УДК 515.51

©2014 р. Т.І. Белей, В.В.Михайлюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

СУКУПНІ ВЛАСТИВОСТІ МНОГОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Доведено, що для компактозначного відображення $F : X \times Y \multimap Z$, визначеного на добутку берівського простору X і метризовного компакту Y і зі значеннями у метризовному просторі Z, яке напівнеперервне знизу відносно першої змінної і неперервне відносно другої змінної, існує всюди щільна G_δ-множина $A \subseteq X$ така, що звуження $F|_{A\times Y}$ неперервне. Наведено приклад відображення $F : [0,1]^2 \multimap [0,1]$, яке напівнеперервне знизу відносно першої змінної, неперервне відносно другої змінної і сукупно розривне в кожній точці множини $[0,1] \times \{0\}$.

It is proved that for a Baire space X, a metrizable compact Y, a metrizable space Z and a compact-valued mapping $F : X \times Y \multimap Z$ which is lower semi-continuous with respect the first variable and continuous with respect to the second variable there exists a dense G_δ-set $A \subseteq X$ such that the restriction $F|_{A\times Y}$ is continuous. It is constructed an example of a mapping $F : [0,1]^2 \multimap [0,1]$ which is lower semi-continuous with respect the first variable, continuous with respect to the second variable and jointly discontinuous at every point of the set $[0,1] \times \{0\}$.

1 Вступ

Дослідження властивостей множини точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень двох змінних були розпочаті Р.Бером в [1]. Результати Р.Бера узагальнювались і розвивались у роботах багатьох математиків: Е. ван Влека, Г.Гана, А.Алєксєвича і В.Орлича, М.Форта, Р.Фейока, В.Маслюченка та інших. Особливе місце серед результатів даної тематики займає теорема Наміоки [7], яка дістала широке застосування і стала поштовхом до подальшого розвитку даних досліджень для відображень, визначених на добутку берівського і компактного просторів.

Разом із тим, в [4–6] вивчалися сукупні властивості многозначних відображень двох змінних, які відносно кожної змінної зокрема є неперервними або задовольняють певні умови типу неперервності. Зокрема, з роботи Ґ.Дебса [4] випливає наступний результат.

Теорема 1. *Нехай X – берівський простір, Y – метризовний компакт, Z – метризовний простір, $F : X \times Y \multimap Z$ – компактозначне відображення, напівнеперервне знизу відносно першої змінної і напівнеперервне зверху відносно другої. Тоді існує G_δ-множина A щільна в X, така, що відображення F сукупно напівнеперервне зверху в кожній точці множини $A \times Y$.*

У зв'язку з цією теоремою природно виникає таке питання.

Питання 1. *Нехай X – берівський простір, Y – метризовний простір, $F : X \times Y \multimap \mathbb{R}$ - компактозначне відображення, напівнеперервне знизу відносно першої змінної і неперервне відносно другої. Чи обов'язково існує щільна в X G_δ-множина A така, що відображення F сукупно неперервне в кожній точці множини $A \times Y$?*

У даній статті ми покажемо, що це питання має негативну відповідь. Крім того, ми доведемо, що відображення F, які задовольняють умови питання 1, мають таку дещо слабшу властивість: існує щільна в X множина A типу G_δ така, що звуження $F|_{A\times Y}$ неперервне.

2 Приклад

Многозначне відображення $F : X \multimap Y$, яке діє з топологічного простору X у топологічний простір Y, називається напівнеперервним зверху (знизу) в точці $x_0 \in X$, якщо для довільної відкритої в Y множини V такої, що $F(x_0) \subseteq V$ ($F(x_0) \bigcap V \neq \emptyset$) множина $\{x \in X : F(x) \subseteq V\}$ ($\{x \in X : F(x) \subseteq V \neq$

$\emptyset\}$) є околом точки x_0 в просторі X. Многозначне відображення $F : X \multimap Y$ напівнеперервне зверху (знизу) в кожній точці $x \in X$ називається напівнеперервним знизу (зверху). Відображення, напівнеперервне зверху і знизу, називається неперервним.

