УДК 517.977

©2014 р. **М.Ю. Горбатенко**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ГАРАНТОВАНІ ОЦІНКИ ФУНКЦІОНАЛІВ, ВИЗНАЧЕНИХ НА РОЗВ'ЯЗКАХ СТАЦІОНАРНИХ РІВНЯНЬ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТА НА ЇХ ГРАДІЄНТАХ

При квадратичних відхиленнях на невідомі детерміновані данні досліджена задача гарантованого оцінювання значень лінійних неперервних функціоналів від розв'язків стаціонарного рівняння теплопровідності та градієнтів цих розв'язків за їх одночасними зашумленими спостереженнями. Отримано гарантовані оцінки лінійних неперервних функціоналів від правих частин цих рівнянь.

We investigate the problem of guaranteed estimation the values of linear continuous functionals of stationary solutions of the thermal conductivity equation and gradients of solutions for their simultaneous noisy observation for quadratic deviation with unknown deterministic data. Guaranteed estimations for linear continuous functionals of the right hand sides of these equations are obtained.

Вступ.

В роботі [1] при спеціальних обмеженнях на невідомі дані досліджено задачі мінімаксного (або, що теж саме, гарантованого) середньоквадратичного оцінювання розв'язків стаціонарних крайових задач теплопровідності за одночасним спостереженнями температури та теплового потоку з адитивними похибками вимірюваня. А саме, отримані теореми про загальний вигляд гарантованих оцінок функціоналів від невідомої температури та теплового потоку.

Практичний інтерес, на наш погляд, представляють також задачі гарантованого оцінювання функціоналів від невідомої температури і температурного градієнту за їх зашумленими спостереженнями, а також функціоналів від невідомого розподілу щільності теплових джерел.

В даній статті отримані

- твердження про зведення задач гарантованого оцінювання функціоналів від розв'язків, та їх градієнтів до спеціальних задач оптимального керування змішаними варіаційними рівняннями спеціального вигляду з квадратичними критеріями якості;
- системи однозначно розв'язних варіаційних рівнянь, через розв'язки яких виражаються відповідні гарантовані оцінки;
- вирази для похибок гарантованого середньоквадратичного оцінювання;
- методи оцінювання невідомого розподілу щільності теплових джерел, як за спостереженнями температури, так і за спостереженнями температурного градієнту.

Постановка задачі.

Перша з задач оцінювання, що розглядається в даній роботі, полягає в тому, щоб за спостереженням випадкових елементів

$$y_1 = \bar{C}_1 \mathbf{grad}\, \varphi + \eta_1, \quad y_2 = C_2 \varphi + \eta_2 \tag{1}$$

оцінити значення лінійного функціоналу

$$l(\mathbf{grad}\, \varphi, \varphi) := \int_D (\bar{\mathbf{l}}_1(x), \mathbf{grad}\, \varphi(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx + $$

$$+ \int_D l_2(x)\varphi(x)\, dx \tag{2}$$

в класі оцінок виду

$$\widehat{l(\mathbf{grad}\, \varphi, \varphi)} := (y_1, u_1)_{H_1} + (y_2, u_2)_{H_2} + c, \tag{3}$$

а друга задача – в тому, щоб за спостереженнями (1) в класі оцінок

$$\widehat{l(f)} := (y_1, u_1)_{H_1} + (y_2, u_2)_{H_2} + c, \tag{4}$$

оцінити вираз

$$l(f) := \int_D l_0(x) f(x)\,dx \tag{5}$$

при умовах, що

$$f \in G_0 := \Big\{ \tilde f \in L^2(D) : \Big(Q(\tilde f - f_0), \tilde f - f_0 \Big)_{L^2(D)} \le 1 \Big\}, \tag{6}$$

а похибки η_1 і η_2 в спостереженнях (1) задовольняють нерівність

$$(\eta_1, \eta_2) \in G_1 := \{ \tilde\eta_1 \in L^2(\Omega, H_1), \tilde\eta_2 \in L^2(\Omega, H_2) : \mathbb{E}\tilde\eta_1 = 0, \mathbb{E}\tilde\eta_2 = 0, \mathbb{E}(\xi_1, u_1)_{H_1}(\xi_2, u_2)_{H_2} = 0 \ \forall u_1 \in H_1, u_2 \in H_2, \quad \mathbb{E}(\tilde Q_1 \tilde\eta_1, \tilde\eta_1)_{H_1} \le 1, \mathbb{E}(\tilde Q_2 \tilde\eta_2, \tilde\eta_2)_{H_2} \le 1 \}. \tag{7}$$

