УДК 517.9

©2014 р. С.Г. Хома-Могильська

Тернопільський національний економічний університет

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Досліджуючи періодичні розв'язки однорідного та неоднорідного гіперболічних рівнянь другого порядку, побудовано інтегральний оператор, за допомогою якого можна вивчати T-періодичні розв'язки гіперболічних рівнянь другого порядку.

We construct an integral operator to investigate the T-periodic solutions of second order hyperbolic equations.

Вступ. Постановка задачі. Знаходження періодичних розв'язків диференціальних рівнянь не дає відповіді на питання про єдиність T-періодичного розв'язку. Це підтверджують роботи А. М. Самойленка та його учнів [1, де й знаходиться широкий перелік джерел], які досліджували T-періодичні розв'язки систем звичайних диференціальних рівнянь.

Досліджуючи крайові періодичні задачі для гіперболічних рівнянь другого порядку як лінійних, так і квазілінійних [2-5], нами вперше було застосовано нетрадиційний метод відшукання розв'язку вказаних задач. На відміну від ряду вчених [6-8], які використовують методи функціонального аналізу, згідно з якими розв'язок шукається у вигляді тригонометричного ряду $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(t)\sin kx$, що автоматично забезпечує виконання крайових умов $u(0,t)=u(\pi,t)=0$, проте вимагає накладання додаткових умов на праву частину неоднорідного рівняння, ми спочатку шукаємо періодичний розв'язок, а потім перевіряємо виконання крайових умов.

Однак, не беручи до уваги крайових умов, в даній роботі ми досліджуємо існування T-періодичних розв'язків такої T-періодичної задачі:

$$u_{tt}-u_{xx}=g(x,t),\ 0\le x\le\pi,\ t\in\mathbb{R}, \quad (1)$$

$$u(x,t+T)=u(x,t),\ 0\le x\le\pi,\ t\in\mathbb{R}, \quad (2)$$

де $g(x,t+T)=g(x,t)$.

Дослідження задачі та обґрунтування отриманих результатів.

Лема 1. Для довільної функції $\mu(z)\in C^1(\mathbb{R})$, $\mu(z+T)=\mu(z)$ і $g(x,t)\in C^{0,1}([0,\pi]\times\mathbb{R})$, $g(x,t+T)=g(x,t)$, де T–період даних функцій за змінною t, існує точний розв'язок T–періодичної задачі (1), (2), який визначений формулою

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)\,d\alpha-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}d\xi\int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau=$$

$$=u^0(x,t)+\tilde{u}(x,t). \quad (3)$$

Доведення. Доведемо спочатку, що функція

$$u^0(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)\,d\alpha \quad (4)$$

для кожної функції $\mu(z)\in C^1(\mathbb{R})$, $\mu(z+T)=\mu(z)$ є T-періодичним розв'язком однорідної задачі

$$u^0_{tt}-u^0_{xx}=0,\ 0\le x\le\pi,\ t\in\mathbb{R},$$

$$u^0(x,t+T)=u^0(x,t),\ 0\le x\le\pi,\ t\in\mathbb{R}.$$

Справді,обчислюючи частинні похідні u^0_{tt} і u^0_{xx} від функції $u^0(x,t)$, визначеної формулою (4), одержимо:

$$u^0_{tt}(x,t)=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\mu(t+x)}{\partial(t+x)}-\frac{\partial\mu(t-x)}{\partial(t-x)}\Big);$$

$$u^0_{xx}(x,t)=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\mu(t+x)}{\partial(t+x)}-\frac{\partial\mu(t-x)}{\partial(t-x)}\Big).$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що $u^0_{tt} - u^0_{xx} \equiv 0$. Отже, функція $u^0(x,t)$, визначена формулою (4), є розв'язком однорідного рівняння.

Легко перевірити, що для кожної функції $\mu(z) \in C^1\big(\mathbb{R}\big)$, $\mu(z+T)=\mu(z)$ функція $u^0(x,t)$, визначена формулою (4), є T-періодичною, тобто $u^0(x,t+T)=u^0(x,t)$. Маємо

$$u^0(x,t+T)=\frac{1}{2}\int\limits_{t+T-x}^{t+T+x}\mu(\alpha)\,d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\mu(\beta+T)\,d\beta=u^0(x,t),$$

що й потрібно було довести.

