УДК 517.95

©2014 р. В.В. Городецький, О.В. Мартинюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ТА ДВОТОЧКОВОЇ ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ОПЕРАТОРАМИ УЗАГАЛЬНЕНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ГЕЛЬФОНДА-ЛЕОНТЬЄВА

Встановлена розв'язність задачі Коші та двоточкової задачі для еволюційних рівнянь з операторами узагальненого диференціювання у просторах типу S та S'.

We prove the solvability of the Cauchy and the two-point problems for evolution equations with generalized differential operators in spaces of S and S'-type.

У теорії аналітичних у крузі функцій вивчається питання про зображення лінійних неперервних відображень у вигляді операторів узагальненого диференціювання та інтегрування скінченного та нескінченного порядків. Цими питаннями займалися Ж. Дельсарт, Ж.-Л. Ліонс, Ю.Ф. Коробейник, М.І. Нагнибіда, В.В. Напалков, В.П. Подпорін, С.С. Лінчук, В.А. Ткаченко, І.І Райчинов, М.Ю.Царьков та інші математики.

Важливий клас операторів узагальненого диференціювання утворюють оператори Гельфонда-Леонтьєва [1], введені в середині XX сторіччя при вивченні розкладів цілих функцій в узагальнені ряди Фур'є. Ці оператори позначаються такими символами $D^n(F, \cdot)$, $n \in \mathbb{N}$. Властивості таких операторів досліджували і продовжують досліджувати математики в просторі A_∞ однозначних і цілих в $\mathbb{C}$ функцій з топологією компактної збіжності (A_∞ не є нормованим простором, але в той же час A_∞ – простір Фреше). Прикладами інших просторів, елементами яких є цілі функції і які використовуються при дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші для рівнянь з частинними похідними зі сталими (або залежними лише від t) коефіцієнтами, є простори S_α^β, $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$, введені в [2].

Функції з таких просторів на дійсній осі разом з усіма своїми похідними при $|x| \to \infty$ спадають швидше, ніж $\exp\{-a|x|\}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Топологія просторів S_α^β відрізняється від топології простору A_∞.

Якщо $F(z) = e^z$, $n = 1$, то $D^1(e^z, \cdot)$ збігається із звичайним оператором диференціювання. У працях Горбачука М.Л., Горбачук В.І. [3], Городецького В.В. [4] та інших математиків встановлено, що простори S_α^β та $(S_\alpha^\beta)'$ – простори, топологічно спряжені з ними, – є природними множинами початкових данних задачі Коші для широких класів рівнянь з частинними похідними скінченного та нескінченного порядків, при яких розв'язки є цілими функціями за просторовими змінними.

У зв'язку з цим актуальним є питання про дослідження задачі Коші та багатоточкових за часом задач у просторах, які є узаглненнями просторів S_α^β, а також просторах, топологічно спряжених з ними, для еволюційних рівнянь з операторами узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва як скінченного, так і нескінченного порядків у випадку, коли $F(z) \neq e^z$.

1. Простори $S_{l_k}^{m_n}$ та $S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$. При дослідженні задачі Коші та нелокальних багатоточкових за часом задач для еволюційних рівнянь з оператором узагальненого диференціювання виникають простори, що є узагальненнями просторів типу S, а саме простори $S_{l_k}^{m_n}$. Ці простори також введені Гельфандом Г.Є. і Шиловим І.М., але вони на відміну від просторів S_α^β майже не досліджені. Найбільш детально вивчено випадок, коли $m_n = n^{n\beta}$, $l_k = k^{k\alpha}$, $\beta > 0$,

$\alpha > 0$, $\{n,k\} \subset \mathbb{Z}$. Тому передусім варто зупинитися на тих обмеженнях, які ми накладаємо на послідовності $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ та $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, на топологічній структурі відповідних просторів $S_{l_k}^{m_n}$ та на основних властивостях функцій з цих просторів.

Розглянемо послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ додатних чисел, яка має такі властивості:

1) $\forall n \in \mathbb{Z}_+$: $m_n \leq m_{n+1}$, $m_0 = 1$;

2) $\forall \alpha > 0\ \exists c_\alpha > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}_+$: $m_n \geq c_\alpha \cdot \alpha^n$;

3) $\exists M > 0\ \exists h > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}_+$: $m_{n+1} \leq Mh^n m_n$;

4) $\exists \gamma > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$: $m_n^2 \leq \gamma m_{n-1} \cdot m_{n+1}$;

5) $\exists A > 0\ \exists L > 0\ \forall \{n,l\} \subset \mathbb{Z}_+$: $m_n \cdot m_l \leq AL^{n+l} m_{n+l}$.

Прикладами таких послідовностей є послідовності Жевре вигляду $m_n = (n!)^\beta$, $m_n = n^{n\beta}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\beta > 0$ – фіксований параметр [3].

Разом з ними розглянемо ще одну послідовність $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, яка також має властивості 1) – 5).

Символом $S_{l_k}^{m_n}$ позначимо сукупність усіх функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які задовольняють умову:

$$\exists c > 0\ \exists A > 0\ \exists B > 0\ \forall \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+\ \forall x \in \mathbb{R}:$$

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq cA^k B^n l_k m_n \tag{1}$$

(сталі c, A, $B > 0$ залежать від функції φ).

Топологічна структура в $S_{l_k}^{m_n}$ визначається так. Символом $S_{l_k,A}^{m_n,B}$ позначимо сукупність усіх функцій $\varphi \in S_{l_k}^{m_n}$, таких, що

$$\forall \overline{A} > A\ \forall \overline{B} > B\ \forall x \in \mathbb{R}:$$

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c\overline{A}^k \overline{B}^n l_k m_n, \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Інакше, $S_{l_k,A}^{m_n,B}$ складається з тих функцій $\varphi \in S_{l_k}^{m_n}$, які при довільних $\delta > 0$, $\rho > 0$ задовольняють нерівності

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c_{\delta\rho}(A+\delta)^k (B+\rho)^n l_k m_n,$$

$$\{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}.$$

Ця множина перетворюється в повний зліченно нормований простір, якщо норми в ній ввести за допомогою співвідношень

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,n} \frac{|x^k \varphi^{(n)}(x)|}{(A+\delta)^k (B+\rho)^n l_k m_n},$$

$$\{\delta, \rho\} \subset \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}. \tag{2}$$

Якщо $A_1 < A$, $B_1 < B_2$, то $S_{l_k,A_1}^{m_n,B_1}$ неперервно вкладається в $S_{l_k,A_2}^{m_n,B_2}$ і

$$S_{l_k}^{m_n} = \lim_{\substack{A\to\infty \\ B\to\infty}} \operatorname{ind} S_{l_k,A}^{m_n,B}.$$

Збіжність послідовності $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset S_{l_k}^{m_n}$ до нуля в просторі $S_{l_k}^{m_n}$ – це збіжність за топологією одного з просторів $S_{l_k,A}^{m_n,B}$, до якого належать всі функції φ_ν. Іншими словами, $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ у просторі $S_{l_k}^{m_n}$ тоді й лише тоді, коли функціональна послідовність $\{\varphi_\nu^{(n)}, n \geq 1\}$ при кожному $n \in \mathbb{Z}_+$ рівномірно збігається до нуля на довільному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$ і для деяких c, A, $B > 0$, не залежних від ν, справджуються нерівності

$$|x^k \varphi_\nu^{(n)}(x)| \leq cA^k B^n l_k m_n, x \in \mathbb{R}, \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

У введених просторах визначені й обмежені (а отже, і неперервні) [2] лінійні оператори, важливі для аналізу; в першу чергу це оператори множення на x, на всі многочлени, на нескінченно диференційовні функції, які задовольняють певні умови (зокрема, на функції із вказаних просторів), оператори диференціювання, зсуву аргументу та розтягу.

Розглянемо послідовності $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ спеціального вигляду, а саме, $m_n = n!\rho_n$, $l_k = k!d_k$, де $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, $\rho_0 = 1$, – послідовність додатних чисел, яка задовольняє умови: а) послідовність $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ монотонно спадна; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 0$. Послідовність $\{d_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ має, за припущенням, властивості, аналогічні властивостям а), б). Зазначимо, що послідовності $\{n!\rho_n\}$, $\{k!d_k\}$ задовольняють умови 1) – 5) [5].

Покладемо

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \inf\limits_{k\in\mathbb{Z}_+} (k!d_k/|x|^k), & |x| \geq 1; \end{cases}$$

$$\rho(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} (|y|^n/(n!\rho_n)), & |y| \geq 1. \end{cases}$$

Зазначимо, що ρ – неперервно диференційовна, парна на $\mathbb{R}$ функція, яка монотонно зростає на проміжку $[1, +\infty)$,

$\exists c_0 > 0 \ \exists c > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}\backslash(-1,1) : \rho(x) \geq c_0 e^{c|x|}$.

Функція γ – невід'ємна, неперервно диференційовна, парна на $\mathbb{R}$ функція, яка монотонно спадає на проміжку $[1, +\infty)$, крім того

$$\exists c_0' > 0 \ \exists c' > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1) :$$
$$\gamma(x) \leq c_0' e^{-c'|x|}.$$

Наприклад, якщо $l_k = k^{k(1-\alpha)} = k^k d_k$, $d_k = k^{-k\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, то γ задовольняє нерівність [1]:

$$\exp\Big\{-\frac{(1-\alpha)}{e}|x|^{1/(1-\alpha)}\Big\} \leq \gamma(x) \leq$$
$$\leq C\exp\Big\{-\frac{(1-\alpha)}{e}|x|^{1/(1-\alpha)}\Big\}, C = e^{(1-\alpha)e/2}.$$

Правильним є наступне твердження [5]:

Теорема 1. *Функція $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ належить до простору $S_{l_k}^{m_n}$ тоді й лише тоді, коли вона аналітично продовжується в комплексну площину до цілої функції $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, яка задовольняє умову*

$$\exists a, b, b > 0 \ \forall z = x + iy \in \mathbb{C} :$$
$$|\varphi(z)| \leq c\gamma(ax)\rho(by).$$

Сукупність функцій, які є продовженнями функцій φ з простору $S_{l_k}^{m_n}$ в $\mathbb{C}$, позначимо символом $S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$. Із теореми 1 випливає, що простір $S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$ можна подати як об'єднання зліченно нормованих просторів $S_{l_k,a}^{m_n,b}(\mathbb{C})$ за всіма індексами $a \in \Big\{\dfrac{1}{n}, n \geq 1\Big\}$, $b \in \mathbb{N}$, де $S_{l_k,A}^{m_n,b}(\mathbb{C})$ складається з тих функцій $\varphi \in S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$, для яких справджується нерівність

$$|\varphi(x+iy)| \leq c\gamma(\overline{a}x)\rho(\overline{b}y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C},$$

де $\overline{a}$ – довільна додатна стала, менша за a, $\overline{b}$ – довільна стала, більша за b. Якщо для $\varphi \in S_{l_k,a}^{m_n,b}(\mathbb{C})$ покласти

$$\|\varphi\|_{p\omega} = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{\gamma\Big(a\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)x\Big)\rho((b+\omega)y)},$$
$$p \in \{2, 3, \ldots\}, \quad \omega \in \mathbb{N},$$

то ці норми, внаслідок теореми 1, еквівалентні нормам (2). Отже, послідовність функцій $\{\varphi_\nu(x), \nu \geq 1\} \subset S_{l_k}^{m_n}$ збігається до нуля тоді й лише тоді, коли послідовність функцій $\{\varphi_\nu(z), \nu \geq 1\}$, $z \in \mathbb{C}$, рівномірно збігається до нуля в кожній обмеженій області комплексної площини $\mathbb{C}$, при цьому мають місце нерівності

$$|\varphi_\nu(z)| \leq c\gamma(ax)\rho(by), \quad z = x + iy \in C,$$

зі сталими c, a, $b > 0$, не залежними від ν.

