УДК 123.456

©2014 р. **Я.І. Грушка**

Інститут математики НАН України, м. Київ

КРИТЕРІЙ ІСНУВАННЯ УНІВЕРСАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ У КІНЕМАТИЧНИХ МІНЛИВИХ МНОЖИНАХ

Дана робота присвячена дослідженню кінематичних мінливих множин (“абстрактних кінематик”), тобто математичних об’єктів, в яких мінливі множини оснащені різноманітними геометричними та топологічними структурами, а саме, метричними, топологічними, лінійними, банаховими, гільбертовими та іншими просторами. В роботі дано означення реального і універсального перетворення координат у кінематичних мінливих множинах, а також встановлено необхідну і достатню умову існування універсального перетворення координат. Дослідження в цьому напрямку можуть бути цікавими для астрофізики, оскільки існує припущення, що у великих масштабах Всесвіту закони фізики (зокрема, закони кінематики) можуть бути відмінними від тих, які діють в околі нашої сонячної системи.

This work is devoted to the investigation of kinematic changeable sets (“abstract kinematics”), that is the mathematical objects, in which changeable sets are equipped with different geometrical or topological structures, namely metric, topological, linear, Banach, Hilbert and other spaces. In the paper a definition of actual and universal coordinate transforms in kinematic changeable sets is presented, and necessary and sufficient condition for the existence of universal coordinate transform is obtained. Investigations in this direction may be interesting for astrophysics, because there exists the hypothesis, that in a large scale of the Universe, physical laws (in particular, the laws of kinematics) may be different from the laws, acting in a neighborhood of our solar System.

1. Вступні зауваження. Питання про загальний вигляд довільних просторово-часових перетворень координат для інерційних систем відліку у випадку, коли простір геометричних змінних є тривимірним і евклідовим, досліджувалось в роботі [1]. Частинним випадком перетворень координат [1] є (тривимірні) класичні, а також узагальнені [2–4] перетворення Лоренца (для систем відліку, що рухаються зі швидкістю, більшою за швидкість світла). В [5,6] було дано загальне означення лінійних перетворень координат та узагальнених перетворень Лоренца у випадку, коли коли простір геометричних змінних є довільним дійсним гільбертовим простором.

Дана робота присвячена дослідженню абстрактних перетворень координат у кінематичних мінливих множинах і базується на загальній теорії мінливих множин [7–10]. Для розуміння подальшого тексту ознайомлення хоча б з однією із цих робіт є необхідним. Слід зазначити, що математичний апарат робіт [1–6] не базується на теорії мінливих множин, що істотно зменшує його загальність, зокрема дає змогу вивчати лише універсальні перетворення координат.

2. Основні поняття і позначення теорії мінливих множин. Мінливі та базові мінливі множини позначатимемо великими каліграфічними або готичними буквами. Надалі, для довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$ будемо використовувати такі позначення:

$\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ – базова множина, або множина всіх елементарних станів $\mathcal{B}$.

$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ – множина всіх елементарно-часових станів $\mathcal{B}$.

$\mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ – множина моментів часу $\mathcal{B}$.

$\leq_{\mathcal{B}}$ – відношення часового порядку $\mathcal{B}$.

$\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbf{Tm}(\mathcal{B}), \leq_{\mathcal{B}})$.

$\overset{\mathfrak{Bs}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}$ – напрямне відношення змін $\mathcal{B}$.

$\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}$ – база елементарних процесів $\mathcal{B}$.

Елементи множин $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ та $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ будемо називати, відповідно, елементарними та елементарно-часовими станами $\mathcal{B}$.

Безпосередньо з [11, означення 2.4], [8, definition 7.4] випливають наступні властивості довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$.

Властивості 1. *1.* $\overset{\mathfrak{Bs}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}$ *— рефлексивне бінарне відношення, задане на* $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$, *тобто для довільного елементарного стану* $x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ *справедливе співвідношення* $x \overset{\mathfrak{Bs}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}} x$.

