УДК 517.53

©2014 р. Ю. С. Трухан, М. М. Шеремета

Львівський національний університет імені Івана Франка

ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ ВЕБЕРА

Досліджено зростання, близькість до опуклості, опуклість та обмеженість l-індексу розв'язків рівняння Вебера $w'' - (\frac{z^2}{4} - \nu - \frac{1}{2})w = 0$ при $\nu \neq \frac{1}{2}$.

Growth, convexity, close-to-convexity and the l-index boundedness of the solutions of Weber equation $w'' - (\frac{z^2}{4} - \nu - \frac{1}{2})w = 0$ if $\nu \neq -\frac{1}{2}$ are investigated.

1. Вступ. Нехай

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \qquad (1)$$

– ціла функція, а l – додатна неперервна на $[0, +\infty)$ функція. Функція f називається функцією обмеженого l-індексу [1], якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n! l^n(|z|)} \leq \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k! l^k(|z|)} : 0 \leq k \leq N\right\}. \qquad (2)$$

Найменше з таких чисел N називається l-індексом функції f і позначається через $N(f, l)$.

Для $G \subseteq \mathbb{C}$ нехай $N(f, l; G)$ – l-індекс функції f в G, тобто найменше з таких чисел $N \in \mathbb{Z}_+$, що (2) виконується для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in G$.

Аналітична однолиста в крузі $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функція (1) називається опуклою, якщо $f(\mathbb{D})$ – опукла область. Умова $\mathrm{Re}\,\{1 + +zf''(z)/f'(z)\} > 0\,(z \in \mathbb{D})$ є необхідною і достатньою [2, с.203] для опуклості f. Функція f називається [2, с.583] близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, якщо існує опукла в $\mathbb{D}$ функція Φ така, що $\mathrm{Re}\,(f'(z)/\Phi'(z)) > 0\,(z \in \mathbb{D})$. Близька до опуклої функція f характеризується тим, що зовнішність G області $f(\mathbb{D})$ можна заповнити променями L, що виходять з ∂G і повністю лежать в G. Кожна близька до опуклої функція є однолистою в $\mathbb{D}$, і тому $f_1 \neq 0$.

Рівнянням Вебера називається диференціальне рівняння

$$w'' - \left(\frac{z^2}{4} - \nu - \frac{1}{2}\right) w = 0. \qquad (3)$$

Припустимо, що $\nu \neq \frac{1}{2}$ і знайдемо розв'язок рівняння (3) у вигляді (1). Оскільки

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)f_{n+2}z^n - \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2}z^n + \\ + \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = 0,$$

то $2f_2 + (\nu + \frac{1}{2})f_0 = 0$, $6f_3 + (\nu + \frac{1}{2})f_1 = 0$ і $(n+2)(n+1)f_{n+2} = -(\nu + \frac{1}{2})f_n + \frac{1}{4}f_{n-2}$ при $n \geq 2$. Бачимо, що всі коефіцієнти з парними індексами визначаються через f_0, а коефіцієнти з непарними індексами – через f_1. Тому, розв'язок рівняння (3) можна записати у вигляді

$$w(z) = C_1\varphi(z^2) + C_2 z\psi(z^2).$$

Нехай $w(z) = \varphi(z^2)$. Тоді

$$w'(z) = 2z\varphi'(z^2),\ w''(z) = 2\varphi'(z^2) + 4z^2\varphi''(z^2),$$

і отже, рівняння (3) у цьому випадку має вигляд

$$4z^2\varphi''(z^2) + 2\varphi'(z^2) - \left(\frac{z^2}{4} - \nu - \frac{1}{2}\right)\varphi(z^2) = 0.$$

Після заміни z^2 на z отримаємо

$$4z\varphi''(z) + 2\varphi'(z) - \left(\frac{z}{4} - \nu - \frac{1}{2}\right)\varphi(z) = 0. \qquad (4)$$

Якщо ж припустимо, що $w(z) = z\psi(z^2)$, то подібно отримаємо

$$4z\psi''(z) + 6\psi'(z) - \left(\frac{z}{4} - \nu - \frac{1}{2}\right)\psi(z) = 0. \tag{5}$$

Знайдемо рекурентну формулу для знаходження коефіцієнтів функції $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n z^n$, яка є розв'язком рівняння (4). Оскільки

$$4\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{n+1}(n+1)nz^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{n+1}(n+1)z^n + \left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n z^n - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{n-1}z^n = 0,$$

то прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях z, маємо $2\varphi_1 + (\nu+\frac{1}{2})\varphi_0 = 0$ і $2(n+1)(2n+1)\varphi_{n+1} + (\nu+\frac{1}{2})\varphi_n - \frac{1}{4}\varphi_{n-1} = 0$ при $n \geq 1$. Зауважимо, що якщо $\varphi_0 = 0$, то $\varphi(z) \equiv 0$. Тому покладемо $\varphi_0 = 1$. Тоді

$$\varphi_1 = -\frac{2\nu+1}{4}, \quad \varphi_n = -\frac{2\nu+1}{4n(2n-1)}\varphi_{n-1} + \frac{1}{8n(2n-1)}\varphi_{n-2}, \quad (n \geq 2). \tag{6}$$