Тут φ – невідомий розв'язок задачі

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}\,\mathbf{grad}\,\varphi) = f \quad \text{в} \quad D, \tag{8}$$

$$\varphi = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{9}$$

яку, увівши змінну $\mathbf{j} = \mathbf{A}\,\mathbf{grad}\,\varphi$, можна записати у вигляді еквівалентної системи першого порядку:[1]

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{j} = \mathbf{grad}\,\varphi \quad \text{в} \quad D, \tag{12}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = f \quad \text{в} \quad D, \quad \varphi = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{13}$$

де $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x) = (a_{ij}(x))$ симетрична $n \times n$-матриця з елементами $a_{ij} \in L^\infty(D)$, для якої існують такі додатні числа μ_1 і μ_2, що виконується нерівність $\mu_1 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \mu_2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \ \forall x \in D, \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, через $\mathbf{A}^{-1}$ позначена, обернена до $\mathbf{A}$; H_1 і H_2 сепарабельні гільбертови простори над $\mathbb{R}$ із скалярними добутками $(\cdot,\cdot)_{H_1}$ та $(\cdot,\cdot)_{H_2}$ і нормами $\|\cdot\|_{H_1}$ та $\|\cdot\|_{H_2}$; $L^2(\Omega, H_i)$ - простір Бохнера, що складається з випадкових елементів $\xi_i = \xi_i(\omega)$, визначених на деякому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ зі значеннями в H_i таких, що $\mathbb{E}\|\xi_i(\omega)\|_{H_i}^2 < \infty$, $i = 1, 2$, де $\mathbb{E}$ -символ математичного сподівання; D-обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з ліпшицевою границею; $H(\operatorname{div}; D) := \{\mathbf{v} \in L^2(D)^n, \operatorname{div}\mathbf{v} \in L^2(D)\}$; $\bar{\mathbf{l}}_1$ і l_2, l_0 – задані елементи із $L^2(D)^n$ і $L^2(D)$ відповідно; $u_1 \in H_1$, $u_2 \in H_2$, $c \in \mathbb{R}$; $\bar C_1 \in \mathcal{L}(L^2(D)^n, H_1)$ і $C_2 \in \mathcal{L}(L^2(D), H_2)$ – лінійні неперервні оператори; $f_0 \in L^2(D)$ – задана функція; Q, $\tilde Q_1$ і $\tilde Q_2$ – задані в $L^2(D)$, H_1 і H_2 обмежені самоспряжені додатньо визначені оператори, що мають обмежені обернені.

Нехай $u := (u_1, u_2) \in H := H_1 \times H_2$.

Означення 1. *Оцінку вигляду*

$$\widehat{\widehat{l(\mathbf{grad}\,\varphi, \varphi)}} = (y_1, \hat u_1)_{H_1} + (y_2, \hat u_2)_{H_2} + \hat c \tag{14}$$

будемо називати мінімаксною (або гарантованою)оцінкою $l(\mathbf{grad}\,\varphi, \varphi)$ за спостереженнями (1), якщо елементи $\hat u_1 \in H_1$, $\hat u_2 \in H_2$ і число $\hat c$ визначаються із умови

$$\inf_{u \in H,\, c \in \mathbb{R}} \sigma(u, c) = \sigma(\hat u, \hat c), \tag{15}$$

де

$$\sigma(u, c) := \sup_{\tilde f \in G_0, (\tilde\eta_1, \tilde\eta_2) \in G_1} \mathbb{E}|l(\mathbf{grad}\,\tilde\varphi, \tilde\varphi) - \widehat{l(\mathbf{grad}\,\tilde\varphi, \tilde\varphi)}|^2,$$

а $\tilde\varphi$ задовольняє системі варіаційних рівнянь (10)–(11) *при $f(x) = \tilde f(x)$,* $\widehat{l(\mathbf{grad}\,\tilde\varphi, \tilde\varphi)} := (\tilde y_1, u_1)_{H_1} + (\tilde y_2, u_2)_{H_2} + c, \tilde y_1 = \bar C_1 \mathbf{grad}\,\tilde\varphi + \tilde\eta_1, \quad \tilde y_2 = C_2\tilde\varphi + \tilde\eta_2.$

Величину

$$\sigma := [\sigma(\hat u, \hat c)]^{1/2} \tag{16}$$

будемо називати похибкою мінімаксного оцінювання виразу $l(\mathbf{grad}\,\varphi, \varphi)$.