Тепер доведемо, що функція

$$\tilde{u}(x,t)=-\frac{1}{2}\int\limits_0^x d\xi\int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau \qquad (5)$$

є частинним T-періодичним розв'язком неоднорідного рівняння (1). Спочатку доведемо, що функція $\tilde{u}(x,t)$, визначена формулою (5), для кожної T-періодичної функції $g(x,t)$, тобто $g(x,t+T)=g(x,t)$, є також T-періодичною. Справді, на основі формули (5) маємо

$$\tilde{u}(x,t+T)=-\frac{1}{2}\int\limits_0^x d\xi\int\limits_{t+T-x+\xi}^{t+T+x-\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^x d\xi\int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}g(\xi,\eta+T)\,d\eta\equiv\tilde{u}(x,t).$$

Доведемо, що функція $\tilde{u}(x,t)$, задовольняє рівняння (1). На основі формули (5) обчислимо другі частинні похідні $\tilde{u}_{tt}$ і $\tilde{u}_{xx}$ від функції $\tilde{u}(x,t)$. Одержимо

$$\tilde{u}_x(x,t)=\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^x d\xi\int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau\right)'_x=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^x\Big(\int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau\Big)'_x d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t-x+x}^{t+x-x}g(x,\tau)\,d\tau\cdot x'+0=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^x\Big(g(\xi,t+x-\xi)\cdot(t+x-\xi)'_x-$$

$$-g(\xi,t-x+\xi)\cdot(t-x+\xi)'_x\Big)\,d\xi=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^x\Big(g(\xi,t+x-\xi)+g(\xi,t-x+\xi)\Big)\,d\xi; \quad (6)$$

$$\tilde{u}_{xx}(x,t)=$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^x\Big(g(\xi,t+x-\xi)+g(\xi,t-x+\xi)\Big)\,d\xi\right)'_x=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^x\left(\frac{\partial g(\xi,t+x-\xi)}{\partial(t+x-\xi)}\cdot\frac{\partial(t+x-\xi)}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial g(\xi,t-x+\xi)}{\partial(t-x+\xi)}\cdot\frac{\partial(t-x+\xi)}{\partial x}\right)d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\Big(g(x,t+x-x)+g(x,t-x+x)\Big)\cdot x'-0=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^x\left(\frac{\partial g(\xi,t+x-\xi)}{\partial(t+x-\xi)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial g(\xi,t-x+\xi)}{\partial(t-x+\xi)}\right)d\xi-g(x,t). \qquad (7)$$

Аналогічно

$$\tilde{u}_t(x,t)=\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^x d\xi\int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau\right)'_t=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^x\Big(\int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau\Big)'_t d\xi+0-0=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^x\Big(g(\xi,t+x-\xi)\cdot(t+x-\xi)'_t-$$

$$-g(\xi,t-x+\xi)\cdot(t-x+\xi)'_t\Big)\,d\xi=$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^x \Big(g(\xi, t+x-\xi) - g(\xi, t-x+\xi)\Big)\, d\xi; \quad (8)$$

$$\tilde{u}_{tt}(x,t) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^x \Big(g(\xi, t+x-\xi) - g(\xi, t-x+\xi)\Big)\, d\xi\right)_t^{'} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^x \left(\frac{\partial g(\xi, t+x-\xi)}{\partial(t+x-\xi)} \cdot \frac{\partial(t+x-\xi)}{\partial t} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial g(\xi, t-x+\xi)}{\partial(t-x+\xi)} \cdot \frac{\partial(t-x+\xi)}{\partial t}\right) d\xi + 0 - 0 =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^x \left(\frac{\partial g(\xi, t+x-\xi)}{\partial(t+x-\xi)} - \frac{\partial g(\xi, t-x+\xi)}{\partial(t-x+\xi)}\right) d\xi. \quad (9)$$

Безпосередньою підстановкою переконуємося, що $\tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = g(x,t)$. Отже, функція $\tilde{u}(x,t)$, визначена формулою (5), є частинним Т-періодичним розв'язком лінійного неоднорідного рівняння (1).

Таким чином, функція $u(x,t) = u^0(x,t) + \tilde{u}(x,t)$, яка визначена формулою (3), є Т-періодичним розв'язком задачі (1), (2).

Лему 1 доведено.