Подібно для коефіцієнтів функції $\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_n z^n$, яка є розв'язком рівняння (5), отримуємо $6\psi_1 + (\nu+\frac{1}{2})\psi_0 = 0$ і $2(n+1)(2n+3)\psi_{n+1} + (\nu+\frac{1}{2})\psi_n - \frac{1}{4}\psi_{n-1} = 0$ при $n \geq 1$. Якщо покладемо $\psi_0 = 1$, то

$$\psi_1 = -\frac{2\nu+1}{12}, \quad \psi_n = -\frac{2\nu+1}{4n(2n+1)}\psi_{n-1} + \frac{1}{8n(2n+1)}\psi_{n-2}, \quad (n \geq 2). \tag{7}$$

Позначимо для зручності $a = |2\nu+1|$.

2. Обмеженість l-індексу. Дослідимо обмеженість l-індексу функцій $\varphi(z)$ та $\psi(z)$. Для цього скористаємося такою лемою, доведеною в [3].

Лема 1. *Якщо функція (1) аналітична в* $\overline{\mathbb{D}}_R = \{z : |z| \leq R\}$, $f_0 = 1$ *і*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|R^n \leq a(R) < 1, \tag{8}$$

то $N(f, l; \mathbb{D}_R) \leq 1$ *з*

$$l(|z|) = \frac{1+a(R)}{(1-a(R))(R-|z|)}.$$

Якщо $z \in \mathbb{D}_{R/2}$, то $R - |z| \geq R/2$ і з леми 1 випливає, що $N(f, l; \mathbb{D}_{R/2}) \leq 1$ з $l(|z|) \equiv \dfrac{2(1+a(R))}{R(1-a(R))}$, бо якщо $N(f, l_*, G) \leq N$ і $l_*(r) \leq l^*(r)$, то неважко довести [1, с. 23], що $N(f, l^*, G) \leq N$. Тому правильна наступна лема.

Лема 2. *Якщо функція (1) ціла і* $f_0 = 1$, *то для кожного* $R \in (0, +\infty)$ *за умови (8) правильна нерівність* $N(f, l; \mathbb{D}_{R/2}) \leq 1$ *з* $l(|z|) \equiv \dfrac{2(1+a(R))}{R(1-a(R))}$.

Використовуючи (6), маємо

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k|R^k \leq |\varphi_1|R + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{a|\varphi_{k-1}|}{4k(2k-1)} + \frac{|\varphi_{k-2}|}{8k(2k-1)}\right)R^k = \frac{aR}{4} + \frac{R^2}{48} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{aR}{4(k+1)(2k+1)}|\varphi_k|R^k + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{R^2}{8(k+2)(2k+3)}|\varphi_k|R^k,$$

тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{aR}{4(k+1)(2k+1)} - \frac{R^2}{8(k+2)(2k+3)}\right)|\varphi_k|R^k \leq \frac{aR}{4} + \frac{R^2}{48}. \tag{9}$$

Оскільки

$$\frac{aR}{4(k+1)(2k+1)} + \frac{R^2}{8(k+2)(2k+3)} \leq \frac{aR}{24} + \frac{R^2}{120},$$

то за умови

$$\frac{aR}{24} + \frac{R^2}{120} < 1 \tag{10}$$

з (9) маємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| R^k \le \frac{(aR/4)+(R^2/48)}{1-(aR/24)-(R^2/120)}.$$

Тому, щоб застосувати лему 2, потрібно, щоб виконувалась умова

$$\frac{aR}{4}+\frac{R^2}{48}+\frac{aR}{24}+\frac{R^2}{120}=\frac{7R(10a+R)}{240}<1,$$

із виконання якої випливає і виконання умови (10).

Нехай $a \ge \frac{14}{10}$. Покладемо, наприклад, $R = R_1 = \frac{15}{10a+1} \le 1$. Тоді $R_1^2 \le R_1$ і $a(R_1) = \frac{60a+5}{150a+14} < 1$, а $l_1(|z|) = \frac{2(1+a(R_1))}{R_1(1-a(R_1))} = \frac{2(210a+19)}{135} = \frac{28}{9}a + \frac{38}{135}$. Тобто, $N(\varphi, l_1; \mathbb{D}_{R_1/2}) \le 1$ з $l_1(|z|) \equiv \frac{28}{9}a+\frac{38}{135}$.

Якщо $a < \frac{14}{10}$, то покладемо $R = R_2 = 1$. Тоді $a(R_2) = \frac{60a+5}{238-10a} < \frac{89}{224} < 1$, а $\frac{2(1+a(R_2))}{R_2(1-a(R_2))} = \frac{2(50a+243)}{233-70a} < \frac{100a+486}{135} = l_2(|z|)$. Тобто, $N(\varphi, l_2; \mathbb{D}_{R_2/2}) \le 1$ з $l_2(|z|) \equiv \frac{100a+486}{135}$.

