u=0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(B^*(t,\varepsilon)p\right)=-\mathrm{grad}_x H=-\varepsilon^{-h}A^*(t,\varepsilon)p.$$

Одержимо систему рівнянь

$$\begin{gathered}\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt}=A(t,\varepsilon)x+C(t,\varepsilon)u,\\ \varepsilon^h B^*(t,\varepsilon)\frac{dp}{dt}=-\Big(A^*(t,\varepsilon)+\\ +\varepsilon^h\left(B^*(t,\varepsilon)\right)'\Big)p,\\ 0=C^*(t,\varepsilon)p-D(t,\varepsilon)u.\end{gathered}\tag{8}$$

Увівши $(2n+m)$-вимірний вектор

$$y(t,\varepsilon)=\mathrm{col}(x(t,\varepsilon),p(t,\varepsilon),u(t,\varepsilon)),\tag{9}$$

співвідношення (8) запишемо у вигляді

$$\varepsilon^h\tilde B(t,\varepsilon)\dot y=\tilde A(t,\varepsilon)y,\tag{10}$$

де матриці $\tilde A(t,\varepsilon)$, $\tilde B(t,\varepsilon)$ зображуються у вигляді асимптотичних розвинень

$$\tilde A(t,\varepsilon)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\tilde A_k(t),\ \tilde B(t,\varepsilon)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\tilde B_k(t),\tag{11}$$

в яких

$$\tilde A_k(t)=$$
$$=\begin{pmatrix} A_k(t) & 0 & C_k(t)\\ 0 & -A_k^*(t)-(B_{k-h}^*(t))' & 0\\ 0 & C_k^*(t) & -D_k(t)\end{pmatrix},$$

$$\tilde B_k(t)=\begin{pmatrix} B_k(t) & 0 & 0\\ 0 & B_k^*(t) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$(k=0,1,2,\ldots)$, — блочні матриці, де символом 0 позначено нульові блоки відповідних розмірів. Крайові умови (2), (3) подамо у вигляді:

$$\begin{gathered} My(0,\varepsilon)+Ny(T,\varepsilon)= \\ =\begin{pmatrix} x_1(\varepsilon) \\ x_2(\varepsilon) \end{pmatrix}=y_0(\varepsilon), \end{gathered} \tag{12}$$

$$M=\begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, задача оптимального керування (1)–(4) зводиться до двоточкової крайової задачі (10), (12).

У даному випадку гранична в'язка матриць $\tilde{A}_0(t)-\lambda\tilde{B}(t)$ системи рівнянь (10) буде сингулярною, оскільки $\det\left(\tilde{A}_0(t)-\lambda\tilde{B}_0(t)\right)=(-1)^{n+m}\det\Big(A_0(t)-$ $-\lambda B_0(t)\Big)\det\Big(A_0^*(t)+\lambda B_0^*(t)\Big)\det D_0(t)\equiv 0$, $\forall t\in[0;T]$, $\lambda\in\mathbb{C}$. Але її регулярне "ядро"містить $2(n-1)$ простих скінченних елементарних дільників $\lambda-\lambda_i(t)$, $\lambda+\bar{\lambda}_j(t)$, $i,j=\overline{1,n-1}$ та $r+2$ — простих нескінченних. Крім того, оскільки

$$\mathrm{degdet}\left(\tilde{A}(t,\varepsilon)-\lambda\tilde{B}(t,\varepsilon)\right)=2n=\mathrm{rank}\tilde{B}(t,\varepsilon),$$

то система (10) задовольняє умову "ранг-степінь"[5]. Тому, як показано в [6], загальний розв'язок цієї системи являє собою лінійну комбінацію її $2n$ лінійно незалежних розв'язків. Згідно з [2] $2n-2$ розв'язки відповідають скінченним елементарним дільникам і два розв'язки — двом нескінченним елементарним дільникам, породжених в'язками $A_0-\lambda B_0$ і $A_0^*+\lambda B_0^*$.

Згідно з [2] розв'язки, що відповідають першій групі скінченних елементарних дільників $\lambda-\lambda_i(t)$, $i=\overline{1,n-1}$, будуються у вигляді

$$y(t,\varepsilon)=v_i(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t\lambda_i(\tau,\varepsilon)d\tau\right),$$

$$i=\overline{1,n-1}, \tag{13}$$

де $v_i(t,\varepsilon)$ — $(2n+m)$–вимірні вектори, $\lambda_i(t,\varepsilon)$ — скалярні функції, які зображуються формальними розвиненнями за степенями ε:

$$\begin{gathered} v_i(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_{ki}(t), \\ \lambda_i(t,\varepsilon)=\lambda_i(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\lambda_k^{(i)}(t). \end{gathered} \tag{14}$$

Поклавши

$$v_i(t,\varepsilon)=\mathrm{col}\left(v_i^{(1)}(t,\varepsilon);v_i^{(2)}(t,\varepsilon);v_i^{(3)}(t,\varepsilon)\right)$$

у відповідності зі структурою матриць $\tilde{A}(t,\varepsilon)$, $\tilde{B}(t,\varepsilon)$,

$$v_i^{(j)}(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_{ki}^{(j)}(t),\ j=\overline{1,3}, \tag{15}$$