Мультиплікатором у просторі $S_{l_k}^{m_n}$ є функція $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, яка допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину і задовольняє умову:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists c_\varepsilon > 0 : \ |f(z)| \leq c_\varepsilon(\gamma(\varepsilon x))^{-1}\rho(\varepsilon y),$$
$$z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

2. Простір узагальнених функцій $(S_{l_k}^{m_n})'$

Символом $(S_{l_k}^{m_n})'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями. Регулярними узагальненими функціями або регулярними функціоналами називатимемо лінійні неперервні функціонали, дія яких на основні функції $\varphi \in S_{l_k}^{m_n}$ визначається формулою

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx.$$

Кожна локально інтегровна на $\mathbb{R}$ функція f, яка задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists c_\varepsilon > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} :$$
$$|f(x)| \leq c_\varepsilon(\gamma(\varepsilon x))^{-1}, \tag{3}$$

породжує регулярну узагальнену функцію $F_f \in (S_{l_k}^{m_n})'$:

$$\langle F_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in S_{l_k}^{m_n}$$

(тут γ – функція, пов'язана з простором $S_{l_k}^{m_n}$).

Правильним є наступне твердження: *якщо локально інтегровні на $\mathbb{R}$ функції f, g, які задовольняють умову (3), не збігаються на множині додатної міри Лебега, то існує функція $\varphi_0 \in S_{l_k}^{m_n}$ така, що $\langle f, \varphi_0 \rangle \neq \langle g, \varphi_0 \rangle$, тобто $F_f \neq F_g$. Навпаки, якщо $F_f \neq F_g$, то функції f, g не збігаються на множині додатної міри Лебега.*

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню відповідної теореми з [6].

Сформульоване твердження дозволяє ототожнювати локально інтегровні функції, що задовольняють умову (3), з породжуваними ними узагальненими функціями F_f з простору $(S_{l_k}^{m_n})'$. Із властивостей інтеграла Лебега випливає, що вкладення

$$S_{l_k}^{m_n} \ni f \to F_f \in (S_{l_k}^{m_n})'$$

є неперервним.

Якщо $f \in (S_{l_k}^{m_n})'$, то до цього ж простору належить також кожна похідна $f^{(p)}$, $p \in \mathbb{N}$ (тобто елементи простору $(S_{l_k}^{m_n})'$ є нескінченно диференційовними), зсув $f(ay+b)$, $a \neq 0$, добуток αf, де α – мультиплікатор у просторі основних функцій.

Оскільки в основному просторі $S_{l_k}^{m_n}$ визначена операція зсуву аргументу T_x: $\varphi(\xi) \to \varphi(\xi + x)$, то згортку узагальненої функції $f \in (S_{l_k}^{m_n})'$ з основною задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \langle f_\xi, T_{-x}\check{\varphi}(\xi) \rangle \equiv \langle f_\xi, \varphi(x - \xi) \rangle$$

(індекс ξ у f_ξ означає, що функціонал f діє на φ як функцію аргументу ξ, $\check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi)$).

Із загальної теорії досконалих просторів з неперервними операціями зсуву та диференціювання випливає (див. [2]), що граничне співвідношення

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} \to \varphi'(x), \quad \Delta x \to 0,$$

для кожної основної функції φ виконується в сенсі збіжності в просторі $S_{l_k}^{m_n}$. Отже, $(f * \varphi)(x) = \langle f_\xi, \varphi(x - \xi) \rangle$ є не лише неперервною, але й нескінченно диференційовною функцією [2].

3. Оператори узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва у просторах типу S

Важливий клас операторів узагальненого диференціювання утворюють оператори Гельфонда-Леонтьєва, введені в середині 20 сторіччя при вивченні розкладів цілих функцій в узагальнені ряди Фур'є. Властивості таких операторів досліджували і продовжують досліджувати у даний час багато математиків у просторі A_R, $0 < R \leq \infty$. Нагадаємо, що символом A_R позначається лінійний простір всіх однозначних і аналітичних у крузі $K_R = \{z : |z| < R\}$ функцій. З курсу теорії функцій комплексної змінної відомо, що будь-яку функцію $F(z)$ з A_R можна єдиним способом розвинути в степеневий ряд

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \tag{4}$$

який збігається рівномірно на кожній компактній підмножині точок круга K_R; при цьому коефіцієнти a_k задовольняють умову

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq \frac{1}{R}. \tag{5}$$

Навпаки, якщо послідовність комплексних чисел $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняє умову (5) і R_1 – радіус збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, то, як випливає з відомої формули Коші-Адамара, $R_1 \geq R$. Отже, формула (4) визначає функцію з простору A_R. Таким чином, простір A_R складається з тих й лише тих функцій $F(z)$, які зображаються у вигляді (4), а відповідні їм послідовності $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняють умову (5).

Топологія цього простору задається системою норм $\{\| \cdot \|_r, 0 < r < R\}$, де $\|F\|_r = \max\limits_{|z|\leq r} |F(z)|$, а послідовність $\{g_m(z), m \geq 1\}$ функцій з A_R збігається до функції $g(z) \in A_R$ тоді й лише тоді, коли

$$\forall r < R: \lim_{m\to\infty} \|g_m - g\|_r = 0. \tag{6}$$

Оскільки умова (6) рівносильна, очевидно, тому, що послідовність функцій $\{g_m(z), m \geq 1\}$ збігається до $g(z)$ на кожній компактній підмножині круга K_R рівномірно, то так введену в A_R топологію називають ще топологією компактної збіжності. Простір A_R із введеною топологією не є нормованим, але в той же час A_R – метризовний повний локально опуклий простір, тобто простір Фреше [7].

Оператором Гельфонда-Лонтьєва називається оператор, побудований за допомогою послідовності $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, для якої

$$\lim_{k\to\infty}(k^{1/\rho}|a_k|^{1/k}) = (\sigma e\rho)^{1/\rho}, \quad 0<\sigma,\rho<+\infty, \tag{7}$$

тобто a_k, $k\in\mathbb{Z}_+$, – коефіцієнти Тейлора деякої спеціальної цілої функції F порядку ρ і типу σ. Такий оператор позначається символом $D^n(F,\cdot)$, $n\in\mathbb{N}$, і визначається так. Нехай $\varphi(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ – довільна функція з простору A_R $(0<R\le\infty)$; тоді, за означенням [1],

$$D^n(F,\varphi)(z) := \sum_{k=n}^{\infty} b_k \frac{a_{k-n}}{a_k} z^{k-n}. \tag{8}$$

Внаслідок умови (7) існує границя $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k-n]{\left|\frac{a_{k-n}}{a_k}\right|}=1$, тому ряд (8) збігається в крузі $|z|<R$, тобто функція $D^n(F,\varphi)$ регулярна в тому ж крузі, що і функція φ. Відзначимо відомі властивості оператора $D^n(F,\varphi)\equiv D^n\varphi$ [1]:

1) $D^n(\varphi_1+\varphi_2)=D^n\varphi_1+D^n\varphi_2$;

2) якщо c – стала, то $D^n(c\varphi)=cD^n\varphi$;

3) $D^m(D^n\varphi)=D^{m+n}\varphi$;

4) якщо $F(z)=e^z$, то $D^n\varphi=D^n(e^z,\varphi)=\frac{d^n}{dz^n}\varphi$.

Ці властивості показують, що $D^n(F,\varphi)$ справді можна розуміти як узагальнену похідну порядку n від функції φ, яка породжена функцією $F(z)$ (замість функції e^z). Якщо $n=1$, то $D^1(F,\cdot)$ – оператор узагальненого диференціювання, який діє в просторі A_R і будується за послідовністю $\alpha=\{a_k,k\in\mathbb{Z}_+\}$ так: на елементах степеневого базису $\{z^k,k\in\mathbb{Z}_+\}$

$$D_\alpha 1 = 0, D_\alpha z^k = \frac{a_{k-1}}{a_k}z^{k-1}, \quad k\ge 1.$$

Оператор D звичайного диференціювання в A_R є частковим випадком D_α при $a_k=\frac{1}{k!}$, $k\in\mathbb{Z}_+$.

Дослідимо властивості оператора узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва у просторах типу S. Надалі вважатимемо, що послідовність $\{a_k,k\in\mathbb{Z}_+\}$ коефіцієнтів Тейлора функції F, за якою будуються оператори $D^n(F,\cdot)$, замість умови $\lim\limits_{k\to+\infty}\sqrt[k-n]{\left|\frac{a_{k-n}}{a_k}\right|}=1$ задовольняє умову:

$$\exists\alpha>0\ \exists L>1\ \forall k\ge n:$$

$$\left|\frac{a_k}{a_{k+n}}\right|\le\alpha L^{k+n} \quad (n\in\mathbb{N}\ \ \text{– фіксоване}). \tag{9}$$

Оператори узагальненого диференціювання розглядатимемо в просторах $S_{m_k}^{m_n}$. Як випливає з теореми 1, функція φ є елементом простору $S_{m_k}^{m_n}$ тоді й лише тоді, коли виконується умова:

$$\exists a>0\ \exists b>0\ \exists c>0\ \forall z=x+iy\in\mathbb{C}:$$

$$|\varphi(z)|\le c\gamma(ax)\rho(by), \quad \gamma=1/\rho. \tag{10}$$

Правильним є наступне твердження.

Теорема 2. *Оператор узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва $D^m(F,\cdot)$ визначений коректно на $S_{m_k}^{m_n}$ для довільно фіксованого $m\in\mathbb{N}$ і неперервно відображає цей простір в себе.*

Доведення. Візьмемо довільну функцію $\varphi\in S_{m_k}^{m_n}$, яка допускає аналітичне продовження в комплексну площину, і нехай $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\tilde b_k z^k$ – її степеневий ряд. Покладемо, за означенням,

$$\psi_m(z)\equiv D^m(F,\varphi)(z) := \sum_{k=m}^{\infty}\tilde b_k\frac{a_{k-m}}{a_k}z^{k-m} =$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde b_{k+m}\frac{a_k}{a_{k+m}}z^k, z\in\mathbb{C}.$$

Доведемо, що $\psi_m(x)\in S_{m_k}^{m_n}$ при кожному $m\in\mathbb{N}$. Для цього згідно з теоремою 1 досить довести, що $\psi_m(z)\in S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$. Передусім зазначимо, що ψ_m також є цілою функцією. Справді, з умови (9) випливає, що

$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\left|\dfrac{a_k}{a_{k+m}}\right|} < \infty$. Отже, радіуси збіжності вказаних степеневих рядів збігаються:

$$\frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|\tilde{b}_k|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|\tilde{b}_{k+m}|\cdot\left|\frac{a_k}{a_{k+m}}\right|}} = \infty.$$

Функція φ ціла, тому візьмемо довільно фіксовану точку $z_0 = x_0 + iy_0$, $y_0 > 0$, і подамо φ у вигляді збіжного в $\mathbb{C}$ ряду: $\varphi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_0)^k$ або

$$\varphi(z + z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{11}$$

при цьому коефіцієнти b_k, $k \in \mathbb{Z}$, функції φ обчислюються за формулою Коші:

$$b_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+z}}d\xi, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

де Γ_R – коло радіуса R з центром у точці z_0. З урахуванням (10) та властивостей функцій γ, ρ знайдемо, що

$$|b_k| \le R^{-k}\max_{\xi\in\Gamma_R}|\varphi(\xi)| \le cR^{-k}\gamma(a\tilde{x}_0)\rho(b(y_0+R)),$$

де $\tilde{x}_0$ – точка максимуму функції $\gamma(ax)$, $\tilde{x}_0 \in [x_0 - R, x_0 + R]$.