Дослідимо тепер обмеженість l-індексу функції $\varphi(z)$ в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{R/2}$. Для цього скористаємось тим, що $\varphi(z)$ є розв'язком рівняння (4). Тому, якщо $|z| \ge R/2$, то

$$|\varphi''(z)| \le \frac{1}{2|z|}|\varphi'(z)| + \left(\frac{1}{16}+\frac{a}{8|z|}\right)|\varphi(z)| \le$$
$$\le \frac{1}{R}|\varphi'(z)| + \left(\frac{1}{16}+\frac{a}{4R}\right)|\varphi(z)|$$

і для деякого $l > 0$

$$\frac{|\varphi''(z)|}{2!l^2} \le \frac{1}{2Rl}\frac{|\varphi'(z)|}{1!l} + \left(\frac{1}{16}+\frac{a}{4R}\right)\frac{|\varphi(z)|}{2l^2} \le$$
$$\le \max\left\{\frac{|\varphi'(z)|}{1!l}, |\varphi(z)|\right\}, \qquad (11)$$

якщо

$$\frac{1}{2Rl} + \left(\frac{1}{16}+\frac{a}{4R}\right)\frac{1}{2l^2} \le 1. \qquad (12)$$

Продиференціюємо (4) $n \ge 1$ раз. Отримаємо

$$4z\varphi^{(n+2)}(z) + (4n+2)\varphi^{(n+1)}(z) -$$
$$-(\frac{z}{4}-\nu-\frac{1}{2})\varphi^{(n)}(z) - \frac{n}{4}\varphi^{(n-1)}(z) = 0.$$

Звідки за умови $|z| \ge R/2$ випливає, що

$$|\varphi^{(n+2)}(z)| \le \frac{4n+2}{4|z|}|\varphi^{(n+1)}(z)| +$$
$$+\left(\frac{1}{16}+\frac{a}{8|z|}\right)|\varphi(z)| + \frac{n}{16|z|}|\varphi^{(n-1)}(z)| \le$$
$$\le \frac{4n+2}{2R}|\varphi^{(n+1)}(z)| + \left(\frac{1}{16}+\frac{a}{4R}\right)|\varphi(z)| +$$
$$+\frac{n}{8R}|\varphi^{(n-1)}(z)|$$

і

$$\frac{|\varphi^{(n+2)}(z)|}{(n+2)!l^{n+2}} \le \frac{4n+2}{2(n+2)Rl}\frac{|\varphi^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}} +$$
$$+\left(\frac{1}{16}+\frac{a}{4R}\right)\frac{1}{(n+2)(n+1)l^2}\frac{|\varphi^{(n)}(z)|}{n!l^n} +$$
$$+\frac{1}{8R(n+2)(n+1)l^3}\frac{|\varphi^{(n-1)}(z)|}{(n-1)!l^{n-1}} \le$$
$$\le \max\left\{\frac{|\varphi^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}}, \frac{|\varphi^{(n)}(z)|}{n!l^n}, \frac{|\varphi^{(n-1)}(z)|}{(n-1)!l^{n-1}}\right\}, \qquad (13)$$

якщо

$$\frac{4n+2}{2(n+2)Rl} + \left(\frac{1}{16}+\frac{a}{4R}\right)\frac{1}{(n+2)(n+1)l^2} +$$
$$+\frac{1}{8R(n+2)(n+1)l^3} \le 1.$$

Остання нерівність і нерівність (12) виконуються, якщо

$$S(a,R,l) = \frac{2}{Rl} + \left(\frac{1}{16}+\frac{a}{4R}\right)\frac{1}{2l^2} + \frac{1}{16Rl^3} \le 1.$$

Якщо $a \ge \frac{14}{10}$, то $l_1R_1 = \frac{2(210a+19)}{135} \times \frac{15}{10a+1} > \frac{19(10a+1)2}{9(10a+1)} = \frac{38}{9} > 4$, а

$l_1 \geq \dfrac{(21\cdot 14+19)2}{135} > 4$. Отже, $\dfrac{2}{R_1 l_1} < \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{32l_1^2} \leq \dfrac{1}{512}$, $\dfrac{a}{8R_1 l_1^2} \leq \dfrac{a}{8\cdot 4l_1} \leq \dfrac{135a}{64\cdot 210a} < \dfrac{1}{64}$ і $\dfrac{1}{16R_1 l_1^3} < \dfrac{1}{1024}$. А тому, $S(a, R_1, l_1) < 1$ і виконуються нерівності (11) та (13), з яких випливає, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{R_1/2}$ при $l = l_1$ виконується

$$\frac{|\varphi^{(n)}(z)|}{n!l^n} \leq \max\left\{\frac{|\varphi'(z)|}{1!l}, |\varphi(z)|\right\}, \qquad (14)$$

тобто, $N(\varphi, l_1; \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{R_1/2}) \leq 1$ з $l_1(|z|) \equiv \dfrac{28}{9}a + \dfrac{38}{135}$. Отже, якщо $a \geq \dfrac{14}{10}$, то $N(\varphi, l_1) \leq 1$ з $l_1(|z|) \equiv \dfrac{28}{9}a + \dfrac{38}{135}$.