і підставивши (13) у систему (10), отримаємо систему трьох векторних рівнянь

$$\begin{gathered} A(t,\varepsilon)v_i^{(1)}(t,\varepsilon)+C(t,\varepsilon)v_i^{(3)}(t,\varepsilon)= \\ =\lambda_i(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)v_i^{(1)}(t,\varepsilon)+ \\ +\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\left(v_i^{(1)}(t,\varepsilon)\right)'; \end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered} \Big[A^*(t,\varepsilon)+\lambda_i(t,\varepsilon)B^*(t,\varepsilon)+\varepsilon^h(B^*(t,\varepsilon))'+ \\ +\varepsilon^h B^*\frac{d}{dt}\Big]v_i^{(2)}(t,\varepsilon)=0; \end{gathered} \tag{17}$$

$$C^*(t,\varepsilon)v_i^{(2)}(t,\varepsilon)-D(t,\varepsilon)v_i^{(3)}(t,\varepsilon)=0. \tag{18}$$

Оскільки $\det\left(A_0^*(t)+\lambda_i(t)B_0^*(t)\right)\neq 0$, $\forall t\in[0;T]$, то друге рівняння цієї системи задовольняє лише нульовий вектор. Тоді з третього рівняння дістанемо, що й $v_i^{(3)}(t,\varepsilon)=0$. Отже,

$$v_i(t,\varepsilon)=\mathrm{col}\left(v_i^{(1)}(t,\varepsilon);0;0\right), \tag{19}$$

де вектор $v_i^{(1)}(t,\varepsilon)$ задовольняє рівняння

$$\begin{gathered} A(t,\varepsilon)v_i^{(1)}(t,\varepsilon)=\lambda_i(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)v_i^{(1)}(t,\varepsilon)+ \\ \varepsilon^h\left(B(t,\varepsilon)v_i^{(1)}(t,\varepsilon)\right)', \end{gathered}$$

що збігається з рівнянням, дослідженим у [2], з якого визначаються коефіцієнти формальних розвинень для лінійно незалежних розв'язків однорідної системи, яка відповідає (1). Тому коефіцієнти розвинень (15) для векторів $v_i^{(1)}(t,\varepsilon)$ і (14) — для функцій $\lambda_i(t,\varepsilon)$ визначаються за наступними рекурентними формулами, виведеними в [2, с. 92]:

$$\lambda_k^{(i)}(t) = -\left(g_{ki}^{(1)}(t), \psi_i(t)\right); \qquad (20)$$

$$\begin{gathered} v_{0i}^{(1)}(t) = \varphi_i(t), \\ v_{ki}^{(1)}(t) = H_i(t) b_{ki}^{(1)}(t), k = 1, 2, \ldots; \end{gathered} \qquad (21)$$

$$b_{ki}^{(1)}(t) = \lambda_k^{(i)}(t) B_0(t) \varphi_i(t) + g_{ki}^{(1)}(t); \qquad (22)$$

$$g_{ki}^{(1)}(t) = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{s=0}^{k-j} \lambda_j^{(i)}(t) B_s v_{k-s-j,i}^{(1)} +$$

$$+\lambda_i \sum_{s=1}^{k} B_s v_{k-s,i}^{(1)} - \sum_{s=1}^{k} A_s(t) v_{k-s,i}^{(1)} +$$

$$\sum_{s=0}^{k-h} B_s \left(v_{k-h-s,i}^{(1)}\right)', \, k = 1, 2, \ldots, \qquad (23)$$

де $\varphi_i(t), i = \overline{1, n-1}$, — власні вектори в'язки $A_0(t) - \lambda B_0(t)$, що відповідають її власним значенням $\lambda_i(t)$, $\psi_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, — власні вектори спряженої в'язки $A_0^*(t) - \lambda B_0^*(t)$, $H_i(t)$ — матриця, напівобернена до матриці $(A_0(t) - \lambda_i(t) B_0(t))$.

Що ж стосується розв'язків, які відповідають елементарним дільникам $\lambda + \bar{\lambda}_j(t)$, $j = \overline{1, n}$, то вони будуються у вигляді

$$\tilde{y}_i(t,\varepsilon) = \tilde{v}_i(t,\varepsilon) \exp\left(-\varepsilon^{-h} \int_t^T \tilde{\lambda}_i(\tau,\varepsilon) d\tau\right),$$

$$i = \overline{1, n}, \qquad (24)$$

де вектори $\tilde{v}_i(t,\varepsilon)$ і функції $\tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon)$ зображуються формальними розвиненнями

$$\begin{gathered} \tilde{v}_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{v}_{ki}(t), \, i = \overline{1, n} \\ \tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon) = -\bar{\lambda}_i(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{\lambda}_k^{(i)}(t). \end{gathered} \qquad (25)$$

У даному випадку процедура визначення коефіцієнтів розвинень (25) дещо ускладнюється, що обумовлено особливістю матриці $D_0(t)$.