Означення 2. *Оцінку вигляду*

$$\widehat{\widehat{l(f)}} = (y_1, \hat u_1)_{H_1} + (y_2, \hat u_2)_{H_2} + \hat c \tag{17}$$

будемо називати мінімаксною (або гарантованою) оцінкою $l(f)$ за спостереженнями (1), якщо елементи $\hat u_1 \in H_1$, $\hat u_2 \in H_2$ і

[1] Під узагальненим розв'язком задачі (12)–(13) будемо розуміти пару функцій $(\mathbf{j}, \varphi) \in H(\operatorname{div}; D) \times L^2(\Omega)$, що задовольняє співвідношенням

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{j}(x), \mathbf{q}(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx + \int_D \varphi(x) \operatorname{div}\mathbf{q}(x) dx = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in H(\operatorname{div}; D) \tag{10}$$

$$\int_D v(x) \operatorname{div}\mathbf{j}(x) dx = \int_D f(x) v(x)\,dx \ \forall v \in L^2(D). \tag{11}$$

З фізичної точки зору, крайова задача (12)–(13), або еквівалента до неї задача (8)–(9), моделює усталений процесс розповсюдження тепла в області D, при цьому функції $\varphi(x)$, $\mathbf{j}(x)$, $A^{-1}(x)\mathbf{j}(x)$ і $f(x)$ відповідно мають смисл температури, теплового потоку, теплового градієнта температури і об'ємної щільності теплових джерел в точці x.

число $\hat{c}$ визначаються із умови

$$\inf_{u\in H,\, c\in\mathbb{R}} \sigma(u,c) = \sigma(\hat{u},\hat{c}), \tag{18}$$

де

$$\sigma(u,c) := \sup_{\tilde{f}\in G_0, (\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2)\in G_1} \mathbb{E}|l(\tilde{f}) - \widehat{l(\tilde{f})}|^2,$$

$\widehat{l(\tilde{f})} := (\tilde{y}_1, u_1)_{H_1} + (\tilde{y}_2, u_2)_{H_2} + c, \tilde{y}_1 = \bar{C}_1\mathbf{grad}\,\tilde{\varphi} + \tilde{\eta}_1$, $\tilde{y}_2 = C_2\tilde{\varphi}+\tilde{\eta}_2$, *а $\tilde{\varphi}$ задовольняє системі варіаційних рівнянь* (10)–(11) *при $f(x) = \tilde{f}(x)$.*

Величину

$$\sigma := [\sigma(\hat{u},\hat{c})]^{1/2} \tag{19}$$

будемо називати похибкою мінімаксного оцінювання виразу $l(f)$.

Для отримання представлення для мінімаксних оцінок і похибок оцінювання введемо до розгляду при фіксованому $u \in H$ пару функцій $(\mathbf{z}_1(\cdot;u), z_2(\cdot;u)) \in H(\mathrm{div};D) \times L^2(D)$, як єдиний розв'язок наступної варіаційної задачі:

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\,\mathbf{z}_1(x;u), \mathbf{q}(x))_{\mathbb{R}^n} dx + $$
$$+ \int_D z_2(x;u)\mathrm{div}\,\mathbf{q}(x)\,dx$$
$$= \int_D (\mathbf{A}^{-1}\bar{\mathbf{l}}_1 - \mathbf{A}^{-1}\bar{C}_1^t J_{H_1} u_1(x), \mathbf{q}(x))_{\mathbb{R}^n} dx$$
$$\forall \mathbf{q} \in H(\mathrm{div}, D), \tag{20}$$

$$\int_D v(x)\mathrm{div}\,\mathbf{z}_1(x;u)\,dx =$$
$$= \int_D (l_2(x) - (C_2^t J_{H_2} u_2)(x)) v(x)\,dx \tag{21}$$
$$\forall v \in L^2(D).$$

Основні результати.