2. $\leq_{\mathcal{B}}$ *— відношення (нестрогого) лінійного порядку, задане на* $\mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ *(тобто* $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbf{Tm}(\mathcal{B}), \leq_{\mathcal{B}})$ *— лінійно упорядкована множина в сенсі* [12, с. 12]*).*

3. $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$.

4. $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}$ *— рефлексивне бінарне відношення на* $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$.

Зауваження 1. *У тому випадку, коли наперед відомо, про яку базову мінливу множину йде мова у позначеннях* $\leq_{\mathcal{B}}$, $\overset{\mathfrak{Bs}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}$, $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}$, *символ "$\mathcal{B}$" будемо опускати, застосовуючи позначення* $\leq$, $\overset{\mathfrak{Bs}}{\leftarrow}$, $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\leftarrow}$. *У тих випадках, коли зі змісту попереднього тексту можна визначити, що відношення* $\overset{\mathfrak{Bs}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}$ *або* $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}$ *застосовуються саме до елементарних чи елементарно-часових станів в заданих позначеннях послідовності символів "$\mathfrak{Bs}$" чи "$\mathbb{B}\mathfrak{s}$" будемо опускати, використовуючи замість них позначення* $\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}$, *чи просто* $\leftarrow$.

Нехай, $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — довільна лінійно упорядкована множина і $\mathcal{X}$ — довільна множина. Для довільної пари $\omega = (t, x) \in \mathbf{T} \times \mathcal{X}$ будемо використовувати позначення:

$$\mathsf{bs}\,(\omega) := x, \quad \mathsf{tm}\,(\omega) := t. \tag{1}$$

Тут $\mathbf{T} \times \mathcal{X} = \{(t, x) \mid t \in \mathbf{T},\, x \in \mathcal{X}\}$ — декартовий добуток множин $\mathbf{T}$ і $\mathcal{X}$.

В роботах [8, 11, 13] доведено, що для довільних базових мінливих множин $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ справджуються такі властивості:

Властивості 2. *1. Якщо* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ *і* $\omega_2 \leftarrow \omega_1$, *то* $\mathsf{bs}\,(\omega_2) \leftarrow \mathsf{bs}\,(\omega_1)$ *і* $\mathsf{tm}\,(\omega_1) \leq \mathsf{tm}\,(\omega_2)$. *Якщо, додатково,* $\omega_1 \neq \omega_2$, *то* $\mathsf{tm}\,(\omega_1) < \mathsf{tm}\,(\omega_2)$.

2. Для довільних $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ *умова* $x_2 \leftarrow x_1$ *має місце тоді і тільки тоді, коли існують елементарно-часові стани* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ *такі, що* $\mathsf{bs}\,(\omega_1) = x_1$, $\mathsf{bs}\,(\omega_2) = x_2$ *і* $\omega_2 \leftarrow \omega_1$.

3. Якщо $\mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{B}_1) = \mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathcal{B}_2)$, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_1) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_2)$, $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}} = \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow}}$, *то* $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$.

Надалі, для довільної мінливої множини $\mathcal{Z}$ будемо використовувати такі позначення:

$\mathcal{I}nd\,(\mathcal{Z})$ – Множина ***індексів*** мінливої множини $\mathcal{Z}$.

$\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ – Множина ***областей сприймання*** $\mathcal{Z}$.

При цьому для довільних областей сприймання $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ будемо використовувати такі позначення:

$\mathtt{ind}\,(\mathfrak{l})$ – Індекс області сприймання $\mathfrak{l}$.

$\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})$, $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$, $\mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$, $\leq_{\mathfrak{l}}$, $\overset{\mathfrak{Bs}}{\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}}$, $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}}$ — множина всіх елементарних станів $\mathfrak{l}$, множина всіх елементарно-часових станів $\mathfrak{l}$, множина моментів часу $\mathfrak{l}$, відношення часового порядку $\mathfrak{l}$, напрямне відношення змін $\mathfrak{l}$, база елементарних процесів $\mathfrak{l}$ відповідно.