Якщо ж $a < \dfrac{14}{10}$, то $l_2 R_2 = l_2 = \dfrac{100a+486}{135} \geq \dfrac{486}{135} > 3$. Отже, $\dfrac{2}{R_2 l_2} < \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{32l^2} < \dfrac{1}{32\cdot 9}$, $\dfrac{a}{8R_2 l_2^2} < \dfrac{135a}{24(100a+486)} < \dfrac{135}{2400}$, $\dfrac{1}{16R_2 l_2^3} < \dfrac{1}{16\cdot 27}$ і $S(a, R_2, l_2) < 1$. Тому, знову виконуються (11) та (13), з яких випливає, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{R_2/2}$ при $l = l_2$ виконується (14), тобто, $N(\varphi, l_2; \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{R_2/2}) \leq 1$ з $l_2(|z|) \equiv \dfrac{100a+486}{135}$, тобто, якщо $a < \dfrac{14}{10}$, то $N(\varphi, l_2) \leq 1$ з $l_2(|z|) \equiv \dfrac{100a+486}{135}$.

Тому правильним є таке твердження.

Твердження 1. *Якщо* $a = |2\nu+1| \geq \dfrac{14}{10}$, *то* $N(\varphi, l_1) \leq 1$ *з* $l_1(|z|) \equiv \dfrac{28}{9}a + \dfrac{38}{135}$. *Якщо ж* $a = |2\nu+1| < \dfrac{14}{10}$, *то* $N(\varphi, l_2) \leq 1$ *з* $l_2(|z|) \equiv \dfrac{100a+486}{135}$.

Звідси з огляду на наведене вище зауваження випливає такий наслідок.

Наслідок 1. $N(\varphi, l) \leq 1$ *з* $l(|z|) \equiv \dfrac{28}{9}a + \dfrac{18}{5}$.

Дослідимо тепер обмеженість l-індексу функції $\psi(z)$. Використовуючи (7), маємо

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_k|R^k \leq |\psi_1|R + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{a|\psi_{k-1}|}{4k(2k+1)} + \frac{|\psi_{k-2}|}{8k(2k+1)}\right)R^k = \frac{aR}{12} + \frac{R^2}{80} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{aR}{4(k+1)(2k+3)}|\psi_k|R^k + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{R^2}{8(k+2)(2k+5)}|\psi_k|R^k.$$

Тому

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_k|R^k\left(1 - \frac{aR}{4(k+1)(2k+3)} - \frac{R^2}{8(k+2)(2k+5)}\right) \leq \frac{aR}{12} + \frac{R^2}{80}. \qquad (15)$$

Оскільки

$$\frac{aR}{4(k+1)(2k+3)} + \frac{R^2}{8(k+2)(2k+5)} \leq \frac{aR}{40} + \frac{R^2}{168},$$

то за умови

$$\frac{aR}{40} + \frac{R^2}{168} < 1 \qquad (16)$$

з (15) отримуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_k|R^k \leq \frac{(aR/12) + (R^2/80)}{1 - (aR/40) - (R^2/168)}.$$

Тому, щоб застосувати лему 2, потрібно, щоб

$$\frac{aR}{12} + \frac{R^2}{80} + \frac{aR}{40} + \frac{R^2}{168} < 1,$$

із виконання якої випливає і виконання умови (16).

Нехай $a \geq \dfrac{809}{182}$. Покладемо, наприклад, $R = R_1 = \dfrac{840}{182a+31} \leq 1$. Тоді $R_1^2 \leq R_1$ і $a(R_1) = \dfrac{140a+21}{322a+52} < 1$, а $l_1(|z|) = \dfrac{2(1+a(R_1))}{R_1(1-a(R_1))} = \dfrac{462a+73}{420} = \dfrac{11}{10}a + \dfrac{73}{420}$, тобто, $N(\psi, l_1; \mathbb{D}_{R_1/2}) \leq 1$ з $l_1(|z|) \equiv \dfrac{11}{10}a + \dfrac{73}{420}$.

Якщо $a < \frac{809}{182}$, то покладемо $R = R_2 = 1$. Тоді $a(R_2) = \frac{7(20a+3)}{2(835-21a)} < 1$, а $\frac{2(1+a(R_2))}{R_2(1-a(R_2))} = \frac{98a+1691}{1649-182a} < \frac{98a+1691}{840} = \frac{7}{60}a + \frac{1691}{840} < \frac{11}{10}(a+2) = l_2(|z|)$. Отже, $N(\psi, l_2; \mathbb{D}_{R_2/2}) \leq 1$ з $l_2(|z|) \equiv \frac{11}{10}(a+2)$.