Лема 1. *Задача знаходження мінімаксної оцінки виразу $l(\mathbf{grad}\,\varphi,\varphi)$ еквівалентна задачі оптимального керування системою, що описується варіаційною задачею (20) – (21) з функцією вартості вигляду*

$$I(u) = (Q^{-1}z_2(\cdot;u), z_2(\cdot;u))_{L^2(D)} +$$
$$+ (\tilde{Q}_1^{-1}u_1, u_1)_{H_1} + (\tilde{Q}_2^{-1}u_2,u_2)_{H_2} \to \inf_{u\in H}. \tag{22}$$

Доведення. Враховуючи означення 1 і той факт, що $\tilde{\mathbf{j}} = \mathbf{A}\,\mathbf{grad}\,\tilde{\varphi}$, маємо при $u = (u_1,u_2) \in H_1 \times H_2$

$$l(\mathbf{grad}\,\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}) - l(\widehat{\mathbf{grad}\,\tilde{\varphi}},\tilde{\varphi}) =$$
$$= (\bar{\mathbf{l}}_1, \mathbf{grad}\,\tilde{\varphi})_{L^2(D)^n} + (l_2,\tilde{\varphi})_{L^2(D)}$$
$$-(y_1,u_1)_{H_1} - (y_2,u_2)_{H_2} - c =$$
$$= (\bar{\mathbf{l}}_1, \mathbf{grad}\,\tilde{\varphi})_{L^2(D)^n} + (l_2,\tilde{\varphi})_{L^2(D)}$$
$$-(u_1, \bar{C}_1\mathbf{grad}\,\tilde{\varphi}+\tilde{\eta}_1)_{H_1} - (u_2, C_2\tilde{\varphi}+\tilde{\eta}_2)_{H_2} - c =$$
$$= (\bar{\mathbf{l}}_1, \mathbf{grad}\,\tilde{\varphi})_{L^2(D)^n} + (l_2,\tilde{\varphi})_{L^2(D)}$$
$$- < J_{H_1}u_1, \bar{C}_1\mathbf{grad}\,\tilde{\varphi} >_{H_1'\times H_1} -$$
$$- < J_{H_2}u_2, C_2\tilde{\varphi} >_{H_2'\times H_2}$$
$$-(u_1,\tilde{\eta}_1)_{H_1} - (u_2,\tilde{\eta}_2)_{H_2} - c =$$
$$= (\bar{\mathbf{l}}_1, \mathbf{grad}\,\tilde{\varphi})_{L^2(D)^n} + (l_2,\tilde{\varphi})_{L^2(D)}$$
$$-(\bar{C}_1^t J_{H_1}u_1, \mathbf{grad}\,\tilde{\varphi})_{L^2(D)^n} - (C_2^t J_{H_2}u_2,\tilde{\varphi})_{L^2(D)} -$$
$$-(u_1,\tilde{\eta}_1)_{H_1} - (u_2,\tilde{\eta}_2)_{H_2} - c$$
$$= (\bar{\mathbf{l}}_1, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{grad}\,\tilde{\varphi})_{L^2(D)^n} + (l_2,\tilde{\varphi})_{L^2(D)}$$
$$-(\bar{C}_1^t J_{H_1}u_1, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{grad}\,\tilde{\varphi})_{L^2(D)^n} -$$
$$-(C_2^t J_{H_2}u_2,\tilde{\varphi})_{L^2(D)} - (u_1,\tilde{\eta}_1)_{H_1} - (u_2,\tilde{\eta}_2)_{H_2} - c$$
$$= (\mathbf{A}^{-1}\bar{\mathbf{l}}_1 - \mathbf{A}^{-1}\bar{C}_1^t J_{H_1}u_1, \tilde{\mathbf{j}})_{L^2(D)^n} +$$
$$+(l_2 - C_2^t J_{H_2}u_2, \tilde{\varphi})_{L^2(D)}$$
$$-(u_1,\tilde{\eta}_1)_{H_1} - (u_2,\tilde{\eta}_2)_{H_2} - c. \tag{23}$$

Вводячи позначення $\mathbf{l}_1 = \mathbf{A}^{-1}\bar{\mathbf{l}}_1$ і $C_1 = \bar{C}_1\mathbf{A}^{-1}$, (і, отже $C_1^t = \mathbf{A}^{-1}\bar{C}_1^t$), і з цього місця дослівно повторюючи доведення леми 1 з [1], прийдемо до справедливості висновку даної леми.

З цієї леми і міркувань, за допомогою яких були доведені теореми 1 і 2 з роботи [1], випливає наступне твердження.