$\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) = (\mathbf{Tm}(\mathfrak{l}), \leq_{\mathfrak{l}})$.

$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{Z} \rangle$ – ***відображення уніфікації*** з області сприймання $\mathfrak{l}$ в область сприймання $\mathfrak{m}$.

Зауваження 2.

1. *Безпосередньо з означення мінливої множини ([10, означення 3.1], [8, definition 9.6]) випливає, що для довільної області сприймання* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ *довільної мінливої множини* $\mathcal{Z}$ *мають місце властивості 1 та властивості 2 (з заміною символу "$\mathcal{B}$" на символ "$\mathfrak{l}$").*
2. *При цьому використовуються всі скорочені варіанти позначень, описані в зауваженні 1 (але, з заміною символу "$\mathcal{B}$" на символ "$\mathfrak{l}$" і терміну "базова мінлива множина" на термін "область сприймання").*

Також з означення мінливої множини випливають властивості 3 та твердження 1.

Властивості 3. *Нехай $\mathcal{Z}$ — довільна мінлива множина. Тоді:*

1. *Множини $\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ та $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{Z})$ завжди непорожні.*
2. $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{Z}) = \{\mathtt{ind}\,(\mathfrak{l}) \mid \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})\}$.
3. *Для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ рівність $\mathfrak{l} = \mathfrak{m}$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\mathtt{ind}\,(\mathfrak{l}) = \mathtt{ind}\,(\mathfrak{m})$.*
4. *Для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ відображення уніфікації $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\ \mathcal{Z} \rangle$ є відображенням з $2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})}$ в $2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})}$, де $2^{\mathbf{M}}$ означає множину всіх підмножин множини $\mathbf{M}$.*

Твердження 1. *Нехай, $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$ — мінливі множини, причому:*

1. $\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_2)$.
2. *Для довільних областей сприймання $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_2)$ справедлива рівність: $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z}_1 \rangle = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z}_2 \rangle$.*

Тоді, $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_2$.

Нехай $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ — довільні області сприймання мінливої множини $\mathcal{Z}$. Тоді для довільної підмножини $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ через $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\ \mathcal{Z} \rangle\, A$ будемо позначати дію відображення уніфікації $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\ \mathcal{Z} \rangle$ на множину A. Тобто:

$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\ \mathcal{Z} \rangle\, A := \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\ \mathcal{Z} \rangle\, (A).$$

Якщо відомо про яку мінливу множину $\mathcal{Z}$ йде мова, у позначенні $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\ \mathcal{Z} \rangle$ символ $\mathcal{Z}$ будемо опускати, вживаючи замість нього позначення, $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle$.

В роботах [8, 10] доведено, що для довільної мінливої множин $\mathcal{Z}$ справджуються такі властивості:

Властивості 4. *1. Довільну область сприймання $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ можна подати у вигляді упорядкованої пари, $\mathfrak{l} = (\mathtt{ind}\,(\mathfrak{l})\,, \mathfrak{l}^{\wedge})$, де $\mathfrak{l}^{\wedge}$ є базовою мінливою множиною. При цьому $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}^{\wedge})$, $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}^{\wedge})$, $\mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) = \mathbf{Tm}\,(\mathfrak{l}^{\wedge})$, $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) = \mathbb{T}\mathbf{m}\,(\mathfrak{l}^{\wedge})$, $\leq_{\mathfrak{l}} = \leq_{\mathfrak{l}^{\wedge}}$, $\overset{\mathfrak{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}} = \overset{\mathfrak{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}^{\wedge}}{\leftarrow}}$, $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}} = \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}^{\wedge}}{\leftarrow}}$*

2. *Для довільних $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ і $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ справедлива рівність:*

$$\langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A = A.$$

3. *Якщо $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ і $A \subseteq B \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(l)$, то $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A \subseteq \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, B$;*
4. *Для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ і $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ справедливе включення:*

$$\langle p \leftarrow m \rangle\, \langle m \leftarrow l \rangle\, A \subseteq \langle p \leftarrow l \rangle\, A.$$