Для дослідження обмеженості l-індексу функції $\psi(z)$ в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{R/2}$, як і раніше, скористаємось тим, що $\psi(z)$ є розв'язком рівняння (5). А тому, при $|z| \geq R/2$,

$$|\psi''(z)| \leq \frac{3}{2|z|}|\psi'(z)| + \left(\frac{1}{16} + \frac{a}{8|z|}\right)|\psi(z)| \leq$$
$$\leq \frac{3}{R}|\psi'(z)| + \left(\frac{1}{16} + \frac{a}{4R}\right)|\psi(z)|$$

і

$$\frac{|\psi''(z)|}{2!l^2} \leq \frac{3}{2Rl}\frac{|\psi'(z)|}{1!l} + \left(\frac{1}{16} + \frac{a}{4R}\right)\frac{|\psi(z)|}{2l^2} \leq$$
$$\leq \max\left\{\frac{|\psi'(z)|}{1!l}, |\psi(z)|\right\}, \qquad (17)$$

якщо

$$\frac{3}{2Rl} + \left(\frac{1}{16} + \frac{a}{4R}\right)\frac{1}{2l^2} \leq 1. \qquad (18)$$

Продиференціюємо (5) $n \geq 1$ раз. Отримаємо

$$4z\psi^{(n+2)}(z) + (4n+6)\psi^{(n+1)}(z) -$$
$$-(\frac{z}{4} - \nu - \frac{1}{2})\psi^{(n)}(z) - \frac{n}{4}\psi^{(n-1)}(z) = 0.$$

Як і раніше, за умови $|z| \geq R/2$, маємо

$$|\psi^{(n+2)}(z)| \leq \frac{4n+6}{4|z|}|\psi^{(n+1)}(z)| +$$
$$+ \left(\frac{1}{16} + \frac{a}{8|z|}\right)|\psi(z)| + \frac{n}{16|z|}|\psi^{(n-1)}(z)| \leq$$
$$\leq \frac{4n+6}{2R}|\psi^{(n+1)}(z)| +$$
$$+ \left(\frac{1}{16} + \frac{a}{4R}\right)|\psi(z)| + \frac{n}{8R}|\psi^{(n-1)}(z)|$$

і

$$\frac{|\psi^{(n+2)}(z)|}{(n+2)!l^{n+2}} \leq \frac{4n+6}{2(n+2)Rl}\frac{|\psi^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}} +$$
$$+ \left(\frac{1}{16} + \frac{a}{4R}\right)\frac{1}{(n+2)(n+1)l^2}\frac{|\psi^{(n)}(z)|}{n!l^n} +$$
$$+ \frac{1}{8R(n+2)(n+1)l^3}\frac{|\psi^{(n-1)}(z)|}{(n-1)!l^{n-1}} \leq$$
$$\leq \max\left\{\frac{|\psi^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}}, \frac{|\psi^{(n)}(z)|}{n!l^n}, \frac{|\psi^{(n-1)}(z)|}{(n-1)!l^{n-1}}\right\}, \qquad (19)$$

якщо

$$\frac{4n+6}{2(n+2)Rl} + \left(\frac{1}{16} + \frac{a}{4R}\right)\frac{1}{(n+2)(n+1)l^2} +$$
$$+ \frac{1}{8R(n+2)(n+1)l^3} \leq 1,$$

а ця нерівність і нерівність (18) виконуються, якщо

$$S(a,R,l) = \frac{2}{Rl} + \left(\frac{1}{16} + \frac{a}{4R}\right)\frac{1}{2l^2} + \frac{1}{16Rl^3} \leq 1.$$

Зауважимо тепер, що за умови $a \geq \frac{809}{182}$ маємо $l_1R_1 = \frac{462a+73}{420}\frac{840}{182a+31} > \frac{2(182a+31)840}{420(182a+31)} = 4$, а $l_1 \geq \frac{462 \cdot (809/182) + 73}{420} > 5$. Отже, $\frac{2}{R_1l_1} < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{32l_1^2} \leq \frac{1}{800}$, $\frac{a}{8R_1l_1^2} \leq \frac{a}{8 \cdot 4l_1} \leq \frac{420a}{32 \cdot 462a} < \frac{1}{32}$ і $\frac{1}{16R_1l_1^3} < \frac{1}{1600}$. Тому, $S(a, R_1, l_1) < 1$ і виконуються нерівності (17) та (19), з яких випливає, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{R_1/2}$ при $l = l_1$ виконується

$$\frac{|\psi^{(n)}(z)|}{n!l^n} \leq \max\left\{\frac{|\psi'(z)|}{1!l}, |\psi(z)|\right\}, \qquad (20)$$

тобто, $N(\psi, l_1; \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{R_1/2}) \leq 1$ з $l_1(|z|) \equiv \frac{11}{10}a + \frac{73}{420}$, і отже, якщо $a \geq \frac{809}{182}$, то $N(\psi, l_1) \leq 1$ з $l_1(|z|) \equiv \frac{11}{10}a + \frac{73}{420}$.