Теорема 1. *Існує єдина мінімаксна оцінка $\widehat{l(\mathbf{grad}\,\varphi,\varphi)}$ виразу*

$$l(\mathbf{grad}\,\varphi,\varphi) := \int_D (\bar{\mathbf{l}}_1(x), \mathbf{grad}\,\varphi(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx +$$
$$+ \int_D l_2(x)\varphi(x)\,dx,$$

яка має вигляд

$$\widehat{\widehat{l(\mathbf{j},\varphi)}} = (y_1,\hat{u}_1)_{H_1} + (y_2,\hat{u}_2)_{H_2} + \hat{c} = l(\widehat{\mathbf{grad}}\,\varphi,\hat{\varphi})$$

де

$$\hat{c} = \int_D \hat{z}_2(x) f_0(x)\,dx,$$

$$\hat{u}_1 = \tilde{Q}_1 \bar{C}_1 \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}_1, \quad \hat{u}_2 = \tilde{Q}_2 C_2 p_2,$$
$$\widehat{\mathbf{grad}}\,\varphi(x) = \mathbf{A}^{-1}(x)\hat{\mathbf{j}}(x),$$

а функції $\hat{\mathbf{z}}_1, \mathbf{p}_1 \in H(\mathrm{div}, D)$ *і* $\hat{z}_2, p_2 \in L^2(D)$ *та* $\hat{\mathbf{j}} \in H(\mathrm{div}, D)$ *і* $\hat{\varphi} \in L^2(D)$ *знаходяться з розв'язку наступних однозначно розв'язних задач:*

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\,\hat{\mathbf{z}}_1(x), \mathbf{q}_1(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D \hat{z}_2(x)\mathrm{div}\,\mathbf{q}_1(x)\,dx = \int_D (\mathbf{l}_1(x) - C_1^t J_{H_1}\tilde{Q}_1 C_1 \mathbf{p}_1(x), \mathbf{q}_1(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx \quad \forall \mathbf{q}_1 \in H(\mathrm{div}, D), \tag{24}$$

$$\int_D v_1(x)\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{z}}_1(x)\,dx = \int_D (l_2(x) - C_2^t J_{H_2}\tilde{Q}_2 C_2 p_2(x))v_1(x)\,dx \ \ \forall v_1 \in L^2(D), \tag{25}$$

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\,\mathbf{p}_1(x), \mathbf{q}_2(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D p_2(x)\mathrm{div}\,\mathbf{q}_2(x)\,dx = 0 \ \ \forall \mathbf{q}_2 \in H(\mathrm{div}, D), \tag{26}$$

$$\int_D v_2(x)\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{p}}_1(x)\,dx = \int_D v_2(x)Q^{-1}\hat{z}_2(x)\,dx \quad \forall v_2 \in L^2(D). \tag{27}$$

та

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\,\hat{\mathbf{p}}_1(x), \mathbf{q}_1(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D \hat{p}_2(x)\mathrm{div}\,\mathbf{q}_1(x)\,dx = \int_D (C_1^t J_{H_1}\tilde{Q}_1(y_1 - C_1\hat{\mathbf{j}})(x), \mathbf{q}_1(x))_{\mathbb{R}^n} dx \quad \mathbf{q}_1 \in H(\mathrm{div}, D), \tag{28}$$

$$\int_D v_1(x)\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{p}}_1(x)\,dx = \int_D C_2^t J_{H_2}\tilde{Q}_2(y_2 - C_2\hat{\varphi})(x)v_1(x)\,dx \tag{29}$$
$$\forall v_1 \in L^2(D),$$

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\,\hat{\mathbf{j}}(x), \mathbf{q}_2(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx + \int_D \hat{\varphi}(x)\mathrm{div}\,\mathbf{q}_2(x)\,dx = 0 \tag{30}$$
$$\forall \mathbf{q}_2 \in H(\mathrm{div}, D),$$

$$\int_D v_2(x)\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{j}}(x)\,dx = \int_D v_2(x)(Q^{-1}\hat{p}_2(x) + f_0(x))\,dx \forall v_2 \in L^2(D), \tag{31}$$

відповідно, в яких $C_1 = \bar{C}_1\mathbf{A}^{-1}$, $C_1^t = \mathbf{A}^{-1}\bar{C}_1^t$, *а у формулах* (28) *і* (29) *під* y_1 *і* y_2 *слід розуміти спостереження* (1) .