Зауважимо, що неперервність компактозначного відображення $F : X \multimap Y$ рівносильна наперервності відповідного однозначного відображення $f : X \to K(Y)$, яке діє в простір $K(Y)$ непорожніх компактних підмножин простору Y з топологією Віторіса, яка, в свою чергу, є метризовною з допомогою метрики Гаусдорфа, якщо сам простір Y також метризовний (дивись [9, с. 62]).

Наступні допоміжні твердження легко випливають з означень.

Лема 1. *Нехай X – топологічний простір, функції $\varphi, \psi : X \to \mathbb{R}$ – неперервні і $\varphi(x) \leq \psi(x)$ для довільного $x \in X$. Тоді компактнозначне відображення $g : X \multimap \mathbb{R}$ таке, що $g(x) = [\varphi(x), \psi(x)]$ для кожного $x \in X$ є неперервним.*

Лема 2. *Нехай $g : [0,1] \multimap [0,1]$ – многозначне відображення, $A \subseteq [0,1]$ – скінченна множина і $g(x) = [0,1]$ для довільного $x \in [0,1] \setminus A$. Тоді відображення g – напівнеперервне знизу на відрізку $[0,1]$.*

Наступний приклад дає негативну відповідь на питання 1.

Теорема 2. *Існує компактозначне відображення $F : [0,1]^2 \multimap [0,1]$, яке напівнеперервне знизу відносно першої змінної, неперервне відносно другої змінної і сукупно розривне в кожній точці множини $[0,1] \times \{0\}$.*

Доведення.
Нехай $X_n = \{\frac{2k-1}{2^n} : k = 1, 2, ..., 2^{n-1}\}$, $I_n = [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$ для довільного $n \in \mathbb{N}$.

Розглянемо компактозначне відображення $F : [0,1]^2 \multimap [0,1]$, що означається так: $F(x,y) = [0, |3 - 2^{n+1}y|]$, якщо існує таке $n \in \mathbb{N}$, що $(x,y) \in X_n \times I_n$ і $F(x,y) = [0,1]$, якщо $(x,y) \notin X_n \times I_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Візьмемо довільну точку $x \in [0,1]$ і покажемо, що відображення $F^x : [0,1] \multimap [0,1]$, $F^x(y) = F(x,y)$, неперервне. Нехай $x \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, тоді $F^x(y) = [0,1]$ для довільного $y \in [0,1]$. Тобто відображення F^x – стале, а, отже, неперервне. Нехай $x \in X_n$ для деякого $n \in \mathbb{N}$. Тоді існує таке натуральне число $k \leq 2^{n-1}$, що $x = \frac{2k-1}{2^n}$. Зауважимо, що $F^x(y) = [\varphi(y), \psi(y)]$, де $\varphi(y) = 0$ для довільного $y \in [0,1]$, $\psi(y) = 1$ при $y \notin I_n$ і $\psi(y) = |3 - 2^{n+1}y|$, при $y \in I_n$. Оскільки $\psi(\frac{1}{2^n}) = \psi(\frac{1}{2^{n-1}}) = 1$, то функція ψ неперервна. Тому відображення F^x неперервне згідно з лемою 1.

Покажемо, що для кожного $y \in [0,1]$ відображення $F_y : [0,1] \multimap [0,1]$, $F_y(x) = F(x,y)$, напівнеперервне знизу. Нехай $y \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}})$. Тоді $F_y(x) = [0,1]$ для довільного $x \in [0,1]$. Тобто відображення F_y є сталим, а отже напівнеперервним знизу. Нехай тепер існує таке $n \in \mathbb{N}$, що $y \in (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}})$. Тоді $y \notin I_k$ при $k \neq n$. Тому $F_y(x) = [0,1]$ при $x \in [0,1] \setminus X_n$, а отже, F_y напівнеперервне знизу згідно з лемою 2.