Означення 1. *Мінливу множину $\mathcal{Z}$ будемо називати* ***чітко видимою****, якщо для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ і $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ з умови $A \neq \emptyset$ випливає, що $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A \neq \emptyset$.*

Зауваження 3. *В роботі [9, означення 3.3] було дано дещо інше означення чітко видимої мінливої множини, а мінливі множини чітко видимі в сенсі означення 1 було названо нормально видимими (див [9, означення 3.3 та твердження 3.3]), проте з [9, наслідок 4.1] випливає, що на рівні мінливих множин поняття нормальної і чіткої видимості — еквівалентні. Тому означення 1 еквівалентне означенню чітко видимих мінливих множин в [9].*

Твердження 2 ([9,8])**.** *Нехай $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ — довільні області сприймання довільної чітко видимої мінливої множини $\mathcal{Z}$. Тоді для довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ існує, причому єдиний елемент $\omega' =: \langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z} \rangle\, \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})$ такий, що $\{\omega'\} = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \{\omega\}$.*

Таким чином, в чітко видимій мінливій множині для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ і $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ виконується рівність:

$$\{\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z} \rangle\, \omega\} = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \{\omega\}\,.$$

Відображення $\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z} \rangle : \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) \mapsto \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})$ будемо називати відображеннями ***чіткої уніфікації***. У тих випадках, коли мінлива множина $\mathcal{Z}$ є наперед заданою, замість позначення $\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z} \rangle$ будемо використовувати позначення $\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle$.

Твердження 3 ([9,8])**.** *Нехай $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$, де $\mathcal{Z}$ — чітко видима мінлива множина. Тоді множини $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ і $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})$ є рівнопотужними. При цьому відображення:*

$$f(\omega) = \langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega, \qquad \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) \qquad (2)$$

є бієкцією (взаємно-однозначною відповідністю) між цими множинами.

З властивості 4(2), а також [9, теореми 5.2, 5.1] або [8, theorems 11.2, 11.1] випливають наступні властивості відображень чіткої уніфікації у чітко видимих мінливих множинах. У властивостях 5 $\mathcal{Z}$ — довільна чітко видима мінлива множина, і $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ — довільні області сприймання $\mathcal{Z}$.

Властивості 5.

1. $\forall\, \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) \quad \langle !\, \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega = \omega;$
2. $\forall\, A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$
$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A = \{ \langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega \mid \omega \in A \};$$
3. $\forall\, \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$
$$\langle !\, \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega = \langle !\, \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega.$$

3. Математичні об'єкти для побудови геометричних оточень мінливих множин. Даний розділ носить суто технічний характер. В цьому розділі не вводяться ніякі принципово нові поняття, а лише робиться спроба вкласти найбільш часто вживані математичні простори, які хоч якимось чином пов'язані з геометрією, в одну математичну структуру, зручну для побудови абстрактних кінематик.

Означення 2. *Трійку $\mathbb{L} = (\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ будемо називати **лінійною структурою** над множиною $\mathfrak{X}$, якщо:*

1. *$\mathbb{K} = (\mathbf{K}, +_{\mathbb{K}}, \times_{\mathbb{K}})$ — поле.*
2. *$\oplus : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}$ — бінарна операція над $\mathfrak{X}$;*
3. *$\otimes : \mathbf{K} \times \mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}$ — бінарна операція з $\mathbf{K} \times \mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}$.*
4. *Трійка $(\mathfrak{X}, \oplus, \otimes)$ є лінійним простором над полем $\mathbb{K}$.*

*Якщо $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, то лінійну структуру $\mathbb{L}$ будемо називати **числовою лінійною структурою** над $\mathfrak{X}$.*

Якщо $\mathbb{L} = (\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ є лінійною структурою над $\mathfrak{X}$, то лінійний простір над полем $\mathbb{K}$, породжений цією структурою будемо позначати через $\mathfrak{Lp}(\mathfrak{X}, \mathbb{L})$:

$$\mathfrak{Lp}(\mathfrak{X}, \mathbb{L}) = (\mathfrak{X}, \oplus, \otimes).$$

Наступне означення базується на концепції, що більшість найбільш часто вживаних математичних об'єктів (в тому числі функції, відношення, алгебраїчні операції, упорядковані пари або набори) є множинами.