Підставивши (24) у систему (10), введемо позначення $\tilde{v}_i(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left(\tilde{v}_i^{(1)}(t,\varepsilon), \varepsilon \tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon), \tilde{v}_i^{(3)}(t,\varepsilon)\right)$, а вектори $\tilde{v}_i^{(j)}(t,\varepsilon)$, $j = \overline{1, 3}$, подамо у вигляді розвинень

$$\tilde{v}_i^{(j)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{v}_{ki}^{(j)}(t), \, j = \overline{1, 3}. \qquad (26)$$

Тоді отримаємо рівняння

$$\begin{gathered} \tilde{A}(t,\varepsilon) \tilde{v}_i(t,\varepsilon) = \\ = \tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon) \tilde{B} \tilde{v}_i(t,\varepsilon) + \varepsilon^h \tilde{B} \tilde{v}_i'(t,\varepsilon), \end{gathered} \qquad (27)$$

яке запишеться у вигляді системи трьох векторних рівнянь

$$\begin{gathered} A(t,\varepsilon) \tilde{v}_i^{(1)}(t,\varepsilon) + C(t,\varepsilon) \tilde{v}_i^{(3)}(t,\varepsilon) = \\ = \tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon) B(t,\varepsilon) \tilde{v}_i^{(1)}(t,\varepsilon) + \\ + \varepsilon^h B(t,\varepsilon) \left(\tilde{v}_i^{(1)}(t,\varepsilon)\right)'; \end{gathered} \qquad (28)$$

$$-A^*(t,\varepsilon) \tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon) = \tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon) B^*(t,\varepsilon) \tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon) +$$

$$+ \varepsilon^h B^*(t,\varepsilon) \left(\tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon)\right)' +$$

$$+ \varepsilon^h \left(B^*(t,\varepsilon)\right)' \tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon); \qquad (29)$$

$$C^*(t,\varepsilon) \tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon) - D(t,\varepsilon) \tilde{v}_i^{(3)}(t,\varepsilon) = 0. \qquad (30)$$

Рівняння (29) збігається з рівнянням, з якого визначаються коефіцієнти формальних розвинень для лінійно незалежних розв'язків спряженої системи

$$\varepsilon^h \frac{d}{dt} \left(B^*(t,\varepsilon) y\right) = -A^*(t,\varepsilon) y. \qquad (31)$$

Тому, провівши міркування аналогічні до викладених у [2. с. 93], вектори $\tilde{v}_{ki}^{(2)}$, $k = 0, 1, \ldots$, і функції $\tilde{\lambda}_k^{(i)}$, $k = 1, 2, \ldots$, визначимо за рекурентними формулами:

$$\tilde{\lambda}_k^{(i)}(t) = -\bar{\lambda}_k^{(i)}(t), \, k = 1, 2, \ldots; \qquad (32)$$

$$\begin{gathered} \tilde{v}_{0i}^{(2)}(t) = \psi_i(t), \\ \tilde{v}_{ki}^{(2)}(t) = H_i^*(t) \tilde{b}_{ki}^{(2)}(t), \, k = 1, 2, \ldots; \end{gathered} \qquad (33)$$

$$\tilde{b}^{(2)}_{ki}(t)=\tilde{\lambda}^{(i)}_k(t)B^*_0\psi_i+\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-j}\tilde{\lambda}^{(i)}_j B^*_s\tilde{v}^{(2)}_{k-j-s,i}+$$

$$+\tilde{\lambda}_i\sum_{s=1}^{k}B^*_s\tilde{v}^{(2)}_{k-s,i}-\sum_{s=1}^{k}A^*_s(t)\tilde{v}^{(2)}_{k-s,i}-$$

$$-\sum_{s=0}^{k-h}B^*_s\left(\tilde{v}^{(2)}_{k-s-h,i}\right)'-\sum_{s=0}^{k-h}\left(B^*_s\right)'\tilde{v}^{(2)}_{k-s-h,i};$$

$(k=1,2,\ldots,\ i=\overline{1,n-1})$.

Підставивши відповідні розвинення (шукані — для векторів $\tilde{v}^{(1)}_i(t,\varepsilon)$, $\tilde{v}^{(3)}_i(t,\varepsilon)$ і знайдені — для вектора $\tilde{v}^{(2)}_i(t,\varepsilon)$ та функцій $\tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon)$) у рівняння (30), прирівняємо в них вирази при однакових степенях ε. Дістанемо

$$D_0(t)\tilde{v}^{(3)}_{0i}=0; \qquad (34)$$

$$D_0(t)\tilde{v}^{(3)}_{ki}=\tilde{b}^{(3)}_{ki}(t),\ k=1,2,\ldots, \qquad (35)$$

де

$$\tilde{b}^{(3)}_{ki}(t)=\sum_{s=0}^{k-1}C^*_s(t)\tilde{v}^{(2)}_{k-s-1,i}(t)-\sum_{s=1}^{k}D_s(t)\tilde{v}^{(3)}_{k-s,i}(t),$$

$$k=1,2,\ldots, \qquad (36)$$

звідки

$$\tilde{v}^{(3)}_{0i}=Q(t)\alpha^{(i)}_0(t); \qquad (37)$$

$$\tilde{v}^{(3)}_{ki}=D^-_0(t)\tilde{b}^{(3)}_{ki}(t)+Q(t)\alpha^{(i)}_k(t),\ k=1,2,\ldots, \qquad (38)$$