При доведенні теореми 1 встановлено, що $\gamma(a\tilde{x}_0) \le \tilde{c}\gamma(ax_0)$, де $\tilde{c} = \max\{c, 1, c_{a,R}\}$. Крім того, оскільки функція ρ монотонно зростає на проміжку $[1, +\infty)$, то для $y_0 \ge b$ справджується нерівність $b(y_0 + R) \le (b + R)y_0$. Отже, $\rho(b(y_0 + R)) \le \rho((b + R)y_0)$, $y_0 \ge b$. Тоді для $y_0 > 0$ справджується нерівність

$$\rho(b(y_0 + R)) \le c_R\rho((b + R)y_0), \quad c_R > 1.$$

Таким чином,

$$|b_k| \le \tilde{c}R^{-k}\gamma(ax_0)\rho((b + R)y_0) =$$
$$= \tilde{c}\frac{((b + R)y_0)^k}{R^k}\inf_{\eta>0}\frac{\rho(\eta)}{\eta^k}\gamma(ax_0) \le$$
$$\le \tilde{c}\Big(1 + \frac{b}{R}\Big)^k y_0^k\rho_k\gamma(ax_0), \quad \tilde{c} = cc_R.$$

Аналогічно розглядається випадок $y_0 < 0$. Якщо $y_0 = 0$ (тобто $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$), то для коефіцієнтів b_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, справджуються нерівності:

$$|b_k| \le R^{-k}\max_{\xi\in\Gamma_R}|\varphi(\xi)| \le cR^{-k}\rho(bR)\gamma(ax_0) \le$$
$$\le c\inf_R\frac{\rho(R)}{R^k}\gamma(ax_0) = cb^k\inf_R\frac{\rho(bR)}{(bR)^k}\gamma(ax_0) =$$
$$= cb^k\inf_{\eta>0}\frac{\rho(\eta)}{\eta^k}\gamma(ax_0) = cb^k\rho_k\gamma(ax_0).$$

Отже, для коефіцієнтів Тейлора b_k, $k \in \mathbb{Z}$, функції φ правильні оцінки:

$$|b_k| \le \tilde{c}b^k|y_0|^k\rho_k\gamma(ax_0) =$$
$$= \tilde{c}\beta^k|y_0|^k\Big(\frac{1}{\nu_k}\Big)^k\rho(\nu_k)\gamma(ax_0),$$
$$x_0 \ne 0, y_0 \ne 0,$$

де $\beta = 1 + \dfrac{b}{R}$ (якщо покласти $R = b$, то $\beta = 2$), $\rho_k = \nu_k^{-k}\rho(\nu_k)$, ν_k – розв'язок рівняння $\xi\mu(\xi) = k$, $k \in \mathbb{N}$, $\mu(\xi) = \rho'(\xi)/\rho(\xi)$; за умови $\mu(2) > 1$ маємо $\nu_k < k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Оцінимо $\rho(\nu_k)$. Оскільки $\rho(\nu_k) = \exp\Big(\int\limits_0^{\nu_k}\mu(\xi)d\xi\Big)$, то, внаслідок теореми про середнє значення,

$$\forall k \ge 1\ \exists y_k \in (0, \nu_k): \ \ \rho(\nu_k) = \exp(\nu_k\mu(y_k)).$$

Функція μ зростаюча і неперервна на $[0, \infty)$, тому $\rho(\nu_k) < \exp(\nu_k\mu(\nu_k)) = e^{k+1}$. Отже,

$$|b_k| \le \tilde{c}_1(\beta e)^k|y_0|^k\Big(\frac{1}{\nu_k}\Big)^k\gamma(ax_0), k \in \mathbb{Z}_+. \tag{12}$$

У співвідношенні (11) покладемо $z = z_0$; в результаті дістанемо, що $\varphi(2z_0) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z_0^k$. Оскільки $z_0 \in \mathbb{C}$ – довільне, то маємо розклад $\varphi(2z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$. З іншого боку, $\varphi(2z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k\tilde{b}_k z^k$. Отже, $\tilde{b}_k = 2^{-k}b_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Далі здійснимо поточкову оцінку $\psi_m(z)$ при довільно фіксованому $m \in \mathbb{N}$. Урахувавши умову (9), яку задовольняє послідовність $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, а також (12), прийдемо до нерівності

$$|\psi_m(z)| \le \tilde{c}_1 \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{\beta e L}{2}\Big)^{k+m} \Big(\frac{1}{\nu_{k+m}}\Big)^{k+m} \times$$
$$\times |y|^{k+m} |z|^k \gamma(ax), \quad z = x + iy \in C. \tag{13}$$

Оскільки $\nu_{k+m} \ge \nu_k$, $\nu_{k+m} \ge \nu_m$, то

$$\Big(\frac{1}{\nu_{k+m}}\Big)^{k+m} \le \Big(\frac{1}{\nu_k}\Big)^k \Big(\frac{1}{\nu_m}\Big)^m.$$

Припустимо, що $|x| \ge \Delta_1$, $|y| \ge \Delta_2$, де $\Delta_! > 1$, $\Delta_2 > 1$ такі, що $\dfrac{1}{\Delta_1} + \dfrac{1}{\Delta_2} \le 1$. Тоді

$$\frac{1}{|x|^k} + \frac{1}{|y|^k} \le \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} \le \frac{1}{\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_2} \le 1, k \in \mathbb{N},$$

тобто $|x|^k + |y|^k \le |x|^k |y|^k$. Врахувавши останню нерівність, знайдемо, що

$$|y|^{k+m} |z|^k \le (\sqrt{2})^k |y|^{k+m} (|x|^k + |y|^k) \le$$
$$\le (\sqrt{2})^k |y|^{k+m} |x|^k |y|^k =$$
$$= (\sqrt{2})^k |x|^k |y|^{2k+m} \le (\sqrt{2})^k |x|^k |y|^{2(k+m)}.$$

Крім того,

$$m_{2(k+m)} = (2(k+m))! \rho_{2(k+m)} \le$$
$$\le 2^{k+m} (k+m)! \rho^2_{k+m} = 2^{k+m} (k+m)! \times$$
$$\times \Big(\frac{1}{\nu^2_{k+m}}\Big)^{k+m} \rho^2(\nu_{k+m}) \le 2^{k+m} e^{2(k+m)} (k+m)! \times$$
$$\times \Big(\frac{1}{\nu^2_{k+m}}\Big)^{k+m} = (2e^2)^{k+m} (k+m)^{k+m} \times$$
$$\times \sqrt{2\pi(k+m)} e^{-(k+m)} e^{\theta/12(k+m)} \Big(\frac{1}{\nu^2_{k+m}}\Big)^{k+m} \le$$
$$\le \sqrt{2\pi} e (4e)^{k+m} \Big(\frac{k+m}{\nu^2_{k+m}}\Big)^{k+m}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Нехай послідовність $\{p/\nu^2_p, p \in \mathbb{N}\}$ монотонно прямує до нуля при $p \to \infty$, тоді

$$\Big(\frac{k+m}{\nu^2_{k+m}}\Big)^{k+m} \le \Big(\frac{k+1}{\nu^2_{k+1}}\Big)^{k+1} \le$$
$$\le \frac{k+1}{\nu^2_k} \Big(\frac{k+1}{\nu^2_{k+1}}\Big)^k \le \frac{2^k}{\nu^2_k} \frac{\sum\limits_{l=0}^{k} C^l_k k^l}{\nu^{2k}_k} \le$$
$$\le \frac{2^k}{\nu^2_k} \frac{2^k \cdot k^k}{\nu^{2k}_k} \le \frac{4^k}{\nu^2_1} \Big(\frac{k}{\nu^2_k}\Big)^k, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

$$|y|^{2(k+m)} = \frac{|y|^{2(k+m)}}{m_2(k+m)} \cdot m_{2(k+m)}. \tag{15}$$

Врахувавши (13), (14), (15), прийдемо до ланцюжка нерівностей:

$$|\psi_m(z)| \le \tilde{c}_1 (2\beta e^2 L)^m \Big(\frac{1}{\nu_m}\Big)^m \sum_{k=0}^{\infty} (2\sqrt{2}\beta e^2 L)^k \times$$
$$\times \Big(\frac{1}{\nu_k}\Big)^{3k} k^k |x|^k \frac{|y|^{2(k+m)}}{m_{2(k+m)}} \gamma(ax) \le \omega_0 \tilde{c}_1 (2\beta e^2 L)^m \times$$
$$\times \Big(\frac{1}{\nu_m}\Big)^m \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{\nu_k}\Big)^{3k} k^k \times$$
$$\times \Big(\sup \frac{(B|y|)^{2(k+m)}}{m_{2(k+m)}}\Big) |x|^k \gamma(ax) =$$
$$= \omega_n B_1^m \Big(\frac{1}{\nu_m}\Big)^m \rho(By) \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{\nu_k}\Big)^{3k} k^k |x|^k \gamma(ax),$$

де $B = \sqrt{2\sqrt{2} L \beta e}$, $B_1 = 2\beta e^2 L$. Далі скористаємося співвідношеннями $\gamma = 1/\rho = e^{\ln \gamma} = e^{-\ln \rho}$. Із нерівності [5]

$$\rho(y_1)\rho(y_2) \le \rho(y_1 + y_2), \forall \{y_1, y_2\} \subset (0; \infty), \tag{16}$$

випливає, що функція $\ln \rho$ задовольняє наступну нерівність (нерівність опуклості):

$$\ln \rho(y_1) + \ln \rho(y_2) \le \ln \rho(y_1 + y_2),$$
$$\forall \{y_1, y_2\} \subset [0, \infty).$$

Тоді

$$\gamma(ax) = e^{-\ln \rho(ax)} \le e^{-\ln \rho\left(\frac{a}{2}x\right)} e^{-\ln \rho\left(\frac{a}{2}x\right)} =$$
$$= \gamma\Big(\frac{a}{2}x\Big) \gamma\Big(\frac{a}{2}x\Big), x \ge 0.$$

За допомогою методів диференціального числення знаходимо, що

$$\sup_{x \ge 0} x^k \gamma\Big(\frac{a}{2}x\Big) = \Big(\frac{2}{a}\Big)^k \sup_{x \ge 0} \Big(\frac{a}{2}x\Big)^k \gamma\Big(\frac{a}{2}x\Big) =$$
$$= \Big(\frac{2}{a}\Big)^k \sup_{y \ge 0} (y^k \gamma(y)) = \Big(\frac{2}{a}\Big)^k \nu_k^k \gamma(\nu_k) \le$$
$$\le \Big(\frac{2}{a}\Big)^k \nu_k^k, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \tag{17}$$

(тут $\gamma(\nu_k)\le 1$, $k\in\mathbb{Z}_+$). З (17) випливає нерівність

$$\Big(\frac{1}{\nu_k}\Big)^{3k}k^k|x|^k\gamma(ax)\le\Big(\frac{2}{a}\Big)^k\Big(\frac{1}{\nu_k}\Big)^{2k}k^k\gamma\Big(\frac{a}{2}x\Big).$$

Звідси, за допомогою ознаки Коші збіжності знакододатних рядів, робимо висновок про збіжність ряду

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{\nu_k}\Big)^{3k}k^k\sup_{x\ge 0}x^k\gamma\Big(\frac{a}{2}x\Big).$$

Отже, функція ψ_m задовольняє нерівність

$$|\psi_m(z)|\le\omega_2K(m)\gamma\Big(\frac{a}{2}x\Big)\rho(b_ny),\gamma=1/\rho,$$

$$z=x+iy,|x|\ge\Delta_1,|y|\ge\Delta_2,$$

де $b_1=B$, $K(m)=B_1^m\Big(\dfrac{1}{\nu_m}\Big)^m$, сталі ω_2, a, b_1, $B_1>0$ не залежать від $m\in\mathbb{N}$. Аналогічну нерівність ψ_m задовольняє і в точці $z=x+iy$, де $|x|\le\Delta_1$, $|y|\le\Delta_2$. Звідси вже випливає, що $\psi_m(z)$ є елементом простору $S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$, а, отже, $\psi_m(x)\in S_{m_k}^{m_n}$. Таким чином, оператор $D^m(F,\cdot)$ визначений коректно на $S_{m_k}^{m_n}$ і відображає цей простір в себе.