Означення 3. *Шестірку множин $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{X}, \mathcal{T}, \mathbb{L}, \rho, \|\cdot\|, (\cdot,\cdot))$ будемо називати **координатним простором**, якщо виконуються наступні умови:*

1. *$\mathfrak{X} \neq \emptyset$.*
2. *$\mathcal{T} \cup \mathbb{L} \neq \emptyset$.*
3. *Якщо $\mathcal{T} \neq \emptyset$, то $\mathcal{T}$ — топологія на $\mathfrak{X}$.*
4. *Якщо $\mathbb{L} \neq \emptyset$, то $\mathbb{L}$ — числова лінійна структура над $\mathfrak{X}$.*
5. *Якщо $\mathbb{L} \neq \emptyset$ і $\mathcal{T} \neq \emptyset$, то пара $(\mathfrak{Lp}(\mathfrak{X}, \mathbb{L}), \mathcal{T})$ є лінійним топологічним простором.*
6. *Якщо $\rho \neq \emptyset$, то:*
   - **6.1)** *ρ — метрика на $\mathfrak{X}$;*
   - **6.2)** *$\mathcal{T} \neq \emptyset$;*
   - **6.3)** *топологія $\mathcal{T}$ породжена метрикою ρ.*
7. *Якщо $\|\cdot\| \neq \emptyset$, то:*
   - **7.1)** *$\mathbb{L} \neq \emptyset$;*
   - **7.2)** *$\|\cdot\|$ — норма на лінійному просторі $\mathfrak{Lp}(\mathfrak{X}, \mathbb{L})$;*
   - **7.3)** *$\rho \neq \emptyset$;*
   - **7.4)** *метрика ρ породжена нормою $\|\cdot\|$.*
8. *Якщо $(\cdot,\cdot) \neq \emptyset$, то:*
   - **8.1)** *$\|\cdot\| \neq \emptyset$ (а отже, згідно з **7.1)**, і $\mathbb{L} \neq \emptyset$);*
   - **8.2)** *$(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток на лінійному просторі $\mathfrak{Lp}(\mathfrak{X}, \mathbb{L})$;*
   - **8.3)** *норма $\|\cdot\|$ породжена скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$.*

Зауваження про позначення. Нехай $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{X}, \mathcal{T}, \mathbb{L}, \rho, \|\cdot\|, (\cdot,\cdot))$ — координатний простір, де у випадку $\mathbb{L} \neq \emptyset$, $\mathbb{L} = (\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ — числова лінійна структура над $\mathfrak{X}$. Надалі будемо використовувати такі позначення:

1. $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}) := \mathfrak{X}$ (множину $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ будемо називати ***множиною значень координат*** $\mathfrak{Q}$).

2. $\mathcal{T}p(\mathfrak{Q}) := \mathcal{T}$ $\quad$ ($\mathcal{T}p(\mathfrak{Q})$ будемо називати ***топологією*** $\mathfrak{Q}$).
3. $\mathbb{L}s(\mathfrak{Q}) := \mathbb{L}$ $\quad$ ($\mathbb{L}s(\mathfrak{Q})$ будемо називати ***лінійною структурою*** $\mathfrak{Q}$).
4. $\mathfrak{Ps}(\mathfrak{Q}) := \begin{cases} \mathbb{K}, & \mathbb{L}s(\mathfrak{Q}) \neq \emptyset \\ \emptyset, & \mathbb{L}s(\mathfrak{Q}) = \emptyset \end{cases}$ $\quad$ ($\mathfrak{Ps}(\mathfrak{Q})$ будемо називати ***полем скалярів*** $\mathfrak{Q}$).
5. Для елементів $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathfrak{Ps}(\mathfrak{Q})$ $(n \in \mathbb{N})$ будемо вживати позначення:

$$(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)_{\mathfrak{Q}} := \lambda_1 \otimes x_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n \otimes x_n.$$