Якщо $a < \frac{809}{182}$, то $l_2R_2 = l_2 = 1,1(a+2) \geq \geq 2,2$. Отже, $\frac{2}{R_2l_2} \leq \frac{10}{11}$, $\frac{1}{32l^2} < \frac{1}{128}$, $\frac{a}{8R_2l_2^2} < \frac{a}{1,1(a+2)16} < \frac{1}{16}$, $\frac{1}{16R_2l_2^3} < \frac{1}{128}$

і $S(a,R_2,l_2) < \dfrac{1390}{1408} < 1$. Тому, знову виконуються (17) та (19), з яких випливає, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{R_2/2}$ при $l = l_2$ виконується (20), тобто, $N(\psi, l_2; \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{R_2/2}) \le 1$ з $l_2(|z|) \equiv \dfrac{11}{10}(a+2)$. Отже, якщо $a < \dfrac{809}{182}$, то $N(\psi, l_2) \le 1$ з $l_2(|z|) \equiv \dfrac{11}{10}(a+2)$.

Тому правильним є таке твердження.

Твердження 2. *Якщо* $a = |2\nu+1| \ge \dfrac{809}{182}$, *то* $N(\psi, l_1) \le 1$ *з* $l_1(|z|) \equiv \dfrac{11}{10}a + \dfrac{73}{420}$. *Якщо ж* $a = |2\nu+1| < \dfrac{809}{182}$, *то* $N(\psi, l_2) \le 1$ *з* $l_2(|z|) \equiv \dfrac{11}{10}(a+2)$.

Наслідок 2. $N(\psi, l) \le 1$ *з* $l(|z|) \equiv 1,1(a+2)$.

3. Геометричні властивості. Для дослідження опуклості та близькості до опуклості скористаємось наступною лемою [4].

Лема 3. *Якщо* $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n|f_n| \le |f_1|$, *то функція (1) є близькою до опуклої в* $\mathbb{D}$. *Якщо ж* $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n^2|f_n| \le |f_1|$, *то вона є опуклою в* $\mathbb{D}$.

Використовуючи рекурентні формули (6) маємо

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n|\varphi_n| \le \sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{a|\varphi_{n-1}|}{4(2n-1)} + \frac{|\varphi_{n-2}|}{8(2n-1)}\right) +$$

$$+2|\varphi_2| \le \frac{a^2}{48} + \frac{1}{24} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{a|\varphi_n|}{4(2n+1)} +$$

$$+\frac{|\varphi_1|}{40} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{|\varphi_n|}{8(2n+3)} = \frac{a^2}{48} + \frac{1}{24} + \frac{|\varphi_1|}{40} +$$

$$+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{a}{4n(2n+1)} + \frac{1}{8n(2n+3)}\right) n|\varphi_n|,$$

тобто

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(1 - \frac{a}{4n(2n+1)} - \frac{1}{8n(2n+3)}\right) n|\varphi_n| \le$$

$$\le \frac{a^2}{48} + \frac{1}{24} + \frac{a}{160}. \tag{21}$$

Оскільки

$$1 - \frac{a}{4n(2n+1)} - \frac{1}{8n(2n+3)} \ge 1 - \frac{a}{40} - \frac{1}{112},$$

то за умови

$$\frac{a}{40} + \frac{1}{112} < 1 \tag{22}$$

з (21) маємо

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n|\varphi_n| \le \frac{(a^2/48) + (a/160) + (1/24)}{1 - (a/40) - (1/112)} \le \frac{a}{4},$$

якщо $182a^2 - 1623a + 280 \le 0$. Остання умова рівносильна

$$\frac{1623 - \sqrt{2430289}}{364} \le a \le \frac{1623 + \sqrt{2430289}}{364}, \tag{23}$$

і з неї також випливає виконання умови (22).

Подібно

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n^2|\varphi_n| \le \sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{an|\varphi_{n-1}|}{4(2n-1)} + \frac{n|\varphi_{n-2}|}{8(2n-1)}\right) +$$

$$+4|\varphi_2| \le \frac{a^2}{24} + \frac{1}{12} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{a(n+1)|\varphi_n|}{4(2n+1)} +$$

$$+\frac{3|\varphi_1|}{40} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(n+2)|\varphi_n|}{8(2n+3)} = \frac{a^2}{24} + \frac{1}{12} + \frac{3a}{160} +$$

$$+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{a(n+1)}{4n^2(2n+1)} + \frac{n+2}{8n^2(2n+3)}\right) n^2|\varphi_n|,$$

тобто

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(1 - \frac{a(n+1)}{4n^2(2n+1)} - \frac{n+2}{8n^2(2n+3)}\right) n^2|\varphi_n| \le$$

$$\le \frac{a^2}{24} + \frac{1}{12} + \frac{3a}{160}.$$

Оскільки

$$1 - \frac{a(n+1)}{4n^2(2n+1)} - \frac{n+2}{8n^2(2n+3)} \ge 1 - \frac{3a}{80} - \frac{1}{56},$$

то, за умови

$$\frac{762 - \sqrt{388564}}{343} \le a \le \frac{762 + \sqrt{388564}}{343}, \tag{24}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n^2|\varphi_n| \le \frac{(a^2/24) + (3a/160) + (1/12)}{1 - (3a/80) - (1/56)} \le \frac{a}{4}.$$

Отже, правильним є таке твердження.