Аналогічно доводимо, що кожну обмежену множину з $S_{m_k}^{m_n}$ оператор $D^m(F,\cdot)$ відображає в обмежену множину цього ж простору. Теорема доведена.

Як приклад оператора $D^n(F,\cdot)$ розглянемо оператор, який будується за функцією

$$F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{Q(1)Q(2)\dots Q(k)},\qquad(18)$$

де $Q(x)$ – поліном: $Q(x)=a_px^p+\dots+a_1x$, причому $Q(k)\ne 0$, $k\in\{1,2,\dots\}$. При великих k коефіцієнт $a_k\sim\dfrac{1}{a_p^k(k!)^p}i$, як показано в [1, с. 75], F – ціла функція порядку $1/p$ і типу $\sigma=p/\sqrt[p]{|a_p|}$. Якщо $Q(x)=x$, то $F(x)=e^x$.

У випадку (18) маємо (див. [1, с. 75]), що

$$D^n(F,\varphi)=\sum_{k=n}^{np}\frac{\Delta_k^{(n)}}{k!}x^{k-n}\varphi^{(k)}(x),\qquad(19)$$

де коефіцієнти $\Delta_k^{(n)}$ знаходяться з розкладу

$$\psi_n(x)=Q(x)Q(x-1)\dots Q(x-n+1)=$$

$$=\sum_{k=n}^{np}\frac{\Delta_k^{(n)}}{k!}x(x-1)\dots(x-k+1),\qquad(20)$$

тобто мають вигляд

$$\Delta_k^{(n)}=\psi_n)(k)-C_k^1\psi_n(k-1)+C_k^2\psi_n(k-2)-\dots+$$

$$+(-1)^k\psi_n(0),\quad k\in\{0,1,\dots,np\}.$$

Зауважимо, що оскільки $\psi_n(0)=\psi_n(1)=\dots=\psi_n(n-1)=0$ (бо $Q(0)=0$), то $\Delta_0^{(n)}=\Delta_1^{(n)}=\dots=\Delta_{n-1}^{(n)}=0$.

Формула (20) має місце для довільної функції $\varphi\in S_{m_k}^{m_n}$. Справді, якщо $\varphi(x)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}b_mx^m$, то при $k\ge n$

$$x^{k-n}\varphi^{(k)}(x)=\sum_{m=k}^{\infty}m(m-1)\dots(m-k+1)b_mx^{m-n}=$$

$$=\sum_{m=n}^{\infty}m(m-1)\dots(m-k+1)b_mx^{m-n}.$$

Позначимо через A праву частину співвідношення (20); тоді

$$A=\sum_{k=n}^{np}\frac{\Delta_k^{(n)}}{k!}\Big(\sum_{m=n}^{\infty}m(m-1)\dots(m-k+1)b_mx^{m-n}\Big)=$$

$$=\sum_{m=n}^{\infty}b_m\Big(\sum_{k=n}^{np}\frac{\Delta_k^{(n)}}{k!}m(m-1)\dots(m-k+1)x^{m-n}\Big).$$

Згідно з (20) маємо, що $A=\sum\limits_{m=n}^{\infty}b_m\psi_n(m)x^{m-n}$. Але

$$\psi_n(m)=Q(m)Q(m-1)\dots Q(m-n+1)=\frac{a_{m-n}}{a_m},$$

тобто

$$A=\sum_{m=n}^{\infty}b_m\frac{a_{m-n}}{a_m}x^{m-n}=D^n(F,\varphi).$$

Зазначимо, що коефіцієнти

$$a_k=\frac{1}{Q)(1)Q(2)\dots Q(k)},\quad k\ge 1,$$

функції F задовольняють умову (9). Справді,

$$\frac{a_k}{a_{k+m}} = Q(k+1)Q(k+2)\dots Q(k+m),$$

причому

$$|Q(k)| \le k^p(|a_p|+|a_{p-1}|+\dots+|a_1|) = p\max_{1\le i\le p}|a_i|\cdot k^p =$$

$$= p\cdot a_0 k^p.$$

Тоді

$$|Q(k+1)| \le a_0 p(k+1)^p, |Q(k+2)| \le$$

$$\le a_0 p(k+2)^p, \dots, |Q(k+m)| \le a_0 p(k+m)^p.$$

Отже,

$$\left|\frac{a_k}{a_{k+m}}\right| = |Q(k+1)|\dots|Q(k+m)| \le$$

$$\le a_0^p p^m (k+m)^{pm}.$$

Вважаємо, що $k \ge m$. Тоді

$$\left|\frac{a_k}{a_{k+m}}\right| \le a_0^m p^m 2^{mp} k^{pm}.$$

Відомо, що $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\varepsilon} = 0$ ($\varepsilon > 0$ – довільно фіксоване). Звідси випливає, що знайдеться стала $c_0 > 0$ така, що для всіх $k \ge 1$ справджується нерівність $\ln k \le c_0 k^\varepsilon$ або $\ln k^{pm} \le c_0 k^{\varepsilon pm}$. Покладемо $\varepsilon = 1/(pm)$. Тоді $\ln k^{pm} \le c_0 k$. Отже,

$$k^{pm} = e^{\ln k^{pm}} \le e^{c_0 k} \le e^{c_0(k+m)} = L_0^{k+m},$$

де $L_0 = e^{c_0} > 1$. Таким чином,

$$\left|\frac{a_k}{a_{k+m}}\right| \le \gamma^m \cdot k^{pm} \le \gamma^{m+k} L_0^{m+k} = L^{m+k},$$

де $\gamma = \max\{1, a_0 p\cdot 2^p\}$, $L = \gamma L_0 > 1$, що й потрібно було довести.

У праці [8] наведено приклад послідовності $(\alpha_n)_{n=0}^\infty$, при якій оператор узагальненого диференціювання збігається з похідною Джексона: $D_\alpha = D_q$, якщо $\alpha_n = \dfrac{1}{[n]_q!}$, де $[n]_q = \dfrac{q^{n-1}}{q-1}$, $[n]_q! = [1]_q[2]_q\dots[n]_q$ при $n \ge 1$ і $\alpha_0 = 1$.

Правильним є також таке твердження.

Теорема 3. *При виконанні умови* $\dfrac{\rho'}{\rho} \le \dfrac{\tilde\gamma'}{\tilde\gamma}$, $\tilde\gamma = 1/\gamma$, *оператор узагальненого диференціювання* $D^n(F,\cdot)$ *визначений коректно на* $S_{l_k}^{m_n}$ *для довільно фіксованого* $n \in \mathbb{N}$ *і неперервно відображає цей простір в себе.*

4. Оператори узагальненого диференціювання нескінченного порядку

Нехай $g(z) = \sum\limits_{m=0}^\infty c_m z^m$, $z \in \mathbb{C}$, – деяка ціла функція. Говоритимемо, що в просторі $S_{m_k}^{m_n}$ задано оператор узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва нескінченного порядку $g(D(F,\cdot)) \equiv \sum\limits_{m=0}^\infty c_m D^m(F,\cdot)$, якщо для довільної основної функції $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$ ряд

$$g(D(F,\varphi))(x) := \sum_{m=0}^\infty c_m D^m(F,\varphi)(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

зображає деяку функцію з простору $S_{m_k}^{m_n}$ або, інакше, ряд $\sum\limits_{m=0}^\infty c_m D^m(F,\varphi)(z)$, $z \in \mathbb{C}$, зображає функцію з простору $S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$, яка є аналітичним продовженням функції $g(D(F,\varphi))(x)$ у комплексну площину $\mathbb{C}$.

Теорема 4. *Якщо ціла функція* g *задовольняє умову*

$$\exists a > 0\ \exists b > 0\ \exists c > 0\ \forall z = x+iy \in \mathbb{C}:$$

$$|g(z)| \le C\rho(ax)\rho(by), \tag{21}$$

то в просторі $S_{m_k}^{m_n}$ *визначений оператор* $A_g := g(D(F,\cdot)))$, *який неперервно відображає* $S_{m_k}^{m_n}$ *в* $S_{m_k}^{m_n}$.

Доведення. Нехай $\psi(x) := g(D(F,\varphi))(x)$, $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$. Оскільки

$$(\psi(x) \in S_{m_k}^{m_n}) \Leftrightarrow (\psi(z) \in S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})),$$

то доведемо, що $\psi(z) \in S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$. При доведенні теореми 2 встановлено, що $D^m(F,\varphi)(x)$ є елементом простору $S_{m_k,A}^{m_n,B} \subset S_{m_k}^{m_n}$ (для довільного $m \in \mathbb{N}$), де сталі A, $B > 0$ не залежать від m; при цьому справджується нерівність

$$|D^m(F,\varphi)(z)| \le c_0\beta_1^m\left(\frac{1}{\nu_m}\right)^m \gamma(a_1 x)\rho(b_1 y),$$

$$\gamma = 1/\rho, z = x + iy \in \mathbb{C}, \qquad (22)$$

де сталі c_0, $\beta_1 > 0$, a_1, $b_1 > 0$ не залежать від m. Коефіцієнти Тейлора c_m, $m \in \mathbb{Z}_+$, функції g обчислюються за формулою Коші

$$c_m = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{g(z)}{z^{m+1}}dz, \quad m \in \mathbb{Z}_+,$$

де Γ_R – коло радіуса R з центром у точці $z_0 = 0$. Нехай $\tilde{a} = \max\{a, b\}$. Звідси та (21) випливає, що

$$|c_m| \le c \inf_{R>0}(R^{-m}\rho^2(\tilde{a}R)) \le c \inf_{R>0}(R^{-m}\rho(2\tilde{a}R)) =$$

$$= c(2\tilde{a})^m \inf_{R>0}(R^{-m}\rho(R))$$

(тут ми скористалися нерівністю (16) для функції ρ, з якої випливає нерівність $\rho^2(\tilde{a}R) \le \rho(2\tilde{a}R)$). Міркуючи аналогічно тому, як це було зроблено при доведенні теореми 2, знаходимо, що

$$|c_m| \le c(2\tilde{a}e)^m\Big(\frac{1}{\nu_m}\Big)^m, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Урахувавши (22) знайдемо, що

$$|\psi(z)| \le c\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\frac{2\tilde{a}e\beta_1}{\nu_m^2}\Big)^m \gamma(a_1x)\rho(b_1y),$$

$$z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Оскільки $\nu_m \to +\infty$ при $m \to +\infty$, то згідно з ознакою Коші збіжності знакододатних числових рядів ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\Big(\frac{2\tilde{a}e\beta_1}{\nu_m^2}\Big)^m$ збіжний. Таким чином,

$$|\psi(z)| \le \tilde{c}\gamma(a_1x)\rho(b_1y), \quad \gamma = 1/\rho, z \in \mathbb{C}. \qquad (23)$$

З (23) та теореми 1 випливає, що $\psi(x)$ є елементом простору $S_{m_k}^{m_n}$. Із наведених міркувань випливає також, що оператор Ag відображає кожну обмежену множину простору $S_{m_k}^{m_n}$ в обмежену множину простору $S_{m_k}^{m_n}$, тобто оператор Ag неперервний.

