УДК 517.9

©2014 р. Л.М. Блажко

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

НЕЛІНІЙНІ ЗОБРАЖЕННЯ КОНФОРМНОЇ АЛГЕБРИ AC(1,2) ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

З точністю до неперервних перетворень еквівалентності описано всі можливі зображення алгебри Пуанкаре, розширеної алгебри Пуанкаре та конформної алгебри, відносно яких можуть бути інваріантні квазілінійні диференціальні рівняння з частиними похідними другого порядку у випадку трьох незалежних змінних.

The article presents all possible representations of the Poincare algebra, extended Poincare algebra and conformal algebra, under which quasi-linear differential equations with the second-order partial derivatives are invariant in the case of three independent variables.

Для сучасних досліджень у математичній фізиці важливу роль відіграє принцип симетрії [6,8]. Це пов'язано з тим, що основні фізичні закони, рівняння руху, різні математичні моделі володіють явною або неявною, геометричною або негеометричною, локальною або нелокальною симетріями. Всі основні рівняння математичної фізики — Ньютона, Лапласа, Д'Аламбера, Шредінгера, Максвела і т. д. — володіють широкими симетрійними властивостями.

Квазілінійні хвильові рівняння є цікавим об'єктом дослідження внаслідок свого широкого застосування.

Самий загальний клас квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку має вигляд

$$F^{\mu\nu}\left(u,\underset{1}{u}\right)u_{\mu\nu}+G\left(u,\underset{1}{u}\right)=0, \qquad (1)$$

де $F^{\mu\nu}\left(u,\underset{1}{u}\right)$, $G\left(u,\underset{1}{u}\right)$, $u=u(x)$ — гладкі функції, $\mu,\nu=\overline{0,n}$, $x=(x_0,\vec{x})\in R^{1+n}$, $\underset{1}{u}=$ $=(u_0,u_1,...,u_n)$, $u_\mu=\frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $u_{\mu\nu}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu\partial x_\nu}$.

Найбільш відомими рівняннями класу (1) є рівняння ейконалу

$$u_\mu u^\mu=F(u), \qquad (2)$$

нелінійне хвильове рівняння

$$\Box u+G\left(u,\underset{1}{u}\right)=0, \qquad (3)$$

рівняння Борна–Інфельда

$$(1-u_\nu u^\nu)\Box u+u^\mu u^\nu u_{\mu\nu}=0, \qquad (4)$$

рівняння Ліувілля

$$\Box u+\lambda e^u=0 \qquad (5)$$

та багато інших. У формулах (3)–(5) $\Box u=$ $=\partial_{00}-\triangle$, $u^\mu=g^{\mu\nu}u_\nu$, $g^{\mu\nu}$ — метричний тензор простору R^{1+n} з сигнатурою $(+,-,-,...,-)$, тобто

$$g^{\mu\nu}=\begin{cases}0, \mu\neq\nu,\\ 1, \mu=\nu=0,\\ -1, \mu=\nu\neq 0,\end{cases}$$

F,G — довільні гладкі функції, λ — довільна стала.

Рівняння (2)–(5) володіють широкими симетріями Лі. Вони інваріантні відносно алгебр Пуанкаре, розширеної алгебри Пуанкаре, конформної алгебри.

Рівняння (2) є одним з основних рівнянь геометричної оптики. Його симетрійні властивості прокласифіковані у [8]; нелінійне хвильове рівняння (3) широко застосовується при описанні різноманітних фізичних процесів. Інваріантність рівняння (3) відносно алгебр Пуанкаре, розширеної алгебри Пуанкаре та конформної алгебри досліджена в роботі [8]; рівняння (4) в евклідовому просторі узагальнює на n-вимірний випадок рівняння мінімальних поверхонь вперше одержане Лагранжем із варіаційного принципу Ейлера-Лагранжа. Симетрійні властивості та деякі точні розв'язки рівняння (4) знайдені в роботах [2, 8, 9] . Рівняння Ліувілля виникає у задачах диференціальної геометрії, теорії нелінійних хвиль, у квантовій теорії поля (див., наприклад, [1]).