Твердження 3. *За умови (23) функція $\varphi(z)$ є близькою до опуклої, а за умови (24) – опуклою в $\mathbb{D}$.*

Застосовуючи подібні міркування до функції $\psi(z)$ отримаємо

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n|\psi_n| \le \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{a|\psi_{n-1}|}{4(2n+1)} + \frac{|\psi_{n-2}|}{8(2n+1)} \right) + +2|\psi_2| \le \frac{a^2}{240} + \frac{1}{40} + \frac{a}{672} + + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{a}{4n(2n+3)} + \frac{1}{8n(2n+5)} \right) n|\psi_n|.$$

Оскільки

$$1 - \frac{a}{4n(2n+3)} - \frac{1}{8n(2n+5)} \ge 1 - \frac{a}{56} - \frac{1}{144},$$

то, за умови

$$\frac{4915 - \sqrt{22088809}}{684} \le a \le \frac{4915 + \sqrt{22088809}}{684}, \tag{25}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n|\psi_n| \le \frac{(a^2/240) + (a/672) + (1/40)}{1 - (a/56) - (1/144)} \le \frac{a}{12}.$$

Для дослідження опуклості $\psi(z)$ оцінимо

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n^2|\psi_n| \le \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{an|\psi_{n-1}|}{4(2n+1)} + \frac{n|\psi_{n-2}|}{8(2n+1)} \right) + +4|\psi_2| \le \frac{a^2}{120} + \frac{1}{20} + \frac{a}{224} + + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{a(n+1)}{4n^2(2n+3)} + \frac{n+2}{8n^2(2n+5)} \right) n^2|\psi_n|.$$

Оскільки

$$1 - \frac{a(n+1)}{4n^2(2n+3)} - \frac{n+2}{8n^2(2n+5)} \ge 1 - \frac{3a}{112} - \frac{1}{72},$$

то, за умови

$$\frac{2350 - \sqrt{3590164}}{639} \le a \le \frac{2350 + \sqrt{3590164}}{639}, \tag{26}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n^2|\psi_n| \le \frac{(a^2/120) + (a/224) + (1/20)}{1 - (3a/112) - (1/72)} \le \frac{a}{12}.$$

Твердження 4. *За умови (25) функція $\psi(z)$ є близькою до опуклої, а за умови (26) – опуклою в $\mathbb{D}$.*

Якщо $\nu < -1/2$, то $\varphi_n > 0$ і $\psi_n > 0$. Тому результат тверджень 4 та 5 можна уточнити. Скористаємось для цього такою лемою [5].

Лема 4. *Якщо*

$$f_1 \ge 2f_2 \ge \cdots \ge nf_n \ge (n+1)f_{n+1} \ge \cdots > 0,$$

то функція (1) є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$.

Для функції $\varphi(z)$ маємо $2\varphi_2 = \frac{a^2}{48} + \frac{1}{24} \le \le \frac{a}{4} = \varphi_1$, якщо $6 - \sqrt{34} \le a \le 6 + \sqrt{34}$. Використовуючи умову $2\varphi_2 \le \varphi_1$, отримаємо $3\varphi_3 = 3\left(\frac{a}{120}2\varphi_2 + \frac{\varphi_1}{120}\right) \le \frac{a^2}{160} + \frac{a}{160} \le \le \frac{a^2}{48} + \frac{1}{24} = 2\varphi_2$, бо $7a^2 - 3a + 20 > 0$. Далі, для $n \ge 3$, якщо $\varphi_1 \ge 2\varphi_2 \ge 3\varphi_3 \ge \cdots \ge \ge (n-2)\varphi_{n-2} \ge (n-1)\varphi_{n-1} \ge n\varphi_n$, то

$$\begin{aligned}
&(n+1)\varphi_{n+1} - n\varphi_n = \\
&= \frac{a\varphi_n}{4(2n+1)} + \frac{\varphi_{n-1}}{8(2n+1)} - \\
&- \frac{a\varphi_{n-1}}{4(2n-1)} - \frac{\varphi_{n-2}}{8(2n-1)} = \\
&= \frac{a}{4n(2n+1)} n\varphi_n + \frac{(n-1)\varphi_{n-1}}{8(n-1)(2n+1)} - \\
&- \frac{a(n-1)\varphi_{n-1}}{4(n-1)(2n-1)} - \frac{(n-2)\varphi_{n-2}}{8(n-2)(2n-1)} \le \\
&\le \left(\frac{a}{4n(2n+1)} - \frac{a}{4(n-1)(2n-1)} \right) \times \\
&\times (n-1)\varphi_{n-1} + \left(\frac{1}{8(n-1)(2n+1)} - \right. \\
&\left. - \frac{1}{8(n-2)(2n-1)} \right) (n-2)\varphi_{n-2} < 0.
\end{aligned}$$

Тому, правильним є наступне твердження.