Теорема доведена.

Наприклад, функція $g(z) = e^{\alpha z}$, $x \in \mathbb{C}$, де $\alpha > 0$ – фіксований параметр, задовольняє умову (21). Справді,

$$\forall z = x+iy \in \mathbb{C}: \ |e^{\alpha z}| = |e^{\alpha(x+iy)}| = e^{\alpha x} \le e^{\alpha|x|}.$$

Для довільної опуклої функції M при довільному $\varepsilon > 0$ правильною є нерівність

$$|x| \le M(\varepsilon x) + M(\varepsilon y) + d, d = d(\varepsilon) > 0.$$

Оскільки $\ln\rho$ – опукла на $[0, \infty)$ і парна на $\mathbb{R}$ функція, то для $\alpha \in (0, 1)$

$$|e^{\alpha z}| \le e^{|x|} \le ce^{\ln\rho(\varepsilon x)+\ln\rho(\varepsilon y)} = c\rho(\varepsilon x)\rho(\varepsilon y),$$

$$z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Якщо $\alpha \ge 1$, то для довільної опуклої на проміжку $[0, \infty)$ функції M справджується нерівність $\alpha M(x) \le M(\alpha x)$, $x \in [0, \infty)$. Отже,

$$|e^{\alpha z}| \le e^{\alpha|x|} \le ce^{\alpha\ln\rho(\varepsilon x)+\alpha\ln\rho(\varepsilon y)} \le$$

$$\le ce^{\ln\rho(\alpha\varepsilon x)+\ln\rho(\alpha\varepsilon y)} =$$

$$= c\rho(\alpha\varepsilon x)\rho(\alpha\varepsilon y), z = x + y \in \mathbb{C}.$$

Звідси вже випливає, що для $e^{\alpha z}$ справджується умова (21) (наприклад, при $\varepsilon = 1$), тобто в $S_{m_k}^{m_n}$ визначений і є неперервним оператор

$$e^{\alpha D(F,\cdot)} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^m D^m(F,\cdot)}{m!},$$

який відображає $S_{m_k}^{m_n}$ в себе.

Якщо $B := D^p(D, \cdot)$, де $p \ge 2$ фіксоване, то міркуючи аналогічно попередньому доводимо, що в просторі $S_{m_k}^{m_n}$ визначений і є неперервним оператор $e^{\alpha B} = \sum\limits_{m=0}^{\infty}\alpha^m B^m/m!$, який відображає цей простір в себе (тут враховано, що $(D^p(F, \cdot))^m = D^{m+p}(F, \cdot)$).

Нехай $P(z) = \sum\limits_{k=1}^{p_0}\alpha_k z^k$, $z \in \mathbb{C}$, $\alpha_0 = \max\limits_{1\le k\le p_0}|\alpha_k|$, $P(A) = \sum\limits_{k=1}^{p_0}\alpha_k D^k(F, \cdot) \equiv \sum\limits_{k=1}^{p_0}\alpha_k A^k$, $A^k := D^k(F, \cdot)$. Оскільки

$$|(A^k\varphi)(z)| \le c_0\Big(\frac{a_0}{\nu_k}\Big)^k\gamma(a_1x)\rho(b_1y),$$

$$\gamma = 1/\rho, z = x + iy \in \mathbb{C},$$

для довільної функції $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$, де сталі c_0, $a_0 > 0$ не залежать від k, то

$$|(A^j\varphi)(z)| \leq c_0\omega_0^k \gamma(a_1 x)\rho(b_1 y),$$

$$\omega_0 = \max\left\{1, \frac{a_0}{\nu_1}\right\}, \forall j : 1 \leq j \leq k.$$

Тоді

$$|P(A)\varphi(z)| \leq \tilde{c}_0\omega_0^{p_0}\gamma(a_1 x)\rho(b_1 y), z \in \mathbb{C}. \quad (24)$$

З (24) випливає, що для довільного фіксованого $n \in \mathbb{N}$ правильною є нерівність

$$|P^n(A)\varphi(z)| \leq \tilde{c}_0^n\omega_0^{p_0 n}\gamma(a_1 x)\rho(b_1 y), z \in \mathbb{C}. \quad (25)$$

Урахувавши (25), (21) та застосувавши методику доведення теореми 4 встановлюємо, що в просторі $S_{m_k}^{m_n}$ визначений оператор $e^{tP(A)}$ ($t > 0$ – фіксований параметр), тобто для довільної функції $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} P^n(A)\varphi(x) := e^{tP(A)}\varphi(x) \quad (26)$$

зображає функцію $\psi = e^{tP(A)}\varphi$, яка при кожному $t > 0$ є елементом простору $S_{m_k}^{m_n}$; при цьому оператор $e^{tP(A)}$: $S_{m_k}^{m_n} \to S_{m_k}^{m_n}$ є неперервним. Звідси та з (25) випливає, що елементом простору $S_{m_k}^{m_n}$ є також функція $P(A)e^{tA}\varphi$, $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$.

Нехай $S_{k,t,\varphi}$ позначає частинну суму ряду (26). Тоді $S_{k,t,\varphi} \to e^{tP(A)}\varphi$ при $k \to \infty$ за топологією простору $S_{m_k}^{m_n}$. Отже,

$$P(A)e^{tP(A)}\varphi = P(A) \lim_{k\to\infty} S_{k,t,\varphi} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} P(A)S_{k,t,\varphi} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{t^n}{n!} P^{n+1}(A)\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} P^{n+1}(A)\varphi. \quad (27)$$

5. Задача Коші

У просторі $S_{m_k}^{m_n}$ розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(A)u, \quad (t, x) \in [0, T]\times\mathbb{R} \equiv \Omega, T < \infty, \quad (28)$$

де $P(A) = \sum_{k=1}^{p_0} \alpha_k D^k(F, \cdot)$,

$$u(t, \cdot)|_{t=0} = \varphi_0, \quad \varphi_0 \in S_{m_k}^{m_n}. \quad (29)$$

Під розв'язком задачі (28), (29) розумітимемо функцію $u(t, x)$, диференційовну по t, яка при кожному $t \in [0, T]$ є елементом простору $S_{m_k}^{m_n}$, задовольняє рівняння (28) і початкову умову (29) в тому розумінні, що $u(t, \cdot) \to \varphi_0$ при $t \to +0$ за топологією простору $S_{m_k}^{m_n}$; при цьому u неперервно залежить від φ_0.

Теорема 5. *Задача Коші* (28), (29) *розв'язна в просторі $S_{m_k}^{m_n}$ (у вказаному розумінні); розв'язок цієї задачі дається формулою*

$$u(t, x) = e^{tP(A)}\varphi_0(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} P^n(A)\varphi_0(x).$$

Доведення. Введемо позначення $Q(t, A)\varphi_0 := e^{tP(A)}\varphi$,

$$\Phi_{t,\Delta t}(x) :=$$

$$= \frac{1}{\Delta t}[Q(t + \Delta t, A)\varphi_0(x) - Q(t, A)\varphi_0(x)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta t}\Big[\frac{(t + \Delta t)^n - t^n}{n!}\Big] P^n(A)\varphi_0(x).$$

Доведемо, що функція $[0, T] \ni t \to Q(t, A)\varphi_0 \in S_{m_k}^{m_n}$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $S_{m_k}^{m_n}$, диференційовна по t у кожній точці $t \in [0, T]$. Зафіксуємо довільно $t_0 \in [0, T]$ і доведемо, що існує елемент $\psi \in S_{m_k}^{m_n}$ такий, що $\Phi_{t_0,\Delta t} \to \psi$ при $\Delta t \to 0$ у просторі $S_{m_k}^{m_n}$, або, що $\Psi_{t_0,\Delta t} := \Phi_{t_0,\Delta t} - \psi \to 0$ при $\Delta t \to 0$ у просторі $S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$. Це означає, що сім'я функцій $\{\Psi_{t_0,\Delta t}(z)\}$ рівномірно (по z) збігається до нуля при $\Delta t \to 0$ в будь-якій обмеженій області $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ і при цьому справджується оцінка

$$|\Psi_{t_0,\Delta t}(z)| \leq \tilde{c}\gamma(\tilde{a}x)\rho(\tilde{b}y), \gamma = 1\rho, z = x+iy \in \mathbb{C}, \quad (30)$$

зі сталими $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c} > 0$, не залежними від Δt.

Доведемо, що

$$\psi = P(A)e^{t_0 A}\varphi_0 \equiv Q(t_0, A)\varphi_0 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} P^{n+1}(A)\varphi_0.$$

Користуючись теоремою Лагранжа про скінченні прирости знайдемо, що

$$\Psi_{t_0,\Delta t}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(t_0+\theta\Delta t)^{n-1}}{(n-1)!}P^n(A)\varphi_0(z)-$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t_0^n}{n!}P^{n+1}(A)\varphi_0(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t_0+\theta\Delta t)^n}{n!}\times$$

$$\times P^{n+1}(A)\varphi_0(z)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t_0^n}{n!}P^{n+1}(A)\varphi_0(z)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t_0+\theta\Delta t)^n-t_0^n}{n!}P^{n+1}(A)\varphi_0(z),\quad (31)$$

$$0<\theta<1.$$

Звідси та з (27) випливає, що $\Psi_{t_0,\Delta t}\in S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$ при кожному Δt. Якщо вважати, що $t_0+\Delta t\le T$, то внаслідок доведеного раніше стверджуємо, що нерівність (30) виконується зі сталими

$$\tilde{c}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{L}^n}{n!}\equiv 2e^{\tilde{L}},\tilde{L}=\tilde{c}_0\omega_0^{p_0}T,\tilde{a}=a_1,\tilde{b}=b_1.$$

Якщо $z\in\mathbb{K}\subset\mathbb{C}$, де $\mathbb{K}$ – обмежена область в $\mathbb{C}$, то внаслідок (25) правильними є нерівності $|P^n(A)\varphi_0(z)|\le c\tilde{c}_0\omega_0^{p_0n}$, $n\in\mathbb{Z}_+$, де $c=c(\mathbb{K})>0$. Крім того, для досить малих значень $|\Delta t|$

$$(t_0+\theta\Delta t)^n-t_0^n=\sum_{k=1}^{n}C_n^k(\theta\Delta t)^kt_0^{n-k}\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}C_n^k|\Delta t|^kT^{n-k}\le\tilde{T}^n2^n|\Delta t|,$$

$$\tilde{T}=\max\{1,T\}.$$

Отже, $|\Psi_{t_0,\Delta t}(z)|\le C|\Delta t|$, $z\in\mathbb{K}$, де $C=c\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{M^n}{n!}\equiv ce^M$, $M=2\tilde{c}_0\omega_0^{p_0}\tilde{T}$. Звідси випливає, що $\Psi_{t_0,\Delta t}\to 0$ при $\Delta t\to 0$ рівномірно по $z\in\mathbb{K}\subset\mathbb{C}$.

Цим доведено, що

$$\frac{\partial}{\partial t}e^{tP(A)}\varphi_0(x)=P(A)e^{tP(A)}\varphi_0(x)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}P^{n+1}(A)\varphi_0(x),x\in\mathbb{R}.$$

Отже, функція $u(t,x)=e^{tP(A)}\varphi_0(x)$ є розв'язком рівняння (28).