Оскільки характерна особливість сучасного математичного опису реальних процесів полягає в тому, що рівняння руху для частинок, хвиль, полів є складними нелінійними системами диференціальних і інтегро-диференціальних рівнянь, то постає питання як будувати такі рівняння? Як розв'язувати і досліджувати такі системи? Очевидно, що підхід Лагранжа–Ейлера (механічний у своїй основі) до побудови рівняння руху у багатьох випадках є обмеженим. Досить нагадати, що в рамках класичного методу Лагранжа–Ейлера неможливо одержати без переходу до потенціалів рівняння Максвела для електромагнітних хвиль. У роботі [12] запропоновано нелагранжевий підхід для побудови і класифікації рівнянь руху. В основі цього підходу лежить принцип відносності Лоренца–Пуанкаре–Ейнштейна.

У даній роботі опишемо всі можливі зображення алгебр Пуанкаре та конформної алгебри, відносно яких можуть бути інваріантні квазілінійні диференціальні рівняння з частиними похідними другого порядку (1) у випадку $n = 2$. Зазначимо, що у роботі [11] розглянута задача інваріантності загального рівняння другого порядку відносно алгебри Пуанкаре та деяких її розширень. У роботах [3], [4] дана задача розглянута повністю для одновимірного рівняння (1), але для вужчого класу алгебр, а саме у випадку, коли алгебра Пуанкаре $AP(1,1)$ має базові генератори вигляду

$$\partial_0, \partial_1, J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1.$$

У роботі [7] для випадку $n = 1$ ми описали всеможливі з точністю до перетворень еквівалентності рівняння класу (1), інваріантні відносно алгебри Пуанкаре $AP(1,1)$, розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,1)$ та конформної алгебри $AC(1,1)$.

Означення 1. Алгеброю Пуанкаре називається алгебра

$$AP(1,n) = \langle P_\mu, J_{\mu\nu}\rangle, \tag{6}$$

де $\mu, \nu = \overline{0,n}$, оператори якої задовольняють наступним комутаційним співвідношенням

$$[P_\alpha, J_{\mu\nu}] = g^{\alpha\mu}P_\nu - g^{\alpha\nu}P_\mu, \tag{7}$$

$$[J_{\alpha\beta}, J_{\mu\nu}] = g^{\alpha\mu}J_{\nu\beta} + g^{\alpha\nu}J_{\beta\mu} + g^{\beta\mu}J_{\alpha\nu} + g^{\beta\nu}J_{\mu\alpha}, \tag{8}$$

де $\alpha, \beta = \overline{0,n}$.

Означення 2. Розширеною алгеброю Пуанкаре називається алгебра

$$AP_1(1,n) = \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D\rangle,$$

оператори якої задовольняють комутаційним співвідношенням (7), (8) та

$$[P_\alpha, D] = P_\alpha, \tag{9}$$

$$[J_{\alpha\beta}, D] = 0. \tag{10}$$

Означення 3. Конформною алгеброю називається алгебра

$$AC(1,n) = \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D, K_\mu\rangle,$$

оператори якої задовольняють комутаційним співвідношенням (7), (8), (9), (10) та

$$[P_\alpha, K_\mu] = 2g^{\alpha\mu}D + 2J_{\mu\alpha}, \tag{11}$$

$$[J_{\alpha\beta}, K_\mu] = g^{\beta\mu}K_\alpha - g^{\alpha\mu}K_\beta, \tag{12}$$

$$[D, K_\mu] = K_\mu. \tag{13}$$

Зазначимо, що означення 1 — 3 є загальноприйнятими (див., наприклад, [8]).

Оскільки рівняння (1) містить довільні функції $F^{\mu\nu}$, G, то воно описує певний клас диференціальних рівнянь.

При симетрійній класифікації деякого класу рівнянь важливу роль відіграють перетворення еквівалентності даного класу рівнянь.

Означення 4. Перетворення незалежних змінних x та залежної змінної u

$$\begin{cases} x' = f(x,u), \\ u' = g(x,u), \end{cases}$$

які довільне рівняння заданого класу переводять у рівняння з того ж класу називаються перетвореннями еквівалентності заданого класу рівнянь.

Знання перетворень еквівалентності дозволяє розбити клас рівнянь на нееквівалентні підкласи, вибрати в кожному підкласі канонічного представника, дослідити його симетрійні властивості та поширити ці властивості на всі рівняння даного підкласу.