де $D^-_0(t)$ — напівобернена матриця до матриці D_0, $\alpha^{(i)}_k(t)=\operatorname{col}\left(\alpha^{(1)}_{ki}(t),\ldots,\alpha^{(m-r)}_{ki}(t)\right)$ — $(m-r)$-вимірні вектори, які визначимо з умови розв'язності рівнянь (35):

$$Q^*(t)\tilde{b}^{(3)}_{ki}(t)=0,\ k=1,2,\ldots. \qquad (39)$$

Згідно з (36), (37), (33) при $k=1$ ця умова набуває вигляду

$$Q^*D_1Q\alpha^{(i)}_0-Q^*C^*_0\psi_i=0,$$

звідки

$$\alpha^{(i)}_0(t)=\left(Q^*D_1Q\right)^{-1}Q^*C^*_0\psi_i \qquad (40)$$

і, отже,

$$\tilde{v}^{(3)}_{0i}(t)=Q\left(Q^*D_1Q\right)^{-1}Q^*C^*_0\psi_i. \qquad (41)$$

Поклавши в (39) $k+1$ замість k і підставивши в одержану рівність (37), (38), дістанемо необхідну рекурентну формулу для визначення векторів $\alpha^{(i)}_k(t)$:

$$\alpha^{(i)}_k=\left(Q^*D_1Q\right)^{-1}\Big[\sum_{s=0}^{k}Q^*C^*_s\tilde{v}^{(2)}_{k-s,i}-$$

$$-\sum_{s=2}^{k+1}Q^*D_s\tilde{v}^{(3)}_{k+1-s,i}-Q^*D_1D^-_0\tilde{b}^{(3)}_{ki}\Big],$$

$$k=1,2,\ldots. \qquad (42)$$

Аналогічно з рівняння (28) знайдемо

$$\tilde{v}^{(1)}_{0i}(t)=-R^{-1}_iC_0\tilde{v}^{(3)}_{0i}=-R^{-1}_iC_0D^{-1}_0C^*_0\psi_i,$$

$$i=\overline{1,n-1}; \qquad (43)$$

$$\tilde{v}^{(1)}_{ki}(t)=R^{-1}_i\tilde{b}^{(1)}_{ki},\ k=1,2,\ldots; \qquad (44)$$

$$\tilde{b}^{(1)}_{ki}(t)=-\bar{\lambda}_i\sum_{s=1}^{k}B_s\tilde{v}^{(1)}_{k-s,i}-$$

$$-\sum_{j=1}^{k}\sum_{s=0}^{k-j}\bar{\lambda}^{(i)}_jB_s\tilde{v}^{(1)}_{k-j-s,i}-\sum_{s=1}^{k}A_s\tilde{v}^{(1)}_{k-s,i}-$$

$$-\sum_{s=0}^{k}C_s\tilde{v}^{(3)}_{k-s,i}+\sum_{s=0}^{k-h}B_s\left(\tilde{v}^{(1)}_{k-h-s,i}\right)',$$

$$k=1,2,\ldots, \qquad (45)$$

де $R_i(t)=A_0(t)+\bar{\lambda}_i(t)B_0(t)$, $i=\overline{1,n-1}$.

Розв'язки, що відповідають двом нескінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць, про які йшла мова вище, шукатимемо у вигляді

$$y_1(t,\varepsilon)=w(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t\xi^{-1}(\tau,\varepsilon)d\tau\right), \qquad (46)$$

$$y_2(t,\varepsilon)=\tilde{w}(t,\varepsilon)\exp\left(-\varepsilon^{-h}\int_t^T\tilde{\xi}^{-1}(\tau,\varepsilon)d\tau\right), \qquad (47)$$

де $w(t,\varepsilon)$, $\tilde{w}(t,\varepsilon)$ — $(2n+m)$-вимірні вектори, $\xi(t,\varepsilon)$, $\tilde{\xi}(t,\varepsilon)$ — скалярні функції, які зображуються формальними розвиненнями

$$w(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^kw_k(t),\xi(t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\xi_k(t); \qquad (48)$$

$$\tilde{w}(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\tilde{w}_k(t), \tilde{\xi}(t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\tilde{\xi}_k(t). \quad (49)$$

Перший розв'язок побудуємо, поклавши

$$w(t,\varepsilon)=\mathrm{col}\left(w^{(1)}(t,\varepsilon);0;0\right), \quad (50)$$

де $w^{(1)}(t,\varepsilon)$ — n-вимірний вектор, який згідно з (48) зображується у вигляді формального ряду

$$w^{(1)}(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k w_k^{(1)}(t). \quad (51)$$

Підставивши (46), (50) у систему (10), отримаємо рівняння,досліджене в [2], до якого зводиться побудова відповідного розв'язку однорідної системи рівнянь, що відповідає (1). Тому, коефіцієнти розвинень (51), (48) визначаються за рекурентними формулами, отриманими в [2, с. 92]:

$$w_0^{(1)}(t)=\tilde{\varphi}(t); \quad (52)$$

$$\xi_1(t)=\left(B_1(t)\tilde{\varphi}(t),\tilde{\psi}(t)\right); \quad (53)$$

$$\xi_k(t)=-\left(d_k^{(1)}(t),\tilde{\psi}(t)\right),\ k=2,3,\ldots; \quad (54)$$

$$w_k^{(1)}(t)=G(t)a_k^{(1)}(t),\ k=1,2,\ldots; \quad (55)$$

де

$$d_k^{(1)}(t)=\sum_{s=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-s}\xi_s A_j w_{k-s-j}^{(1)}-\sum_{s=1}^{k}B_s w_{k-s}^{(1)}-$$
$$-\sum_{s=1}^{k-h}\sum_{j=0}^{k-h-s}\xi_s B_j\left(w_{k-h-s-j}^{(1)}\right)'; \quad (56)$$

$$a_k^{(1)}(t)=\xi_k A_0\tilde{\varphi}+d_k^{(1)}(t),\ k=1,2,\ldots, \quad (57)$$

де $G(t)=B_0^-(t)$.