Функція $e^{tP(A)}\varphi_0$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $S_{m_k}^{m_n}$, диференційовна по t, а, отже, і неперервна по t у кожній точці $t_0\in[0,T]$, тобто

$$e^{tP(A)}\varphi_0\to e^{t_0P(A)}\varphi_0,t\to t_0,$$

за топологією простору $S_{m_n}^{m_n}$. Зокрема, $e^{tP(A)}\varphi_0\to\varphi_0$ при $t\to+0$ у просторі $S_{m_k}^{m_n}$, що й потрібно було встановити.

Якщо $\{\varphi_n,n\ge 1\}\subset S_{m_k}^{m_n}$ і $\varphi_n\to\varphi_0$ при $n\to\infty$ у просторі $S_{m_k}^{m_n}$, то з властивості неперервності оператора $e^{tP(A)}$ у цьому просторі (при фіксованому $t>0$) випливає співвідношення

$$u_n=e^{tP(A)}\varphi_n\to e^{tP(A)}\varphi_0=u,n\to\infty,$$

що й означає неперервну залежність u від φ_0.

Теорема доведена.

Зауваження 1. *Аналогічний результат має місце у випадку, коли в рівнянні* (28) $(t,x)\in[t_0,T]\times\mathbb{R}$, *де* $t_0\ge 0$, *а початкова умова має вигляд* $u(t,\cdot)|_{t=t_0}=\varphi_0\in S_{m_k}^{m_n}$. *Розв'язок такої задачі Коші дається формулою*

$$u(t,x)=e^{(t-t_0)P(A)}\varphi_0(x),\quad (t,x)\in[t_0,T]\times\mathbb{R}.$$

6. Нелокальна двоточкова за часом задача для еволюційного рівняння з оператором узагальненого диференціювання

Символом A позначимо оператор узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва $D^p(F,\cdot)$, $p\ge 1$ – фіксоване. Для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Au,\quad (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}\equiv\Omega,\quad (32)$$

розглянемо нелокальну двоточкову за часом задачу

$$\mu_1u(t,\cdot)|_{t=0}-\mu_2u(t,\cdot)|_{t=T}=\varphi,\varphi\in S_{m_k}^{m_n},\ (33)$$

де $T\in(0,\infty)$, $\{\mu_1,\mu_2\}\subset(0,\infty)$ – фіксовані числа, $\mu_1>\mu_2$.

Під розв'язком задачі (32), (33) розумітимемо функцію $u(t,x)$, диференційовну по t, яка при кожному $t \in [0,T]$ є елементом простору $S_{m_k}^{m_n}$, задовольняє рівняння (32) і умову (33) в тому розумінні, що $\mu_1 \lim\limits_{t\to+0} u(t,\cdot) - \mu_2 \lim\limits_{t\to T-0} u(t,\cdot) = \varphi$, де границі розглядаються в просторі $S_{m_k}^{m_n}$; при цьому u неперервно залежить від φ.

Теорема 6. *Двоточкова задача* (32), (33) *розв'язна в просторі* $S_{m_k}^{m_n}$*; розв'язок цієї задачі дається формулою*

$$u(t,x) = \mu_2^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-(n+1)} e^{(t+nT)A}\varphi(x) =$$

$$= \mu_2^{-1} e^{tA} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-(n+1)} e^{nTA}\varphi(x) \Big),$$

$$\mu = \mu_1/\mu_2 > 1.$$

Доведення. Передусім доведемо, що функція, яка формально зображається рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu^{-n} e^{nTA}\varphi := \psi$, є елементом простору $S_{m_k}^{m_n}$. Із результатів, отриманих у пункті 4 випливає, що $e^{nTA}\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$ при кожному фіксованому $n \in \mathbb{Z}_+$; при цьому справджуються нерівності

$$|e^{nTA}\varphi(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nT)^k}{k!} |(A^k\varphi)(z)| =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nT)^k}{k!} |D^{k+p}(F,\varphi)(z)| \leq$$

$$\leq c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nT)^k}{k!} \Big(\frac{\beta_1}{\nu_{k+p}}\Big)^{k+p} \gamma(a_1x)\rho(b_1y) \leq$$

$$\leq \tilde{c}_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nT)^k}{k!} \Big(\frac{\beta_1}{\nu_k}\Big)^{k} \gamma(a_1x)\rho(b_1y),$$

$$z = x + iy \in \mathbb{C},$$

де сталі a_1, b_1, $\beta_1 > 0$ не залежать від k, p, $\tilde{c}_0 = c_0 \Big(\dfrac{\beta_1}{\nu_p}\Big)^p$, послідовність $\{\nu_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ монотонно зростає:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nT)^k}{k!} \Big(\frac{\beta_1}{\nu_k}\Big)^{k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha)^k}{k!} = e^{n\alpha} =$$

$$= (e^{\alpha})^n, \alpha = \frac{\beta_1 T}{\nu_1}.$$

Таким чином,

$$|e^{nTA}\varphi(z)| \leq \tilde{c}_0 (e^{\alpha})^n \gamma(a_1x)\rho(b_1y).$$

Тоді

$$|\psi(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|e^{nTA}\varphi(z)|}{\mu^n} \leq$$

$$\leq \tilde{c}_0 \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{e^{\alpha}}{\mu}\Big)^n \gamma(a_1x)\rho(b_1y).$$

За умови $\mu > e^{\alpha}$ правильною є нерівність

$$|\psi(z)| \leq c_1 \gamma(a_1x)\rho(b_1y),$$

$$c_1 = \tilde{c}_0 \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{e^{\alpha}}{\mu}\Big)^n < \infty.$$

Звідси вже дістаємо, що $\psi(z) \in S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$. Отже, $\psi(x)$ є елементом простору $S_{m_k}^{m_n}$.

Із результатів, отриманих у пункті 5 випливає, що функція

$$u(t,x) = \mu_2^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-(n+1)} e^{(t+nT)A}\varphi(x) =$$

$$= \mu_2^{-1}\mu^{-1} e^{tA}\psi(x) = \mu_1^{-1} e^{tA}\psi(x)$$

задовольняє рівняння (32). Доведемо, що ця функція задовольняє також граничну умову (33) у вказаному розумінні.

При доведенні теореми 5 встановлено, що функція $[0,T] \ni t \to e^{tA}\psi$, $\psi \in S_{m_k}^{m_n}$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $S_{m_k}^{m_n}$ диференційовна, а, отже, і неперервна в кожній точці $t \in [0,T]$. Отже, граничні співвідношення $\lim\limits_{t\to+0} e^{tA}\psi = \psi$, $\lim\limits_{t\to T-0} e^{tA}\psi = e^{TA}\psi$ справджуються в просторі $S_{m_k}^{m_n}$. Тоді

$$\mu_1 \lim_{t\to+0} \mu_1^{-1} e^{tA}\psi - \mu_2 \lim_{t\to T-0} \mu_1^{-1} e^{tA}\psi = \psi - \frac{\mu_2}{\mu_1} e^{TA}\psi =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-n} e^{nTA}\varphi - \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-(n+1)} e^{(T+nT)A}\varphi =$$

$$= (\varphi + \mu^{-1}e^{TA}\varphi + \mu^{-2}e^{2TA}\varphi + \dots) -$$

$$-(\mu^{-1}e^{TA}\varphi + \mu^{-2}e^{2TA}\varphi + \dots) = \varphi.$$

Цим доведено, що функція $u(t,x) = \mu_1^{-1} e^{-tA}\psi(x)$ задовольняє умову (33) у вказаному розумінні.

Зауваження 2. *Урахувавши оцінку* (25) *можна довести, що твердження, аналогічне теоремі 6 має місце у випадку двоточкової задачі для еволюційного рівняння*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(A)u, \quad (t,x) \in \Omega, \tag{34}$$

де $P(\lambda)$ – *поліном, розглянутий в пункті 4. Двоточкова задача з граничною умовою вигляду* (33) *для рівняння* (34) *розв'язна в просторі* $S^{m_n}_{m_k}$. *Розв'язок такої задачі дається формулою*

$$u(t,x) = \mu_1^{-1} e^{tP(A)}\psi(x), \psi(x) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-n} e^{nTP(A)}\varphi(x), \{\varphi, \psi\} \subset S^{m_n}_{m_k}.$$

7. Оператор, спряжений з оператором узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва

Нехай $A^n := D^n(F, \cdot)$, $n \in \mathbb{N}$ – фіксоване. Символом $(A^n)^*$ позначимо оператор, спряжений з оператором узагальненого диференціювання A^n. Оскільки A^n: $S^{m_n}_{m_k} \to S^{m_n}_{m_k}$, то $(A^n)^*$: $(S^{m_n}_{m_k})' \to (S^{m_n}_{m_k})'$.

Кожній функції $\varphi \in S^{m_n}_{m_k}$ зіставимо у відповідність послідовність її коефіцієнтів Тейлора $b_\varphi = \{b_k(\varphi), k \in \mathbb{Z}_+\} \in C_0$, де C_0 – простір збіжних до нуля послідовностей. При цьому різним функціям з простору $S^{m_n}_{m_k}$ відповідають різні послідовності з C_0. Справді, якщо $\{\varphi_1, \varphi_2\} \subset S^{m_n}_{m_k}$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$, то існує $k \in \mathbb{Z}_+$ таке, що $b_k(\varphi_1) \neq b_k(\varphi_2)$, бо інакше, для кожного $k \in \mathbb{Z}_+$ матимемо, що $\varphi_1^{(k)}(0) = \varphi_2^{(k)}(0)$, тобто

$$\varphi_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_1^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_2^{(k)}(0)}{k!} x^k =$$

$$= \varphi_2(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Отже, відображення

$$B: \ S^{m_n}_{m_k} \ni \varphi \to b_\varphi = \{b_k(\varphi), k \in \mathbb{Z}_+\} \in C_0$$

є ін'єкцією. Відображення B як оператор є, очевидно, лінійним, який має обернений, бо $\operatorname{Ker} B = \{0\}$.