У роботах [5], [10] запропонований алгоритм знаходження неперервних перетворень еквівалентності. Використавши цей алгоритм, ми отримали наступний результат.

Лема 1. Максимальною групою неперервних перетворень класу рівнянь (1) є перетворення вигляду

$$x'_\mu = \gamma_{\mu\nu}x_\nu + \theta_\mu(u), u' = \alpha_{\mu\nu}x_\mu x_\nu + \beta_\mu x_\mu + \theta(u), \tag{14}$$

де $\gamma_{\mu\nu}$ — довільні сталі, які задають групу $GL(1+n,R)$, $\alpha_{\mu\nu}$, β_μ — групові параметри, $\theta=\theta(u)$, $\theta_\mu=\theta_\mu(u)$ — довільні гладкі функції, $\theta(u)\neq const$.

Лема 1 доводиться методами [5], [10].

Таким чином всі подальші дослідження ми будемо проводити з точністю до перетворень (14).

Зображення алгебри Пуанкаре AP(1,2)

У випадку $x=(x_0,x_1,x_2)$ рівняння (1) при довільних функціях $F^{\mu\nu}$, G інваріантне відносно операторів зсувів по незалежних змінних. Оскільки рівняння (1) інваріантне відносно операторів зсувів, то в якості операторів P_μ алгебри (6) візьмемо оператори ∂_μ, тобто

$$P_\mu = \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \tag{15}$$

Знайдемо тепер вигляд операторів $J_{\mu\nu}$, які разом з операторами (15) утворюють алгебру Пуанкаре (7) — (8). Задавши довільним чином оператори $J_{\mu\nu}$:

$$J_{\mu\nu} = \xi^{\mu\nu\beta}(x,u)\partial_\beta + \eta^{\mu\nu}(x,u)\partial_u \tag{16}$$

та використавши комутаційні співвідношення (7), одержимо

$$\xi^{\mu\nu\beta}_\alpha = g^{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - g^{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}, \eta^{\mu\nu}_\beta = 0. \tag{17}$$

Проінтегрувавши систему (17), знаходимо

$$\xi^{\mu\nu\beta} = x^\mu\delta_{\beta\nu} - x^\nu\delta_{\beta\mu} + a^{\mu\nu\beta}(u), \eta^{\mu\nu} = m^{\mu\nu}(u), \tag{18}$$

де $a^{\mu\nu\beta}=a^{\mu\nu\beta}(u)$, $m^{\mu\nu}=m^{\mu\nu}(u)$ — довільні гладкі функції. З урахуванням формул (18) оператори (16) запишуться у вигляді

$$J_{\mu\nu} = x^\mu\partial_\nu - x^\nu\partial_\mu + a^{\mu\nu\beta}(u)\partial_\beta + m^{\mu\nu}\partial_u.$$

З формул (7) легко бачити, що $J_{\nu\mu}=-J_{\mu\nu}$, тому

$$a^{\nu\mu\beta} = -a^{\mu\nu\beta}, m^{\nu\mu} = -m^{\mu\nu}. \tag{19}$$

Якщо врахувати комутаційні співвідношення (8), то одержимо наступну систему рівнянь для визначення невідомих функцій $a^{\mu\nu\beta}$ та $m^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} &m^{\alpha\beta}\dot m^{\mu\nu} - m^{\mu\nu}\dot m^{\alpha\beta} = \\ &= g^{\alpha\mu}m^{\nu\beta} + g^{\alpha\nu}m^{\beta\mu} + g^{\beta\mu}m^{\alpha\nu} + g^{\beta\nu}m^{\mu\alpha}, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &m^{\alpha\beta}\dot a^{\mu\nu\gamma} - m^{\mu\nu}\dot a^{\alpha\beta\gamma} = g^{\nu\sigma}\delta_{\mu\gamma}a^{\alpha\beta\sigma} + \\ &+ g^{\alpha\sigma}\delta_{\beta\gamma}a^{\mu\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}\delta_{\nu\gamma}a^{\alpha\beta\sigma} - g^{\beta\sigma}\delta_{\alpha\gamma}a^{\mu\nu\sigma} + \\ &+ g^{\alpha\mu}a^{\nu\beta\gamma} + g^{\alpha\nu}a^{\beta\mu\gamma} + g^{\beta\mu}a^{\alpha\nu\gamma} + g^{\beta\nu}a^{\mu\alpha\gamma}. \end{aligned} \tag{21}$$