При знаходженні другого розв'язку покладемо

$$\tilde{w}(t,\varepsilon)=\mathrm{col}\left(\tilde{w}^{(1)}(t,\varepsilon);\varepsilon\tilde{w}^{(2)}(t,\varepsilon);\tilde{w}^{(3)}(t,\varepsilon)\right), \quad (58)$$

$$\tilde{w}^{(j)}(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\tilde{w}_k^{(j)}(t),\ j=\overline{1,3}. \quad (59)$$

Підставивши (47), (58) у (10), дістанемо

$$B(t,\varepsilon)\tilde{w}^{(1)}(t,\varepsilon)=\tilde{\xi}(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)\tilde{w}^{(1)}(t,\varepsilon)+$$
$$+\tilde{\xi}(t,\varepsilon)C(t,\varepsilon)\tilde{w}^{(3)}(t,\varepsilon)-$$
$$-\varepsilon^h\tilde{\xi}(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)\left(\tilde{w}^{(1)}(t,\varepsilon)\right)'; \quad (60)$$

$$B^*(t,\varepsilon)\tilde{w}^{(2)}(t,\varepsilon)=-\tilde{\xi}(t,\varepsilon)A^*(t,\varepsilon)\tilde{w}^{(2)}(t,\varepsilon)-$$
$$-\varepsilon^h\tilde{\xi}(t,\varepsilon)\left(B^*(t,\varepsilon)\right)'\tilde{w}^{(2)}(t,\varepsilon)-$$
$$-\varepsilon^h\tilde{\xi}(t,\varepsilon)B^*(t,\varepsilon)\left(\tilde{w}^{(2)}(t,\varepsilon)\right)'; \quad (61)$$

$$D(t,\varepsilon)\tilde{w}^{(3)}(t,\varepsilon)=\varepsilon C^*(t,\varepsilon)\tilde{w}^{(2)}(t,\varepsilon). \quad (62)$$

Рівняння (61) визначає розв'язок n-вимірної спряженої системи рівнянь (31), який відповідає простому нескінченному елементарному дільнику її граничної в'язки матриць. Тому аналогічно до попередніх міркувань коефіцієнти розвинень (49) для функції $\tilde{\xi}(t,\varepsilon)$ і (59) — для вектора $\tilde{w}^{(2)}(t,\varepsilon)$ визначимо за формулами

$$\tilde{\xi}_k(t)=-\bar{\xi}_k(t),\ k=1,2,\ldots; \quad (63)$$

$$\begin{aligned}&\tilde{w}_0^{(2)}(t)=\tilde{\psi}(t),\\ &\tilde{w}_k^{(2)}(t)=G^*(t)\tilde{a}_k^{(2)}(t),\ k=1,2,\ldots;\end{aligned} \quad (64)$$

$$\tilde{a}_k^{(2)}(t)=\tilde{\xi}_k A_0^*\tilde{\psi}+\sum_{s=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-s}\tilde{\xi}_s A_j^*\tilde{w}_{k-s-j}^{(2)}+$$
$$+\sum_{s=1}^{k-h}\sum_{j=0}^{k-h-s}\tilde{\xi}_s\left(B_j^*\right)'\tilde{w}_{k-s-j-h}^{(2)}+$$
$$+\sum_{s=1}^{k-h}\sum_{j=0}^{k-h-s}\tilde{\xi}_s B_j^*\left(\tilde{w}_{k-h-s-j}^{(2)}\right)'-\sum_{j=1}^{k}B_j^*\tilde{w}_{k-j}^{(2)},$$
$$k=1,2,\ldots. \quad (65)$$

Розв'язавши рівняння (62) так само, як і (30), отримаємо формули, аналогічні (37), (38), (42), для знаходження коефіцієнтів розвинення для вектора $\tilde{w}^{(3)}(t,\varepsilon)$:

$$\tilde{w}_0^{(3)}(t)=Q\left(Q^*D_1Q\right)^{-1}Q^*C_0^*\tilde{\psi}; \quad (66)$$

$$\tilde{w}_k^{(3)}=D_0^-(t)\tilde{b}_k^{(3)}(t)+Q(t)\alpha_k(t); \quad (67)$$

$$\tilde{b}_k^{(3)}(t)=\sum_{s=0}^{k-1}C_s^*(t)\tilde{w}_{k-s-1}^{(2)}(t)-\sum_{s=1}^{k}D_s(t)\tilde{w}_{k-s}^{(3)}(t); \quad (68)$$

$$\alpha_k=\left(Q^*D_1Q\right)^{-1}\left[\sum_{s=0}^{k}Q^*C_s^*\tilde{w}_{k-s}^{(2)}-\right.$$
$$\left.-\sum_{s=2}^{k+1}Q^*D_s\tilde{w}_{k+1-s}^{(3)}-Q^*D_1D_0^-\tilde{b}_k^{(3)}\right],$$