Відображення B зіставляє функції $\psi_n := D^n(F, \varphi) \equiv A^n\varphi \in S^{m_n}_{m_k}$ послідовність

$$b_{\psi_n} = \left\{ b_n \frac{a_0}{a_n}, b_{n+1}\frac{a_1}{a_{n+1}}, b_{n+2}\frac{a_2}{a_{n+2}}, \dots \right\} \in C_0.$$

Розглянемо оператор $\tilde{A}^n$: $C_0 \to C_0$, який кожній послідовності $b_\varphi = B\varphi \in C_0$, $\varphi \in S^{m_n}_{m_k}$, ставить у відповідність послідовність $B\psi_n$, тобто $\tilde{A}^n B\varphi = b_{\psi_n} = BA^n\varphi$, $\varphi \in S^{m_n}_{m_k}$. Із останнього співвідношення випливає, що

$$(\tilde{A}^n B)^* = (BA^n)^*, \quad (A^n)^* B^* = B^* (\tilde{A}^n)^*.$$

Отже, оператор, спряжений до оператора A^n можна подати у вигляді: $(A^n)^* = B^*(\tilde{A}^n)^*(B^*)^{-1}$, при цьому

$$(\tilde{A}^n)^* : C_0' \to C_0', B^* : C_0' \to (S^{m_n}_{m_k})',$$

$$(B^*)^{-1} : (S^{m_n}_{m_k})' \to C_0',$$

$$(\tilde{A}^n)^*(B^*)^{-1} : (S^{m_n}_{m_k})' \to C_0'.$$

Візьмемо довільний функціонал $g \in C_0'$. Відомо, що $C_0' \cong l_1$, де l_1 – простір абсолютно сумовних послідовностей $g = \{g_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$. Дія функціоналу $g \in C_0' \cong l_1$ на елемент $b_\varphi = \{b_k(\varphi), k \in \mathbb{Z}_+\} \in C_0$ подається за допомогою формули

$$\langle g, b_\varphi \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\varphi)\overline{g}_k.$$

Отже, для довільного $g \in C_0'$ маємо, що

$$\langle g, BA^n\varphi \rangle = \langle g, \tilde{A}^n B\varphi \rangle = \langle (\tilde{A}^n)^* g, B\varphi \rangle =$$

$$= \langle (\tilde{A}^n)^* g, b_\varphi \rangle;$$

$$\langle g, \tilde{A}^n B\varphi \rangle = \langle g, \tilde{A}^n b_\varphi \rangle =$$

$$= \langle g, b_{\psi_n} \rangle = b_n \frac{a_0}{a_n}\overline{g}_0 + b_{n+1}\frac{a_1}{a_{n+1}}\overline{g}_1 +$$

$$+ b_{n+2}\frac{a_2}{a_{n+2}}\overline{g}_2 + \dots = b_n \overline{\frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_n} g_0} + b_{n+1}\overline{\frac{\overline{a}_1}{\overline{a}_{n+1}} g_1} + \dots \tag{35}$$

Нехай

$$(\tilde{A}^n)^* g := g^* = \{g_0^*, g_1^*, \dots\} \in C_0' \cong l_1;$$

з (35) випливає, що

$$\langle (\tilde{A}^n)^* g, b_\varphi \rangle = b_0\overline{g_0^*} + \dots + b_{n-1}\overline{g_{n-1}^*} + b_n\overline{g_n^*} +$$

$$+b_{n+1}\overline{g_{n+1}^*}+\dots = b_n\overline{\frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_n}g_0}+b_{n+1}\overline{\frac{\overline{a}_1}{\overline{a_{n+1}}}g_1}+\dots$$

Отже,

$$g^*=\Big\{0,\dots,0,\frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_n}g_0,\frac{\overline{a}_1}{\overline{a_{n+1}}}g_1,\dots\Big\}. \qquad (36)$$

У просторі $(S_{m_k}^{m_n})'$ розглянемо рівняння

$$\frac{du(t)}{dt}=(A^n)^*u(t), \quad t\in[0,T],T<\infty, \quad (37)$$

під розв'язком якого розумітимемо абстрактну функцію параметра t із значеннями в просторі $(S_{m_k}^{m_n})'$, яка задовольняє це рівняння.

Якщо для рівняння (37) задано умову

$$\mu_1 u|_{t=0}-\mu_2 u|_{t=T}=\psi, \quad \psi\in(S_{m_k}^{m_n})', \quad (38)$$

(μ_1, $\mu_2>0$, $\mu_1\neq\mu_2$ – фіксовані параметри), то під розв'язком двоточкової задачі (37), (38) розумітимемо розв'язок рівняння (37), який задовольняє умову (38) в слабкому розумінні, тобто $\mu_1\lim\limits_{t\to+0}\langle u(t),\varphi\rangle-\mu_2\lim\limits_{t\to T-0}\langle u(t),\varphi\rangle=\langle\psi,\varphi\rangle$ для довільної функції $\varphi\in S_{m_k}^{m_n}$.

Оскільки $(A^n)^*=B^*(\tilde{A}^n)^*(B^*)^{-1}$, то рівняння (37) має вигляд

$$\frac{du(t)}{dt}=B^*(\tilde{A}^n)^*(B^*)^{-1}u(t) \qquad (39)$$

Під дією відображення $(B^*)^{-1}$ рівняння (39) перейде в рівняння

$$(B^*)^{-1}\frac{du(t)}{dt}=(\tilde{A}^n)^*(B^*)^{-1}u(t), \qquad (40)$$

при цьому

$$\mu_1(B^*)^{-1}u|_{t=0}-\mu_2(B^*)^{-1}u|_{t=T}=(B^*)^{-1}\psi\in C_0'. \quad (41)$$

Введемо позначення: $(B^*)^{-1}u(t):=g(t)\in C_0'$. Оскільки $C_0'\cong l_1$, то $g(t)=\{g_0(t),g_1(t),\dots\}$. Скориставшись формулою (35) знайдемо, що

$$(\tilde{A}^n)^*(B^*)^{-1}u(t)=(\tilde{A}^n)^*g(t):=g^*(t)=$$
$$=\Big\{\underbrace{0,\dots,0}_{n-1},\frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_n}g_0(t),\frac{\overline{a}_n}{\overline{a_{n+1}}}g_1(t),\dots\Big\}. \quad (42)$$

$g(t)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі C_0', диференційовна по t. Справді,

$$\frac{dg(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}=$$
$$=\lim_{\Delta t\to0}(B^*)^{-1}\Big[\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t}\Big]=$$
$$=(B^*)^{-1}\Big[\lim_{\Delta t\to0}\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t}\Big]=(B^*)^{-1}\frac{du}{dt}$$

(тут ми скористалися тим, що $\dfrac{\Delta u}{\Delta t}\to\dfrac{du}{dt}$ при $\Delta t\to0$ в просторі $(S_{m_k}^{m_n})'$ внаслідок диференційовності $u(t)$, $t\in[0,T]$, як абстрактної функції параметра t із значеннями в просторі $(S_{m_k}^{m_n})'$). Отже,

$$(B^*)^{-1}\frac{du(t)}{dt}=\frac{d}{dt}((B^*)^{-1}u(t))=$$
$$=\{g_0'(t),g_1'(t),\dots\},t\in[0,T]. \qquad (43)$$

Із співвідношень (42), (43) та рівняння (40) випливає, що

$$g_0'(t)=0,g_1'(t)=0,\dots,g_{n-1}'(t)=0, \quad t\in[0,T],$$

тобто

$$g_0(t)=c_0,g_1(t)=c_1,\dots,g_{n-1}(t)=c_{n-1},t\in[0,T],$$

де $c_i=\text{const}$, $i\in\{0,1,\dots,n-1\}$. Тоді

$$g_n'(t)=\frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_n}g_0(t)=\frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_n}c_0,$$
$$g_{n+1}'(t)=\frac{\overline{a}_n}{\overline{a_{n+1}}}g_1(t)=\frac{\overline{a}_1}{\overline{a_{n+1}}}c_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$g_{2n-1}'(t)=\frac{\overline{a_{n-1}}}{\overline{a_{2n-1}}}g_{n-1}(t)=\frac{\overline{a_{n-1}}}{\overline{a_{2n-1}}}c_{n-1}.$$

Звідси дістаємо, що

$$g_n(t)=\frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_n}c_0t+c_n,$$
$$g_{n+1}(t)=\frac{\overline{a}_1}{\overline{a_{n+1}}}c_1t+c_{n+1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$g_{2n-1}(t)=\frac{\overline{a_{n-1}}}{\overline{a_{2n-1}}}c_{n-1}t+c_{2n-1}.$$

Нехай $(B^*)^{-1}\psi = \{\psi_0, \psi_1, \dots\} \in C_0' \cong l_1$. Врахувавши умову (41), а також неперервність $g(t)$ як абстрактної функції параметра t із значеннями в просторі C_0' знайдемо, що

$$\mu_1 g(t)|_{t=0} - \mu_2 g(t)|_{t=T} =$$

$$= \mu_1 \lim_{t\to+0}\{g_0(t), g_1(t), \dots\} -$$

$$-\mu_2 \lim_{t\to T-0}\{g_0(t), g_1(t), \dots\} =$$

$$= \mu_1\{g_0(0), g_1(0), \dots\} -$$

$$-\mu_2\{g_0(T), g_1(T), \dots\}.$$

Отже,

$$\mu_1 g_i(0) - \mu_2 g_i(T) = \psi_i, i \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (44)$$

Якщо $l \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, то, внаслідок отриманих раніше співвідношень, (44) набуває вигляду $\mu_1 c_l - \mu_2 c_l = \psi_l$, тобто $c_l = \dfrac{\psi_l}{\mu_1 - \mu_2}$, $l \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Якщо $i \in \{n, n+1, \dots, 2n-1\}$, то

$$\mu_1 c_i - \mu_2\Big(\frac{\overline{a}_l}{\overline{a}_i} c_l T + c_i\Big) = \psi_i,$$

$l \in \{0, 1, \dots, n-1\}, i \in \{n, n+1, \dots, 2n-1\}$,

або

$$c_i(\mu_1 - \mu_2) = \frac{\overline{a}_l c_l}{\overline{a}_i}\mu_2 T + \psi_i, c_i =$$

$$= \frac{\psi_i}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{\overline{a}_l}{\overline{a}_i}\frac{\mu_2 T \psi_l}{(\mu_1 - \mu_2)^2}.$$

Наприклад,

$$c_n = \frac{\psi_n}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_n}\frac{\mu_2 T \psi_0}{(\mu_1 - \mu_2)^2},$$

$$c_{n+1} = \frac{\psi_{n+1}}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{\overline{a}_1}{\overline{a_{n+1}}}\frac{\mu_2 T \psi_1}{(\mu_1 - \mu_2)^2}, \dots$$

Отже,

$$g_n(t) = \frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_n}\frac{\psi_0}{\mu_1 - \mu_2} t + \frac{\psi_n}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_n}\frac{\mu_2 T \psi_0}{(\mu_1 - \mu_2)^2} =$$

$$= \frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_n}\frac{\psi_0}{\mu_1 - \mu_2}\Big[t + \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} T\Big] + \frac{\psi_n}{\mu_1 - \mu_2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$g_{2n-1}(t) = \frac{\overline{a_{n-1}}}{\overline{a_{2n-1}}}\frac{\psi_{n-1}}{\mu_1 - \mu_2}\Big[t + \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} T\Big] +$$

$$+ \frac{\psi_{2n-1}}{\mu_1 - \mu_2}.$$

Далі знаходимо, що

$$g_{2n}'(t) = \frac{\overline{a}_n}{\overline{a}_{2n}} g_n(t) = \frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_{2n}}\frac{\psi_0}{\mu_1 - \mu_2}\Big[t + \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} T\Big] +$$

$$+ \frac{\overline{a}_n}{\overline{a}_{2n}}\frac{\psi_n}{\mu_1 - \mu_2},$$

тобто

$$g_{2n}(t) = \frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_{2n}}\frac{\psi_0}{\mu_1 - \mu_2}\Big[\frac{t^2}{2} + \frac{\mu_2 T}{\mu_1 - \mu_2} t\Big] +$$

$$= \frac{\overline{a}_n}{\overline{a}_{2n}}\frac{\psi_n}{\mu_1 - \mu_2} t + c_{2n}.$$

З урахуванням (44) маємо співвідношення

$$\mu_1 g_{2n}(0) - \mu_2 g_{2n}(T) = \psi_{2n},$$

яке рівносильне співвідношенню

$$\mu_1 c_{2n} - \mu_2\Big[\frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_{2n}}\frac{\psi_0}{\mu_1 - \mu_2}\Big(\frac{T^2}{2} + \frac{\mu_2 T^2}{\mu_1 - \mu_2}\Big) +$$

$$+ \frac{\overline{a}_n}{\overline{a}_{2n}}\frac{\psi_n}{\mu_1 - \mu_2} T + c_{2n}\Big] = \psi_{2n},$$

з якого знаходимо c_{2n}, а, отже, і $g_{2n}(t)$. Продовжуючи цей процес, знайдемо всі координати $g_i(t)$, $i \in \mathbb{Z}_+$.