6. $\mathbf{di}_{\mathfrak{Q}} := \rho$ $\quad$ ($\mathbf{di}_{\mathfrak{Q}}$ будемо називати ***дистанцією*** на $\mathfrak{Q}$).
7. $\|\cdot\|_{\mathfrak{Q}} := \|\cdot\|$ $\quad$ ($\|\cdot\|_{\mathfrak{Q}}$ будемо називати ***нормою*** на $\mathfrak{Q}$).
8. $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{Q}} := (\cdot,\cdot)$ $\quad$ ($(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{Q}}$ будемо називати ***скалярним добутком*** на $\mathfrak{Q}$).

Елементи $x \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ будемо називати ***координатами*** координатного простору $\mathfrak{Q}$, а у випадку $\mathbb{L}s(\mathfrak{Q}) \neq \emptyset$ ці елементи будемо також називати ***векторами (векторними координатами)*** $\mathfrak{Q}$.

У випадку, коли це не викликає непорозумінь у позначеннях $(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)_{\mathfrak{Q}}$, $\mathbf{di}_{\mathfrak{Q}}$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{Q}}$, $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{Q}}$ символ $\mathfrak{Q}$ будемо опускати, вживаючи замість них позначення $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$, $\mathbf{di}$, $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$ відповідно.

4. Кінематичні мінливі множини

Означення 4.

1. *Пару $\mathcal{G}_0 = (\mathfrak{Q}, k)$ будемо називати **геометричним оточенням** базової мінливої множини $\mathcal{B}$, якщо:*

   а) *$\mathfrak{Q}$ — координатний простір;*

   б) *$k : \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \mapsto \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ — відображення з $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$.*

   *При цьому пару $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}} = (\mathcal{B}, \mathcal{G}_0) = (\mathcal{B}, (\mathfrak{Q}, k))$ будемо називати **базовою кінематичною мінливою множиною**, або, скорочено — **базовою кінематичною** множиною.*

2. *Нехай, $\mathcal{Z}$ — мінлива множина. Індексовану сім'ю пар виду $\mathcal{G} = ((\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}, k_{\mathfrak{l}}) \mid \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z}))$ будемо називати **геометричним оточенням** мінливої множини $\mathcal{Z}$, якщо для довільної області сприймання $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ пара $(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}, k_{\mathfrak{l}})$ є геометричним оточенням базової мінливої множини $\mathfrak{l}^{\wedge}$, породженої областю сприймання $\mathfrak{l}$, тобто якщо пара $(\mathfrak{l}^{\wedge}, (\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}, k_{\mathfrak{l}}))$ є базовою кінематичною множиною для довільного $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$.*

   *При цьому пару $\mathfrak{C} = (\mathcal{Z}, \mathcal{G})$ будемо називати **кінематичною мінливою множиною**, або, скорочено — **кінематичною** множиною.*

Підкреслимо, що в цій статті розглядаються лише кінематичні множини зі сталою (не змінною в часі) геометрією. Такі кінематичні множини достатні для побудови абстрактних кінематик в інерційних системах відліку. Зробивши певну модифікацію означення 4, визначити кінематичні множини з мінливою геометрією, в принципі, можливо.

Система позначень для базових кінематичних множин Нехай, $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}} = (\mathcal{B}, \mathcal{G}_0)$ де $\mathcal{G}_0 = (\mathfrak{Q}, k)$ — довільна базова кінематична множина. Надалі будемо використовувати наступну систему позначень.