$$k = 1, 2, \ldots. \tag{69}$$

Нарешті, підставивши розвинення (59), (49) у рівняння (60) і прирівнявши вирази при однакових степенях параметра та взявши до уваги (63), матимемо таку систему рівнянь для визначення коефіцієнтів відповідного розвинення для вектора $\tilde{w}^{(1)}(t, \varepsilon)$:

$$B_0 \tilde{w}_0^{(1)} = 0; \tag{70}$$

$$B_0 \tilde{w}_k^{(1)} = \tilde{a}_k^{(1)},\ k = 1, 2, \ldots; \tag{71}$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_k^{(1)}(t) = -\sum_{s=1}^{k} \sum_{j=0}^{k-s} \tilde{\xi}_s A_j \tilde{w}_{k-s-j}^{(1)} - \\ -\sum_{s=1}^{k} \sum_{j=0}^{k-s} \tilde{\xi}_s C_j \tilde{w}_{k-s-j}^{(3)} + \\ +\sum_{s=1}^{k-h} \sum_{j=0}^{k-h-s} \tilde{\xi}_s B_j \left(\tilde{w}_{k-s-j-h}^{(1)}\right)' - \\ -\sum_{s=1}^{k} B_s \tilde{w}_{k-s}^{(1)},\ k = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{72}$$

Ця система буде розв'язною тоді і тільки тоді, коли вектори $\tilde{a}_k^{(1)}(t)$ будуть ортогональними до вектора $\tilde{\psi}(t)$:

$$\left(\tilde{a}_k^{(1)}(t), \tilde{\psi}(t)\right) = 0,\ k = 1, 2, \ldots. \tag{73}$$

За виконання цієї умови вектори $\tilde{w}_k^{(1)}(t)$ визначатимемо за формулами

$$\tilde{w}_0^{(1)}(t) = c_0(t)\tilde{\varphi}(t); \tag{74}$$

$$\tilde{w}_k^{(1)}(t) = G(t)\tilde{a}_k^{(1)}(t) + c_k(t)\tilde{\varphi}(t),\ k = 1, 2, \ldots, \tag{75}$$

де $c_s(t)$, $s = 0, 1, \ldots$, — скалярні множники, за рахунок яких і задовольняється умова (73). Згідно з (72), (74), (66) при $k = 1$ умова (73) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} c_0 \left[\tilde{\xi}_1 (A_0 \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) + (B_1 \tilde{\varphi}, \tilde{\psi})\right] + \\ +\tilde{\xi}_1 \left(C_0 D_0^{-1} C_0^* \tilde{\psi}, \tilde{\psi}\right) = 0. \end{aligned} \tag{76}$$

Враховуючи (53) та умову 8°, знайдемо

$$c_0(t) = -\frac{1}{2}\left(C_0 D_0^{-1} C_0^* \tilde{\psi}, \tilde{\psi}\right). \tag{77}$$

Якщо всі $c_s(t)$ вже відомі при $s < k$, то для знаходження $c_k(t)$ використаємо умову (73) на $(k+1)$-у кроці. Поклавши в (73), (72) $k+1$ замість k, отримаємо

$$c_k(t) = -\frac{\left(\tilde{d}_k^{(1)}, \tilde{\psi}\right)}{2\xi_1}, \tag{78}$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{d}_k^{(1)}(t) = \sum_{s=2}^{k+1} \sum_{j=0}^{k-s+1} \tilde{\xi}_s A_j \tilde{w}_{k+1-s-j}^{(1)} + \\ +\bar{\xi}_1 \sum_{j=1}^{k} A_j \tilde{w}_{k-j}^{(1)} + \sum_{s=1}^{k+1} \sum_{j=0}^{k+1-s} \tilde{\xi}_s C_j \tilde{w}_{k+1-s-j}^{(3)} - \\ -\sum_{s=1}^{k+1-h} \sum_{j=0}^{k+1-h-s} \tilde{\xi}_s B_j \left(\tilde{w}_{k+1-s-j-h}^{(1)}\right)' + \\ +\sum_{s=2}^{k+1} B_s \tilde{w}_{k+1-s}^{(1)} + \bar{\xi}_1 A_0 G \tilde{a}_k^{(1)} + B_1 G \tilde{a}_k^{(1)} \end{aligned} \tag{79}$$

— вже відомий вектор згідно з припущенням індукції.

Після цього, враховуючи (66)–(69), з рівняння (60) за формулами (72), (74), (75), (78), (79) знайдемо коефіцієнти $\tilde{w}_k^{(1)}(t)$ відповідного розвинення для вектора $\tilde{w}^{(1)}(t, \varepsilon)$. Зокрема,

$$\tilde{w}_0^{(1)}(t) = -\frac{1}{2}\left(C_0 Q (Q^* D_1 Q)^{-1} Q^* C_0^* \tilde{\psi}, \tilde{\psi}\right)\tilde{\varphi}. \tag{80}$$