Похибка мінімаксного оцінювання σ *визначається формулою*

$$\sigma = l(\mathbf{p}_1, p_2)^{1/2} = \Big(\int_D (\bar{\mathbf{l}}_1(x), \bar{\mathbf{p}}_1(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx + \int_D l_2(x)p_2(x)\,dx\Big)^{1/2}, \tag{32}$$

де $\bar{\mathbf{p}}_1(x) = \mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{p}_1(x)$.

Наслідок. Функції $\hat{\varphi}$ і $\widehat{\mathbf{grad}\,\varphi}$ можуть бути взяті за оцінки розвязку φ задачі (10)–(11) і його градієнту $\mathbf{grad}\,\varphi$.

Аналогічно встановлюється наступний результат про представлення мінімаксної оцінки виразу $l(f)$ за спостереженнями (1).

Теорема 2. *Існує єдина мінімаксна оцінка значення* $l(f)$, *яка має вигляд*

$$\widehat{\widehat{l(f)}} = (y_1(\mathbf{j};\eta_1), \hat{u}_1)_{H_1} + (y_2(\varphi;\eta_2), \hat{u}_2)_{H_2} + \hat{c} = l(\hat{f})$$

де

$$\hat{c} = \int_D (l_0(x) + \hat{z}_2(x))f_0(x)\,dx,$$
$$\hat{u}_1 = \tilde{Q}_1\bar{C}_1\mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}_1, \quad \hat{u}_2 = \tilde{Q}_2 C_2 p_2,$$

$\hat{f}(x) = Q^{-1}(x)\hat{p}_2(x) + f^{(0)}(x)$, *а функції* $\mathbf{p}_1 \in H(\mathrm{div}, D)$ $\hat{z}_2, p_2, \in L^2(D)$ *та* $\hat{p}_2 \in L^2(D)$ *знаходяться з розв'язку задач*

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\,\hat{\mathbf{z}}_1(x), \mathbf{q}_1(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D \hat{z}_2(x)\mathrm{div}\,\mathbf{q}_1(x)\,dx = -\int_D (C_1^t J_{H_1}\tilde{Q}_1 C_1 \mathbf{p}_1(x), \mathbf{q}_1(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx \quad \forall \mathbf{q}_1 \in H(\mathrm{div}, D), \tag{33}$$

$$\int_D v_1(x)\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{z}}_1(x)\,dx =$$

$$= -\int_D (C_2^t J_{H_2}\tilde{Q}_2 C_2 p_2(x) v_1(x)\,dx \qquad (34)$$

$$\forall v_1 \in L^2(D),$$

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\,\mathbf{p}_1(x), \mathbf{q}_2(x))_{\mathbb{R}^n} dx +$$

$$+\int_D p_2(x) \operatorname{div} \mathbf{q}_2(x)\,dx = 0 \qquad (35)$$

$$\forall \mathbf{q}_2 \in H(\operatorname{div}, D),$$

$$\int_D v_2(x) \operatorname{div} \mathbf{p}_1(x)\,dx =$$

$$= \int_D v_2(x) Q^{-1}(l_0 + \hat{z}_2(\cdot))(x)\,dx \qquad (36)$$

$$\forall v_2 \in L^2(D).$$

та (28)–(31) *відповідно, в яких* $C_1 = \bar{C}_1 \mathbf{A}^{-1}$, $C_1^t = \mathbf{A}^{-1}\bar{C}_1^t$, *а у формулах* (28) *і* (29) *під* y_1 *і* y_2 *слід розуміти спостереження* (1) .

Похибка мінімаксного оцінювання σ *визначається формулою*

$$\sigma = (l(Q^{-1}(l_0 + \hat{z}_2)))^{1/2}. \qquad (37)$$

Наслідок. Функція $\hat{f}(x) = Q^{-1}(x)\hat{p}_2(x) + f^{(0)}(x)$ може бути взята за оцінку $f(x)$ у правій частини рівняння (11).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ю.К. Подлипенко, М.Ю. Горбатенко.* Оцінювання узагальнених розв'язків лінійних еліптичних рівнянь, що допускають змішане варіаційне формулювання // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія:фізико-математичні науки.– 2008.– Випуск 3.– С.158-164.

2. *Brezzi F., Fortin M.* Mixed and Hybrid Finite Element Methods, 1991, Springer-Verlag.

3. *Raviart P.A., Thomas J.M.* A mixed finite element method for second order elliptic problems, Mathematical Aspects of the Finite Element Method, Lecture Notes in Math. 606, Springer-Verlag, New York (1977).