У випадку $n=2$ система (20), з урахуванням умов (19), має вигляд

$$\begin{aligned} m^{02}\dot m^{01} - m^{01}\dot m^{02} &= m^{12}, \\ m^{12}\dot m^{01} - m^{01}\dot m^{12} &= m^{02}, \\ m^{12}\dot m^{02} - m^{02}\dot m^{12} &= -m^{01}, \end{aligned} \tag{22}$$

а система рівнянь (21) перепишеться наступним чином

$$\begin{aligned} m^{01}\dot a^{020} - m^{02}\dot a^{010} &= -a^{012} + a^{021} - a^{120}, \\ m^{01}\dot a^{021} - m^{02}\dot a^{011} &= a^{020} - a^{121}, \\ m^{01}\dot a^{022} - m^{02}\dot a^{012} &= -a^{010} - a^{121}, \\ m^{01}\dot a^{120} - m^{12}\dot a^{010} &= a^{121} - a^{020}, \\ m^{01}\dot a^{121} - m^{12}\dot a^{011} &= -a^{012} - a^{021} + a^{120}, \\ m^{02}\dot a^{122} - m^{12}\dot a^{012} &= a^{011} - a^{022}, \\ m^{02}\dot a^{120} - m^{12}\dot a^{020} &= a^{010} + a^{122}, \\ m^{02}\dot a^{121} - m^{12}\dot a^{021} &= a^{011} - a^{022}, \\ m^{02}\dot a^{122} - m^{12}\dot a^{022} &= a^{012} + a^{021} + a^{120}. \end{aligned} \tag{23}$$

Розв'яжемо спочатку систему рівнянь (22). Взявши лінійну комбінацію її рівнянь відповідно з множниками $-m^{12}$, m^{02}, $-m^{01}$, одержимо

$$(m^{12})^2 = (m^{01})^2 + (m^{02})^2. \tag{24}$$

Загальним розв'язком системи (22) при умові (24) є функції

$$m^{01} = m^{02} = m^{12} = 0,$$

або

$$m^{01} = \frac{\sinh\varphi}{\dot\varphi}, m^{02} = \frac{1}{\dot\varphi}, m^{12} = \frac{\cosh\varphi}{\dot\varphi}, \tag{25}$$

де $\varphi = \varphi(u)$ — довільна гладка функція, $\varphi(u) \neq const$.

Зауваження. У випадку $m^{\mu\nu} = 0$ задача опису диференціальних рівнянь, інваріантних відносно алгебри $AP(1,n)$, розв'язана в [13]. Тому основну увагу ми звернемо на випадок (25).

Застосувавши перетворення еквівалентності

$$x_\mu \to x_\mu, \varphi(u) \to u,$$

одержимо

$$m^{01} = \sinh u, m^{02} = 1, m^{12} = \cosh u. \qquad (26)$$

Застосувавши перетворення еквівалентності

$$x_\mu \to x_\mu + \theta_\mu(u), u \to u,$$

де

$$\begin{cases} \theta_0 = \int \frac{a^{120}}{m^{12}} du, \\ \theta_1 = \int \frac{a^{021}}{m^{02}} du, \\ \theta_2 = \int \frac{a^{012}}{m^{01}} du, \end{cases}$$

ми можемо позбутися від функцій a^{012}, a^{021}, a^{120} в операторах $J_{\mu\nu}$. Тобто, не втрачаючи загальності, можна покласти

$$a^{012} = a^{021} = a^{120} = 0. \qquad (27)$$

Неважко переконатися, що при умовах (27) система рівнянь (23) сумісна, якщо

$$\begin{cases} a^{020} - a^{121} = 0, \\ a^{010} + a^{122} = 0, \\ a^{011} - a^{022} = 0. \end{cases}$$

Тоді з системи (23) одержуємо

$$\dot{a}^{\alpha\beta\gamma} = 0.$$

Таким чином

$$\begin{cases} a^{011} = a^{022} = k_0, a^{010} = -a^{122} = k_1, \\ a^{020} = a^{121} = k_2, \end{cases}$$

де k_μ — довільні сталі.