Побудувавши $2n$ формальних розв'язків системи (10), розв'язок крайової задачі (10), (12) будемо шукати у вигляді їх лінійної комбінації

$$\begin{aligned} y(t, \varepsilon) = \\ \sum_{i=1}^{n-1} v_i(t, \varepsilon) c^{(i)}(\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_i(\tau, \varepsilon) d\tau\right) + \\ +w(t, \varepsilon)^{(n)}(\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \xi^{-1}(\tau, \varepsilon) d\tau\right) + \\ +\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{v}_i(t, \varepsilon) \tilde{c}^{(i)}(\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_t^T \bar{\lambda}_i(\tau, \varepsilon) d\tau\right) + \end{aligned}$$

$$+\tilde{w}(t,\varepsilon)\tilde{c}^{(n)}(\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_{t}^{T}\bar{\xi}^{-1}(\tau,\varepsilon)d\tau\right), \tag{81}$$

де $c^{(i)}(\varepsilon)$, $c^{(j)}(\varepsilon)$, $i,j=\overline{1,n}$, — скалярні множники, які зображаються розвиненнями

$$c^{(i)}(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k^{(i)}(t),\ \tilde{c}^{(i)}(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{c}_k^{(i)}(t),$$

коефіцієнти яких знайдемо з крайової умови (12).

Підставивши (81) у (12) і знехтувавши експоненціально малими доданками, одержимо систему рівнянь у векторно-матричній формі

$$V^{(1)}(0,\varepsilon)c(\varepsilon)=x_1(\varepsilon), \tag{82}$$

$$\tilde{V}^{(1)}(T,\varepsilon)\tilde{c}(\varepsilon)=x_2(\varepsilon), \tag{83}$$

де

$$V^{(1)}(t,\varepsilon)=$$
$$=\left[v_1^{(1)}(t,\varepsilon),\ldots,v_{n-1}^{(1)}(t,\varepsilon);w^{(1)}(t,\varepsilon)\right]=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}V_k^{(1)}(t)\varepsilon^k,$$
$$\tilde{V}^{(1)}(t,\varepsilon)=$$
$$=\left[\tilde{v}_1^{(1)}(t,\varepsilon),\ldots,\tilde{v}_{n-1}^{(1)}(t,\varepsilon);\tilde{w}^{(1)}(t,\varepsilon)\right]=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{V}_k^{(1)}(t)\varepsilon^k,$$

$c(\varepsilon)=\operatorname{col}\left(c^{(1)}(\varepsilon),\ldots,c^{(n)}(\varepsilon)\right)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k\varepsilon^k$,
$\tilde{c}(\varepsilon)=\operatorname{col}\left(\tilde{c}^{(1)}(\varepsilon),\ldots,\tilde{c}^{(n)}(\varepsilon)\right)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\tilde{c}_k\varepsilon^k$.

Оскільки матриця

$$V_0^{(1)}(t)=[\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_{n-1}(t);\tilde{\varphi}(t)]$$

неособлива при всіх $t\in[0;T]$, то вектори $c_k=\operatorname{col}\left(c_k^{(1)},\ldots,c_k^{(n)}\right)$ з рівняння (82) однозначно визначаються за формулами

$$c_0=\left(V_0^{(1)}(0)\right)^{-1}x_0^{(1)}; \tag{84}$$

$$c_k=\left(V_0^{(1)}(0)\right)^{-1}\left(x_k^{(1)}-\sum_{s=1}^{k}V_s^{(1)}(0)c_{k-s}\right),$$
$$k=1,2,\ldots. \tag{85}$$

Згідно (43), (74), (77)

$$\tilde{V}_0^{(1)}(t)=-\Big[R_1^{-1}K_0\psi_1,\ldots,R_{n-1}^{-1}K_0\psi_{n-1},$$
$$\frac{1}{2}\Big(K_0\tilde{\psi},\tilde{\psi}\Big)\tilde{\varphi}\Big],$$

де $K_0(t)=C_0(t)D_0^{-1}(t)C_0^*(t)$.

Припустимо, що виконуються умови

$$\Big(K_0(t)\tilde{\psi}(t),\tilde{\psi}(t)\Big)\neq 0,\ \forall t\in[0;T]; \tag{86}$$

$$\begin{gathered}\det\Big[R_1^{-1}(T)K_0(T)\psi_1(T),\ldots,\\ R_{n-1}^{-1}(T)K_0(T)\psi_{n-1}(T),\tilde{\varphi}(T)\Big]\neq 0.\end{gathered} \tag{87}$$

Тоді $\det\tilde{V}_0^{(1)}(T)\neq 0$, і, отже, рівняння (83) також буде однозначно розв'язним. Вектори $\tilde{c}_k$, $k=0,1,\ldots$, з нього визначимо за рекурентними формулами

$$\tilde{c}_0=\left(\tilde{V}_0^{(1)}(T)\right)^{-1}x_0^{(2)}; \tag{88}$$

$$\tilde{c}_k=\left(\tilde{V}_0^{(1)}(T)\right)^{-1}\left(x_k^{(2)}-\sum_{s=1}^{k}\tilde{V}_s^{(1)}(T)\tilde{c}_{k-s}\right),$$
$$k=1,2,\ldots. \tag{89}$$

Асимптотичний характер побудованого розв'язку доводиться за тією ж схемою, що й у випадку нормальної системи, розглянутої в [1]. Тому, не проводячи детальних викладок, зупинимось на особливостях системи (1) та побудованого формального розв'язку відповідної крайової задачі (10), (12), які впливають на асимптотичну оцінку.