а) Позначення, індуковані з теорії базових мінливих множин:

$$\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}); \qquad \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B});$$
$$\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}{\longleftarrow}} := \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\longleftarrow}}; \qquad \overset{\mathfrak{Bs}}{\underset{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}{\longleftarrow}} := \overset{\mathfrak{Bs}}{\underset{\mathcal{B}}{\longleftarrow}};$$
$$\mathbf{Tm}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbf{Tm}(\mathcal{B}); \qquad \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B});$$
$$\leq_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}} := \leq_{\mathcal{B}};$$

б) Позначення, індуковані з позначень для координатних просторів:

$$\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}); \qquad \mathcal{T}p\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathcal{T}p(\mathfrak{Q});$$
$$\mathbb{L}s\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbb{L}s(\mathfrak{Q}); \qquad \mathfrak{Ps}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathfrak{Ps}(\mathfrak{Q});$$
$$\mathbf{di}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}} := \mathbf{di}_{\mathfrak{Q}}; \qquad \|\cdot\|_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}} := \|\cdot\|_{\mathfrak{Q}};$$
$$(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}} := (\cdot,\cdot)_{\mathfrak{Q}}.$$

Також у випадку $\mathbb{L}s\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) \neq \emptyset$ для довільних $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$, $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathfrak{Ps}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ будемо використовувати наступне

позначення:

$$(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathfrak{C}^b} := (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathcal{Q}}.$$

в) Власні позначення для базових кінематичних множин:

$$\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^b\right) := \mathcal{B}; \qquad \mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}^b\right) := \mathfrak{Q};$$
$$\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^b}(x) := k(x) \ \left(x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^b\right)\right).$$

Зауважимо, що функція $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^b}(\cdot)$ ставить у відповідність кожному елементарному стану $x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^b\right)$ його координату $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^b}(x)$.

г) Скорочені варіанти позначень

- Використовуються всі скорочені варіанти позначень, описані в зауваженні 1 (але, з заміною символу “$\mathcal{B}$” на символ “$\mathfrak{C}^b$” і терміну “базова мінлива множина” на термін “базова кінематична множина”).
- У тих випадках, коли наперед відомо про яку базову кінематичну множину йде мова замість позначень $\mathbf{di}_{\mathfrak{C}^b}$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{C}^b}$, $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{C}^b}$, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^b}(x)$ будемо використовувати позначення $\mathbf{di}$, $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$, $\mathfrak{q}(x)$ відповідно.

Система позначень для кінематичних множин Нехай, $\mathfrak{C} = (\mathcal{Z}, \mathcal{G})$, де $\mathcal{G} = ((\mathfrak{Q}_\mathfrak{l}, k_\mathfrak{l}) \mid \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z}))$ — кінематична множина.

а) Множини:

$$\mathcal{I}nd(\mathfrak{C}) := \mathcal{I}nd(\mathcal{Z});$$
$$\mathcal{L}k(\mathfrak{C}) := \mathcal{L}k(\mathcal{Z}).$$

будемо називати ***множиною індексів*** та ***множиною систем відліку*** кінематичної множини $\mathfrak{C}$ (відповідно). Причому у випадку кінематичних множин, на відміну від абстрактних мінливих множин буде використовуватись термін “система відліку”, а не “область сприймання”.

б) Мінливу множину

$$\mathbb{BE}(\mathfrak{C}) := \mathcal{Z}$$

будемо називати ***базою еволюції*** кінематичної множини $\mathfrak{C}$.

в) Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C}) = \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ зберігаються всі позначення, введені для областей сприймання в теорії мінливих множин ($\mathtt{ind}(\mathfrak{l})$, $\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})$, $\overset{\mathfrak{Bs}}{\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}}$, $\mathbb{Bs}(\mathfrak{l})$, $\overset{\mathbb{Bs}}{\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}}$, $\mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$, $\mathbb{Tm}(\mathfrak{l})$, $\leq_\mathfrak{l}$).