В результаті одержуємо, що оператори $J_{\mu\nu}$ мають вигляд

$$J_{\mu\nu} = (x^\mu + k^\mu)\partial_\nu - (x^\nu + k^\nu)\partial_\mu + m^{\mu\nu}(u)\partial_u. \qquad (28)$$

Оператори (28) з точністю до перетворень

$$x_\mu + k_\mu \to x_\mu, u \to u$$

еквівалентні операторам

$$J_{\mu\nu} = x^\mu\partial_\nu - x^\nu\partial_\mu + m^{\mu\nu}(u)\partial_u,$$

де $m^{\mu\nu}(u)$ задаються формулами (26).

Зображення розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,2)$ та конформної алгебри AC(1,2)

Розширимо алгебру Пуанкаре

$$AP(1,2) = \langle \partial_\mu, J_{\mu\nu} = x^\mu\partial_\nu - x^\nu\partial_\mu + m^{\mu\nu}(u)\partial_u \rangle$$

оператором масштабних перетворень D, який будемо шукати в довільному вигляді

$$D = \xi^\gamma(x,u)\partial_\gamma + \eta(x,u)\partial_u,$$

де $\xi^\gamma = \xi^\gamma(x,u)$, $\eta = \eta(x,u)$ — шукані функції. Для того, щоб оператори ∂_μ, $J_{\mu\nu}$, D утворювали розширену алгебру Пуанкаре $AP_1(1,2)$, необхідно виконання умов комутування (9) — (10). З умов (9) одержимо

$$\xi^\gamma_\alpha\partial_\gamma + \eta_\alpha\partial_u = \partial_\alpha,$$

звідки

$$\xi^\gamma_\alpha = \delta_{\alpha\gamma}, \eta_\alpha = 0. \qquad (29)$$

Загальним розв'язком системи (29) є функції

$$\xi^\gamma = x_\gamma + b^\gamma(u), \eta = \eta(u),$$

де $b^\gamma(u)$, $\eta(u)$ — довільні гладкі функції аргумента u. Отже,

$$D = x_\gamma\partial_\gamma + b^\gamma(u)\partial_\gamma + \eta(u)\partial_u. \qquad (30)$$

Залишається задовольнити умови (10):

$$[J_{\alpha\beta}, D] =$$
$$= [x^\alpha\partial_\beta - x^\beta\partial_\alpha + m^{\alpha\beta}(u)\partial_u,$$
$$x_\gamma\partial\gamma + b^\gamma(u)\partial_\gamma + \eta(u)\partial_u] =$$
$$= m^{\alpha\beta}(\dot{b}^\gamma\partial_\gamma + \dot{\eta}\partial_u) - b_\alpha\partial_\beta + b_\beta\partial\alpha - \eta\dot{m}^{\alpha\beta}\partial_u = 0.$$

Тоді

$$m^{\alpha\beta}\dot{b}^\gamma = (g^{\alpha\sigma}\delta_{\beta\gamma} - g^{\beta\sigma}\delta_{\alpha\gamma})b^\sigma, \qquad (31)$$

$$m^{\alpha\beta}\dot{\eta} = \eta\dot{m}^{\alpha\beta}. \qquad (32)$$

Враховуючи вигляд функцій $m^{\alpha\beta}$, які задані формулами (26) одержуємо, що рівняння (31) — (32) можливі лише при $b^\gamma = \eta = 0$. З формули (30) випливає, що

$$D = x_\gamma\partial_\gamma.$$

Отже, ми показали, що у випадку $m^{\mu\nu} \neq 0$ можлива лише наступна реалізація розширеної алгебри Пуанкаре

$$AP_1(1,2) = \langle \partial_\mu,$$
$$J_{\mu\nu} = x^\mu\partial_\nu - x^\nu\partial_\mu + m^{\mu\nu}(u)\partial_u, D = x_\gamma\partial_\gamma \rangle. \qquad (33)$$

Доповнимо тепер алгебру (33) операторами конформних перетворень

$$K_\mu = \xi^{\mu\gamma}(x,u)\partial_\gamma + \eta^\mu(x,u)\partial_u. \quad (34)$$

Для того, щоб оператори (33) — (34) утворювали конформну алгебру $AC(1,2)$, необхідно виконання умов (11) — (13), які і уточнюють шукані функції $\xi^{\mu\gamma}(x,u)$, $\eta^\mu(x,u)$.