Покажемо, що відображення F розривне у кожній точці $[0,1] \times \{0\}$. Нехай x_0 – довільна точка з множини $X = [0,1]$. Зауважимо, що $F(x_0, 0) = [0,1]$. Візьмемо довільний окіл $W = U \times V$ точки $(x_0, 0)$. Оскільки V є околом точки 0, то існує таке $k_0 \in \mathbb{N}$, що $I_n \subseteq V$ для всіх $n \geq k_0$.Оскільки множина $\bigcup\limits_{n=k_0}^{\infty} X_n$ всюди щільна на $[0,1]$, то існує таке $k \geq k_0$ і точка $x_1 \in X_k$, такі, що $x_1 \in U$. Нехай y_1 – середина I_k. Тоді $F(x_1, y_1) = [0, |3 - 2^{k+1}\frac{3}{2^{k+1}}|] = \{0\}$. Таким чином, $(x_1, y_1) \in W$ і $F(x_1, y_1) \cap (\frac{1}{2}, 1]) = \emptyset$. Отже, F не є напівнеперервною знизу в точці $(x_0, 0)$.

3 Неперервність звуження

Теорема 3. *Нехай X – берівський простір, Y – метризовний компакт, Z – метризовний простір і $F : X \times Y \multimap Z$ – компактозначне відображення напівнеперервне знизу відносно першої змінної і неперервне відносно другої змінної. Тоді існує всюди щільна G_δ-множина $A \subseteq X$ така, що відображення $F|_{A \times Y}$ неперервне.*

Доведення. Оскільки відображення

F напівнеперервне знизу відносно першої змінної і напівнеперервне зверху відносно другої змінної, то за теоремою 1 в просторі X існує всюди щільна G_δ-множина X_0 така, що відображення F напівнеперервне зверху у кожній точці $X_0 \times Y$. Зауважимо, що простір X_0 з індукованою з X топологією є берівським, адже доповнення $X \setminus X_0$ до нього є множиною першої категорії у берівському просторі X.

Розглянемо відображення $F_0 = F|_{X_0 \times Y}$. З того, що відображення F неперервне відносно другої змінної випливає, що й відображення F_0 неперервне відносно другої змінної. З того, що відображення F в кожній точці множини $X_0 \times Y$ напівнеперервне зверху за сукуністю змінних і напівнеперервне знизу відносно першої змінної, випливає, що відображення F_0 неперервне відносно першої змінної. Отже, відображення F_0 нарізно неперервне.

Розглянемо тепер відображення F_0 як однозначне відображення зі значеннями у просторі $K(Z)$ компактних підмножин простору Z з топологією Віторіса. Відображення F_0 нарізно неперервне на $X_0 \times Y$ і простір $K(Z)$ метризовний. Тому за теоремою Дж.Брекнеріджа і Т.Нішіури [2] існує G_δ-множина $A \subseteq X_0$ щільна в X_0 така, що відображення F_0 неперервне в кожній точці $A \times Y$. Оскільки X_0 всюди щільний G_δ-підпростір простору X, то множина A також щільна в X і є множиною типу G_δ. Крім того, $F|_{A \times Y} = F_0|_{A \times Y}$, а отже, звуження $F|_{A \times Y}$ неперервне.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Baire R.* Sur les functions des variables retlles // An. Mat. Pura Appl., ser. 3. – 1899. – **3**. – P.1-123.

2. *Breckenridge J.C., Nishiura T.* Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces // Bull.Inst.Acad.Sinica.–1976.– **4**,№2.–191-203.

3. *Colbrix J., Troallic J.P.* Aplications separement continues // C.R. Acad. Sc. Paris Sec. A. – 1979. – **288**. – P. 647-648.

4. *Debs G.* Points de continuitt d'une function stpartment continue // Proc. Amer Math Soc. – 1986. – **97**, №1. – P.167-176.

5. *Кожукар О.Г., Маслюченко В.К.* Навколо теореми Дебса про многозначні відображення // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. – 2004.– В.191-192.– С.61-66.

6. *В.К.Маслюченко, В.В.Михайлюк, О.Г.Фотій.* Зв'язки між нарізними та сукупними властивостями многозначних відображень // Мат. Студії. – 2011. – **35**, №1. – С.106-112.

7. *Namioka I.* Separate contimuty and joint continuity // Pacif.J.Math. – 1974. – **51**, №2. – P.515-531.

8. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986. – 752 с.

9. *Shouchan Hu., Papageorgion N.* Handbook of Multivalued Analysis. Theory // Dordrecht / Boston/ London: Kluwer Academic Pablishens. 1997. – 964 p.