Слід зазначити, що встановлена формула (3) дає змогу досліджувати Т-періодичні задачі для різної класифікації рівнянь гіперболічного типу другого порядку. Для прикладу розглянемо таку Т-періодичну задачу:

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon F(x,t,u), 0 \le x \le \pi, t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

$$u(x, t+T) = u(x,t), \ 0 \le x \le \pi, \ t \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Запишемо інтегральне рівняння

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\, d\alpha -$$

$$-\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} F\big(\xi, \tau, u(\xi,\tau)\big)\, d\tau, \quad (12)$$

де $\mu(z)-$ довільна Т-періодична функція.

Покажемо, при яких умовах інтегральне рівняння (12) має розв'язок. Для цього побудуємо послідовні наближення:

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\, d\alpha,$$

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\, d\alpha -$$

$$-\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} F\big(\xi, \tau, u_0(\xi,\tau)\big)\, d\tau,$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$u_{n+1}(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\, d\alpha -$$

$$-\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} F\big(\xi, \tau, u_n(\xi,\tau)\big)\, d\tau,$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

Якщо функція $F(x,t,u)$ задовольняє умову Ліпшиця по u, тобто

$$|F(x,t,\overline{\overline{u}}) - F(x,t,\overline{u})| \le K|\overline{\overline{u}} - \overline{u}|,$$

де $K = const$, то по аналогії з теоремою існування і єдиності розв'язку звичайного диференціального рівняння $y' = f(x,y)$ при достатньо малому ε легко довести існування Т-періодичного розв'язку задачі (10), (11).

Справедливим буде твердження.

Теорема. *Нехай задано Т-періодичну задачу:*

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon F(x,t,u), 0 \le x \le \pi, t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

$$u(x, t+T) = u(x,t), \ 0 \le x \le \pi, \ t \in \mathbb{R}, \quad (14)$$

і функція $F(x,t,u)$ неперервна по x, t, Т-періодична по аргументу t та задовольняє умову Ліпшиця по аргументу u, тобто $|F(x,t,\overline{\overline{u}}) - F(x,t,\overline{u})| \le K|\overline{\overline{u}} - \overline{u}|$, $K = const$.

Тоді для кожної функції $\mu(z) \in C(\mathbb{R})$, $\mu(z+T) = \mu(z)$, при достатньо малому ε існує гладкий розв'язок T-періодичної задачі (13), (14).

Висновки. У статті знайдено множину точних розв'язків T-періодичної задачі (1), (2) для неоднорідного гіперболічного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = g(x,t)$, за допомогою яких можна доводити існування T-періодичних розв'язків гіперболічних рівнянь другого порядку. На основі даного твердження можна довести існування:

1) 2π-періодичних розв'язків квазілінійних гіперболічних рівнянь другого порядку:

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon F(x,t,u);$$

2) T-періодичних розв'язків рівнянь із запізненням:

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon F\big(x,t,u(x,t),u(x,t-\Delta)\big),$$

де Δ–деяке число;

3) T-періодичних розв'язків інтегро-диференціальних рівнянь

$$u_{tt} - u_{xx} =$$
$$= \varepsilon F\Big(x,t,u(x,t), \int\limits_{t}^{t+\tau} \varphi(x,t,s,u(x,s))\,ds\Big).$$

Оскільки в наведеній у роботі теоремі єдиності розв'язку задачі (13), (14) не встановлюється, це спонукає до подальших досліджень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – К. : Вища школа, 1976. – 184 с.

2. *Самойленко А. М., Хома-Могильська С. Г.* Аналітичний метод відшукання 2π-періодичних розв'язків гіперболічних рівнянь другого порядку // Доп. НАН України. – 2010. – N4. – С. 25-29.

3. *Самойленко А. М., Хома Н. Г., Хома-Могильська С. Г.* Окремий випадок існування 2π-періодичних розв'язків крайових задач для гіперболічного рівняння другого порядку // Доп. НАН України. – 2012. – N2. – С. 35-41.

4. *Митропольський Ю. О., Хома-Могильська С. Г.* Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку. I // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, N7. – С. 912-921.

5. *Митропольський Ю. О., Хома Г. П., Хома-Могильська С. Г.* Розв'язки крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку // Доп. НАН України. – 2008. – N7. – С. 30-36.

6. *Rabinowitz P.* Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations //Comm. Pure Appl. Math. – 1967. – **20**, № 1. – P. 145-205.

7. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К. : Наукова думка, 1984. – 264 с.

8. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К. : Наукова думка, 2002. – 416 с.