З умов (11) одержуємо

$$\begin{aligned}\xi^{\mu\gamma}_\alpha &= 2g^{\alpha\mu}x_\gamma + 2\delta_{\alpha\gamma}x^\mu - 2\delta_{\mu\gamma}x^\alpha,\\ \eta^\mu_\alpha &= 2m^{\mu\alpha}.\end{aligned} \quad (35)$$

Загальним розв'язком системи рівнянь (35) є функції

$$\begin{aligned}\xi^{\mu\gamma} &= 2x^\mu x_\nu - \delta_{\mu\gamma}x_\nu x^\nu + a^{\mu\gamma}(u),\\ \eta^\mu &= 2m^{\mu\alpha}x_\alpha + b^\mu(u),\end{aligned}$$

де $a^{\mu\gamma}(u)$, $b^\mu(u)$ — довільні гладкі функції.

Використавши комутаційні співвідношення (13), одержуємо, що $a^{\mu\beta} = b^\mu = 0$. Тому

$$K_\mu = 2x^\mu D - x^2\partial_\mu + 2x_\nu m^{\mu\nu}\partial_u. \quad (36)$$

Комутаційні співвідношення (12) для операторів (36) виконуються тотожньо.

Таким чином ми одержали наступну реалізацію конформної алгебри

$$\begin{aligned}&AC(1,2) = \langle \partial_\mu,\\ &J_{\mu\nu} = x^\mu\partial_\nu - x^\nu\partial_\mu + m^{\mu\nu}(u)\partial_u, D = x_\gamma\partial_\gamma,\\ &K_\mu = 2x^\mu D - x^2\partial_\mu + 2x_\nu m^{\mu\nu}\partial_u\rangle.\end{aligned}$$

Отже, в даній роботі з точністю до перетворень еквівалентності (14) описано всі можливі зображення алгебри Пуанкаре, розширеної алгебри Пуанкаре та конформної алгебри, відносно яких можуть бути інваріантні квазілінійні диференціальні рівняння з частиними похідними другого порядку вигляду (1) у випадку трьох незалежних змінних.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Барбашов Б. М., Нестеренко В. В.* Модель релятивистской струны в физике адронов. — М. : Энергоатомиздат, 1987. — 176 с.
2. *Барбашов Б. М., Черников Н. А.* Решение и квантование нелинейной двумерной модели типа Борна-Инфельда // Журн. эксперим. и теорет. физики. — 1966. — Т. 60, № 5. — С. 1296–1308.
3. *Блажко Л. М.* Інваріантність квазілінійного рівняння другого порядку відносно конформної алгебри // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2001. — Т. 36. — С. 40–44.
4. *Блажко Л. М* Симетрійні властивості і точні розв'язки нелінійних рівнянь гіперболічного типу: дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.01.03 / — К., 2008. — 138 с.
5. *Лагно В.І., Спічак С.В., Стогній В.І.* Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу // Праці Інституту математики НАН України : Мат-ка та її застосування. – 2002. – Т. 45. – 359 с.
6. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М. : Наука, 1978. — 400 с. — English translation: Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations. — New York : Academic Press, 1982. — 400 p.
7. *Серов М.І.,Блажко Л. М* Конформна інваріантність квазілінійних диференціальних рівняянь з частинними похідними другого порядку // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. – Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2012. – Вип. 23, № 1. – С. 26.
8. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики. — К. : Наук. думка, 1989. — 339 с.
9. *Уизем Д.* Линейные и нелинейные волны. — М. : Мир, 1977. — 622 с.
10. *Akhatov I.S., Gazizov R.K., Ibragimov N.H.,* Nonlocal symmetries. Heuristic approach // J. Sov. Math. – 55 (1991) – P. 1401-1450.
11. *Rideau G. and Winternitz P.* Nonlinear equations invariant under Poincare, similitude and conformal groups in two-dimensional space-time // J. Math. Phys., 1990. — V.31 — P. 1095–1105.
12. *Fushchych W.I.* Симетрія рівнянь лінійної та нелінійної квантової механіки // Scientific Works, 2004. — V. 6 — P. 105-119.