Твердження 5. *Якщо*

$$\frac{-7 - \sqrt{34}}{2} \le \nu \le \frac{-7 + \sqrt{34}}{2},$$

то функція $\varphi(z)$ є близькою до опуклої.

Подібно, для $\psi(z)$ маємо $2\psi_2 = \frac{a^2}{240} + \frac{1}{40} \le \le \frac{a}{12} = \psi_1$, якщо $10 - \sqrt{94} \le a \le 10 + \sqrt{94}$. Для таких a легко бачити, що $3\psi_3 = = 3\left(\frac{a}{168}2\psi_2 + \frac{\psi_1}{168}\right) \le \frac{a^2}{672} + \frac{a}{672} \le \frac{a^2}{240} +$

$+\dfrac{1}{40} = 2\psi_2$. Як і для $\varphi(z)$, переконуємось, що для $n \geq 3$

$$(n+1)\psi_{n+1} - n\psi_n \leq$$
$$\leq \left(\frac{a}{4n(2n+3)} - \frac{a}{4(n-1)(2n+1)}\right) \times$$
$$\times (n-1)\psi_{n-1} + \left(\frac{1}{8(n-1)(2n+3)} -\right.$$
$$\left. -\frac{1}{8(n-2)(2n+1)}\right)(n-2)\psi_{n-2} < 0.$$

Отримуємо наступне твердження.

Твердження 6. *Якщо*

$$\frac{-11-\sqrt{94}}{2} \leq \nu \leq \frac{-11+\sqrt{94}}{2},$$

то функція $\psi(z)$ є близькою до опуклої.

4. Зростання. Використовуючи метод Вімана-Валірона, можна довести наступне твердження.

Твердження 7. *Якщо $\nu \neq \frac{1}{2}$, то $\ln M_\varphi(r) = (1+o(1))\dfrac{r}{4}$ і $\ln M_\psi(r) = (1+o(1))\dfrac{r}{4}$ при $r \to \infty$, де $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$.*

5. Основна теорема. З наслідків 1-2 та тверджень 3-7 випливає така теорема.

Теорема. *Якщо $\nu \neq -\frac{1}{2}$, то загальний розв'язок рівняння (3) можна записати у вигляді $w(z) = C_1\varphi(z^2) + C_2 z\psi(z^2)$, а функції $\varphi(z)$ та $\psi(z)$ мають такі властивості:*

1) $N(\varphi, l) \leq 1$ з $l(|z|) \equiv \dfrac{28}{9}|2\nu+1| + \dfrac{18}{5}$ і $N(\psi, l) \leq 1$ з $l(|z|) \equiv \dfrac{11}{10}(|2\nu+1|+2)$;

2) якщо $(762-\sqrt{388564})/343 \leq |2\nu+1| \leq (762+\sqrt{388564})/343$, то $\varphi(z)$ – опукла, а якщо $(2350-\sqrt{3590164})/639 \leq |2\nu+1| \leq (2350+\sqrt{3590164})/639$ то $\psi(z)$ – опукла;

3) якщо $(1623-\sqrt{2430289})/364 \leq |2\nu+1| \leq (1623+\sqrt{2430289})/364$, то $\varphi(z)$ – близька до опуклої в $\mathbb{D}$, а якщо $(4915-\sqrt{22088809})/684 \leq |2\nu+1| \leq (4915+\sqrt{22088809})/684$, то $\psi(z)$ – близька до опуклої в $\mathbb{D}$;

4) якщо $\nu \in \mathbb{R}$, то при $(-7-\sqrt{34})/2 \leq \nu \leq (-7+\sqrt{34})/2$ функція $\varphi(z)$ є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, а при $(-11-\sqrt{94})/2 \leq \nu \leq (-11+\sqrt{94})/2$ функція $\psi(z)$ є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$;

5) $\ln M_\varphi(r) = (1+o(1))\dfrac{r}{4}$ і $\ln M_\psi(r) = (1+o(1))\dfrac{r}{4}$ при $r \to \infty$, де $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Sheremeta M.M.* Analytic functions of bounded index. - Lviv: VNTL Publishers. – 1999. – 141 p.

2. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука. – 1966. – 626 с.

3. *Шеремета З.М., Шеремета М.М.* Обмеженість l-індексу аналітичних функцій, зображених степеневими рядами // Вісник Львів. ун-ту, Серія мех.- мат. – 2006. – **66**. – С. 208-213.

4. *Goodman A.W.* Univalent functions and nonanalytic curves // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – **8**. – P.597-601

5. *Goodman A.W.* Univalent Functions, **II**. – Mariner Publishing Co. – 1983. – 158p.