l-наближення $y_l(t,\varepsilon)$, утворене з (81) шляхом обривання відповідних розвинень на l-му члені, задовольняє систему (10) з точністю до $O\left(\varepsilon^l\right)$, а не $O\left(\varepsilon^{l+1}\right)$ у зв'язку з присутністю множників $\left(\sum_{k=1}^{l}\xi_k\varepsilon^k\right)^{-1}$ у виразі $\tilde{A}(t,\varepsilon)y_l(t,\varepsilon)-\varepsilon^h\tilde{B}(t,\varepsilon)\frac{dy_l(t,\varepsilon)}{dt}$. Крім того, як показано в [3], $\det B(t,\varepsilon)=\varepsilon\left(B_1\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\right)+O\left(\varepsilon^2\right)$, звідки випливає, що матриця $B^{-1}(t,\varepsilon)$ має полюс першого порядку по ε у точці $\varepsilon=0$. Цією ж властивістю володіє й матриця $D^{-1}(t,\varepsilon)$. Враховуючи ці обставини, приходимо до таких оцінок для шуканих вектора стану $x(t,\varepsilon)$ та керування $u(t,\varepsilon)$:

$$\|x(t,\varepsilon)-x_l(t,\varepsilon)\| \le c_1\varepsilon^{l-2-h},$$

$$\|u(t,\varepsilon)-u_l(t,\varepsilon)\| \le c_2\varepsilon^{l-3-h},$$

де

$$x_l(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{l}\varepsilon^k\sum_{s=0}^{k}v_{si}^{(1)}c_{k-s}^{(i)}\times$$
$$\times\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t\left(\lambda_i(\tau)+\sum_{k=0}^{l}\varepsilon^k\lambda_k^{(i)}(\tau)\right)d\tau\right)+$$
$$+\sum_{k=0}^{l}\varepsilon^k\sum_{s=0}^{k}w_s^{(1)}c_{k-s}^{(n)}\times$$
$$\times\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t\left(\sum_{k=1}^{l}\varepsilon^k\xi_k(\tau)\right)^{-1}d\tau\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{l}\varepsilon^k\sum_{s=0}^{k}\tilde{v}_{si}^{(1)}\tilde{c}_{k-s}^{(i)}\times$$
$$\times\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_t^T\left(\bar{\lambda}_i(\tau)+\sum_{k=0}^{l}\varepsilon^k\bar{\lambda}_k^{(i)}(\tau)\right)d\tau\right)+$$
$$+\sum_{k=0}^{l}\varepsilon^k\sum_{s=0}^{k}\tilde{w}_s^{(1)}\tilde{c}_{k-s}^{(n)}\times$$
$$\times\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_t^T\left(\sum_{k=1}^{l}\varepsilon^k\bar{\xi}_k(\tau)\right)^{-1}d\tau\right),\quad(90)$$

$$u_l(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{l}\varepsilon^k\sum_{s=0}^{k}\tilde{v}_{si}^{(3)}\tilde{c}_{k-s}^{(i)}\times$$
$$\times\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_t^T\left(\bar{\lambda}_i(\tau)+\sum_{k=0}^{l}\varepsilon^k\bar{\lambda}_k^{(i)}(\tau)\right)d\tau\right)+$$
$$+\sum_{k=0}^{l}\varepsilon^k\sum_{s=0}^{k}\tilde{w}_s^{(3)}\tilde{c}_{k-s}^{(n)}\times$$
$$\times\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_t^T\left(\sum_{k=1}^{l}\varepsilon^k\bar{\xi}_k(\tau)\right)^{-1}d\tau\right).\quad(91)$$

Підсумовуючи викладене, приходимо до наступної теореми.

Теорема. *Якщо виконуються умови* 1°–12°, *(86), (87), то існує єдиний вектор керування* $u(t,\varepsilon)$, *який виражається асимптотичною формулою*

$$u(t,\varepsilon)=u_l(t,\varepsilon)+O\left(\varepsilon^{l-3-h}\right),$$

що переводить систему (1) із стану $x_1(\varepsilon)$ *в стан* $x_2(\varepsilon)$, *мінімізуючи функціонал (4), де* $u_l(t,\varepsilon)$ *зображується у вигляді розвинення (91), коефіцієнти якого знаходяться за формулами (36)–(38), (40), (42), (66)–(69). Відповідна траєкторія, за якою здійснюється цей перехід, виражається асимптотичною формулою*

$$x(t,\varepsilon)=x_l(t,\varepsilon)+O\left(\varepsilon^{l-2-h}\right),$$

де вектор $x_l(t,\varepsilon)$ *зображується розвиненням (90), коефіцієнти якого знаходяться за формулами (20)–(23), (43)–(45), (52)–(57), (74), (75), (77)–(79), (37), (38), (40), (42), (66)–(69).*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Тарасенко О. В.* Про асимптотичний розв'язок лінійної сингулярно збуреної задачі оптимального керування з виродженням // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: Математика і інформатика. – 2013. – **24**, N2. – С. 193-205.
2. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.
3. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. – К.: Вища шк., 1991. – 207 с.
4. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г. Гамкрелидзе Р. В. Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. – 392 с.
5. *Бояринцев Ю. Е., Данилов В. А., Логинов А. А., Чистяков В. Ф.* Численные методы решения сингулярных систем. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. – 223 с.
6. *Бояринцев Ю. Е., Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы численного решения и исследования. – Новосибирск: Наука, 1998. – 222 с.