Отже, формально розв'язок двоточкової задачі (37), (38) подається у вигляді

$$u(t) = B^* g(t) \equiv B^*\{g_0(t), g_1(t), \dots\} \subset (S_{m_k}^{m_n})'.$$

Оскільки $u(t)$ задовольняє рівняння (37) в слабкому розумінні (в сенсі узагальнених функцій), то з'ясуємо, як діє функціонал $u(t)$ на довільну функцію $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$. Маємо, що

$$\langle u(t), \varphi\rangle = \langle B^* g(t), \varphi\rangle = \langle g(t), B\varphi\rangle,$$

$B\varphi = \{b_k(\varphi), k \in \mathbb{Z}_+\}$, де $b_k(\varphi)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, – коефіцієнти Тейлора функції φ, $g(t) \in C_0' \cong l_1$ при кожному $t \in [0, T]$. Отже, функціонал $g(t) \in C_0'$ діє на елемент $B\varphi \in C_0$ за правилом:

$$\langle u(t), \varphi\rangle = \langle g(t), B\varphi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \overline{g_k(t)} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\overline{g_k(t)},\quad t\in[0,T] \tag{45}$$

$g_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}_+$, обчислюються за відповідними формулами. Формула (45) задає функціонал $u(t)$ на $S_{m_k}^{m_n}$ при кожному $t\in[0,T]$; $u(t)$ задовольняє рівняння (37) і умову (38), оскільки

$$\mu_1\lim_{t\to+0}\langle u(t),\varphi\rangle-\mu_2\lim_{t\to T-0}\langle u(t),\varphi\rangle=$$

$$=\mu_1\lim_{t\to+0}\langle g(t),B\varphi\rangle-\mu_2\lim_{t\to T-0}\langle g(t),B\varphi\rangle=$$

$$=\mu_1\langle g(0),B\varphi\rangle-\mu_2\langle g(T),B\varphi\rangle=\mu_1\sum_{k=0}^{\infty}b_k\overline{g_k(0)}-$$

$$-\mu_2\sum_{k=0}^{\infty}b_k\overline{g_k(T)}=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(\mu_1\overline{g_k(0)}-\mu_2\overline{g_k(T)})=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\overline{\psi}_k=\langle\psi,\varphi\rangle.$$

Останні співвідношення випливають з того, що гранична умова (38) еквівалентна умові (41), $(B^*)^{-1}u(t)=g(t)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі C_0', неперервна по $t\in[0,T]$, тому $g(t)\to g(0)$ при $t\to+0$, $g(t)\to g(T)$ при $t\to T-0$ в C_0'.

Таким чином, доведено наступне твердження.

Теорема 7. *Двоточкова задача (37), (38) розв'язна в просторі $(S_{m_k}^{m_n})'$, при цьому*

$$\langle u(t),\varphi\rangle=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}g_k(t),t\in[0,T],\varphi\in S_{m_k}^{m_n},$$

$$g(t)=\{g_0(t),g_1(t),\dots,\}\in l_1\cong C_0'$$

при кожному $t\in[0,T]$.

Зауваження 3. *Якщо $u(t)$ при кожному $t\in[0,T]$ – регулярна узагальнена функція з простору $(S_{m_k}^{m_n})'$, то*

$$\langle u(t),\varphi\rangle=\int\limits_{\mathbb{R}}u(t)\varphi(t)dt,\quad\forall\varphi\in S_{m_k}^{m_n}.$$

Очевидно, що формула (45) є більш придатною для застосувань.

Зауваження 4. *Якщо $\mu_2=0$, $\mu_1=1$, то умова* (38) *вироджується в початкову умову для рівняння* (37). *Отже, в цьому випадку задача* (37), (38) *– задача Коші.*

Як приклад, розглянемо задачу (36), (37) з граничним елементом $\psi=\delta\in(S_{m_k}^{m_n})'$, де δ – дельта-функція Дірака. Оскільки $\langle\delta,\varphi\rangle=\varphi(0)$, то для довільної функції $\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k\in S_{m_k}^{m_n}$ маємо $\varphi(0)=b_0$. Звідси та з формули

$$\sum_{k=0}^{\infty}b_k\tilde{\psi}_k=\langle\delta,\varphi\rangle=\langle(B^*)^{-1}\delta,B\varphi\rangle=\varphi(0)=b_0$$

знаходимо елемент $(B^*)^{-1}\delta\in C_0'\cong l_1$: $(B^*)^{-1}\delta=\{1,0,0,\dots\}$. Урахувавши співвідношення, які визначають $g(t)=(B^*)^{-1}u(t)=\{g_0(t),g_1(t),\dots\}\in C_0'\cong l_1$, знайдемо, що

$$g(t)=\Bigg\{\underbrace{\frac{1}{\mu_1-\mu_2},0,\dots,0,}_{n-1}\frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_n(\mu_1-\mu_2)}\times$$

$$\times\Big(t+\frac{\mu_2T}{\mu_1-\mu_2}\Big),0,\dots,0,$$

$$\frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_{2n}}\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\Big(\frac{t^2}{2}+\frac{\mu_2Tt}{\mu_1-\mu_2}\Big)+\frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_{2n}}\frac{\mu_2T^2}{(\mu_1-\mu_2)^2}\times$$

$$\times\Big(\frac{1}{2}+\frac{\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\Big),0,\dots\Bigg\}.$$

Зауважимо, що у випадку задачі Коші ($\mu_1=1$, $\mu_2=0$)

$$g(t)=\Big\{1,0,\dots,0,\frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_n}t,0,\dots,0,\frac{\overline{a}_0}{2\overline{a}_{2n}}t^2,\dots\Big\}.$$

Тоді для довільної функції $\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k\in S_{m_k}^{m_n}$

$$\langle u(t),\varphi\rangle=\frac{b_0}{\mu_1-\mu_2}+\frac{\overline{a}_0b_n}{\overline{a}_n(\mu_1-\mu_2)}\Big(t+\frac{\mu_2T}{\mu_1-\mu_2}\Big)+\dots$$

Для того, щоб безпосередньо перевірити, що $u(t)$ є розв'язком рівняння (36), переконаємося у тому, що $u(t)$ задовольняє співвідношення $(B^*)^{-1}\frac{du}{dt}=(\tilde{A}^n)^*(B^*)^{-1}u(t)$ при кожному $t \in [0,T]$. Оскільки

$$(B^*)^{-1}\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}((B^*)^{-1}u(t)) = g'(t) = \\ = \{g_0'(t), g_1'(t), \dots\} \in l_1,$$

то

$$g'(t) = \Big\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, \frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_n(\mu_1-\mu_2)}, 0, \dots, 0, \\ \frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_{2n}(\mu_1-\mu_2)}\Big(t + \frac{\mu_2 T}{\mu_1-\mu_2}\Big), 0, \dots \Big\}.$$

З іншого боку,

$$(\tilde{A}^n)^*(B^*)^{-1}u(t) = (\tilde{A}^n)^* g(t) \equiv g^*(t) = \\ = \Big\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, \frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_n} g_0(t), \frac{\overline{a}_1}{\overline{a}_{n+1}} g_1(t), \dots \Big\} \in l_1.$$

З'ясуємо, чи справджується рівність $g'(t) = g^*(t)$, $t \in [0,T]$. Очевидно, що перші $n-1$ координат вказаних елементів співпадають. Оскільки $g_0(t) = (\mu_1-\mu_2)^{-1}$, то

$$g_n^*(t) = \frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_n} g_0(t) = \frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_n}\frac{1}{\mu_1-\mu_2} = g_n'(t), t \in [0,T],$$

$$g_{n+1}^*(t) = \frac{\overline{a}_1}{\overline{a}_{n+1}} g_1(t) = 0 = g_{n+1}'(t), t \in [0,1],$$

бо $g_{n+1}(t) = 0$ і т.д. Наприклад,

$$g_{2n}'(t) = \frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_n}\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\Big(1 + \frac{\mu_2 T}{\mu_1-\mu_2}\Big),$$

$$g_{2n}^*(t) = \frac{\overline{a}_n}{\overline{a}_{2n}} g_n(t) = \frac{\overline{a}_n}{\overline{a}_{2n}}\frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_n}\frac{1}{\mu_1-\mu_2} \times \\ \times \Big(t + \frac{\mu_2 T}{\mu_1-\mu_2}\Big) = g_{2n}'(t).$$

Продовжуючи цей процес, знайдемо, що $g_n'(t) = g_n^*(t)$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, тобто $g'(t) = g^*(t)$ у кожній точці $t \in [0,T]$, що й потрібно довести. Абстрактна функція $u(t)$ задовольняє також умову (37). Для перевірки цього досить встановити, що координати елемента $g(t) = (B^*)^{-1}u(t)$, $t \in [0,T]$, задовольняють співвідношення (44). При $i = 0$ маємо:

$$\mu_1 g_0(0) - \mu_2 g_0(T) = \frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2} - \frac{\mu_2}{\mu_1-\mu_2} = 1 = \psi_0,$$

$$\mu_1 g_i(0) - \mu_2 g_i(T) = 0 = \psi_i, 2 \le i \le n-1.$$

Візьмемо n-ту координату $g(t)$:

$$\mu_1 g_n(0) - \mu_2 g_n(T) = \mu_1 \frac{\overline{a}_0 \mu_2 T}{\overline{a}_n(\mu_1-\mu_2)^2} - \\ -\mu_2 \frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_n(\mu_1-\mu_2)}\Big(T + \frac{\mu_2 T}{\mu_1-\mu_2}\Big) = \\ = \frac{\overline{a}_0\mu_1\mu_2 T}{\overline{a}_n(\mu_1-\mu_2)^2} - \frac{\overline{a}_0\mu_2^2 T}{\overline{a}_n(\mu_1-\mu_2)^2} - \frac{\overline{a}_0\mu_2 T}{\overline{a}_n(\mu_1-\mu_2)} = \\ = \frac{\overline{a}_0\mu_2 T(\mu_1-\mu_2)}{\overline{a}_n(\mu_1-\mu_2)^2} - \frac{\overline{a}_0\mu_2 T}{\overline{a}_n(\mu_1-\mu_2)} = 0 = \psi_n$$

і т.д. Звідси випливає співвідношення $\mu_1 \lim\limits_{t\to+0} u(t) - \mu_2 \lim\limits_{t\to T-0} u(t) = \psi$, яке справджується в просторі $(S_{m_k}^{m_n})'$. У випадку задачі Коші $\lim\limits_{t\to+0} u(t) = \delta$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Леонтьев А.Ф.* Обобщения рядов экспонент / А.Ф. Леонтьев. – М.: Наука, 1981. – 320 с.
2. *Гельфанд И.М.* Пространства основных и обобщенных функций / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
3. *Горбачук В.И.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений / В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук. – К.: Наук. думка, 1984. – 283 с.
4. *Городецький В.В.* Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 219 с.
5. *Городецкий В.В.* Операторы обобщенного дифференирования Гельфонда-Леонтьева в пространствах типа S / Городецкий В.В., Мартынюк О.В. // Сиб. мат. журн. – 2013. – 54, № 3. – С. 569–584.
6. *Гельфанд И.М.* Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности задачи Коши / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов // Успехи мат. наук. – 1953. – Т. 8, вып. 6. – С. 3–54.
7. *Нагнибіда М.І.* Класичні оператори в просторах аналітичних функцій / М.І. Нагнибіда. – К.: Ін-т математики НАН України, 1995. – 297 с.
8. *Лінчук С.С.* Застосовність диференціальних операторів нескінченного порядку відносно q-похідної до прострів аналітичних функцій / С.С. Лінчук // IV Міжнародна Ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана. Тези доповідей. – Чернів. нац. унів., 2014. – С. 94–96