г) Для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ індукуються позначення для відображень уніфікації:

$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C} \rangle := \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z} \rangle.$$

Зокрема, у випадку, коли мінлива множина $\mathcal{Z}$ є чітко видимою (у цьому випадку будемо говорити, що кінематична множина $\mathfrak{C}$ є ***чітко видимою***), вводимо позначення:

$$\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C} \rangle := \langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z} \rangle.$$

д) Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ введемо позначення $\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l} = (\mathfrak{l}^\wedge, \mathcal{G}_\mathfrak{l})$, де $\mathcal{G}_\mathfrak{l} = (\mathfrak{Q}_\mathfrak{l}, k_\mathfrak{l})$. За означенням кінематичної множини, для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ пара $\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l}$ є базовою кінематичною множиною. Базову кінематичну множину $\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l}$ будемо називати ***образом кінематичної множини*** $\mathfrak{C}$ в системі відліку $\mathfrak{l}$.

е) Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ введемо наступні позначення:

$$\mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}) := \mathbf{Zk}(\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l}) = \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_\mathfrak{l});$$
$$\mathbb{L}s(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}) := \mathbb{L}s(\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l}) = \mathbb{L}s(\mathfrak{Q}_\mathfrak{l});$$
$$\mathcal{T}p(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}) := \mathcal{T}p(\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l}) = \mathcal{T}p(\mathfrak{Q}_\mathfrak{l});$$
$$\mathfrak{Ps}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}) := \mathfrak{Ps}(\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l}) = \mathfrak{Ps}(\mathfrak{Q}_\mathfrak{l});$$
$$\|\cdot\|_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}} := \|\cdot\|_{\mathfrak{C}\upharpoonright\mathfrak{l}} = \|\cdot\|_{\mathfrak{Q}_\mathfrak{l}};$$
$$\mathbf{di}_\mathfrak{l}(\cdot;\, \mathfrak{C}) := \mathbf{di}_{\mathfrak{C}\upharpoonright\mathfrak{l}} = \mathbf{di}_{\mathfrak{Q}_\mathfrak{l}};$$
$$(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}} := (\cdot,\cdot)_{\mathfrak{C}\upharpoonright\mathfrak{l}} = (\cdot,\cdot)_{\mathfrak{Q}_\mathfrak{l}};$$
$$\mathsf{BE}(\mathfrak{l}) := \mathsf{BE}(\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l}) = \mathfrak{l}^\wedge;$$
$$\mathsf{BG}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}) := \mathsf{BG}(\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l}) = \mathfrak{Q}_\mathfrak{l}.$$

Також для систем відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ таких, що $\mathbb{L}s(\mathfrak{l}) \neq \emptyset$ і довільних $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C})$, $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathfrak{Ps}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C})$ будемо використовувати наступне позначення:

$$(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}} :=$$
$$:= (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathcal{Q}_l}.$$

є) Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ введемо таке позначення:

$$\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\,(x;\,\mathfrak{C}) := \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}\restriction\mathfrak{l}}\,(x) = k_{\mathfrak{l}}(x),\ x \in \mathfrak{Bs}\,(\mathfrak{l})\,.$$

ж) Скорочені варіанти позначень:

- У тих випадках, коли наперед відомо про яку кінематичну множину $\mathfrak{C}$ йде мова замість позначень $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathfrak{C}\rangle$, $\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathfrak{C}\rangle$, $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C})$, $\mathbb{L}s(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C})$, $\mathbf{di}_{\mathfrak{l}}\,(\cdot;\,\mathfrak{C})$, $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}}$, $\mathcal{T}p(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C})$, $\mathfrak{Ps}(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C})$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}}$, $\mathsf{BG}(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C})$, $\mathfrak{q}_l\,(x;\,\mathfrak{C})$ будемо використовувати позначення, $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle$, $\langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle$, $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$, $\mathbb{L}s(\mathfrak{l})$, $\mathbf{di}_{\mathfrak{l}}$, $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{l}}$, $\mathcal{T}p(\mathfrak{l})$, $\mathfrak{Ps}(\mathfrak{l})$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{l}}$, $\mathsf{BG}(\mathfrak{l})$, $\mathfrak{q}_l\,(x)$ відповідно.
- У тих випадках, коли наперед відомо про яку систему відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ йде мова замість позначень $\mathbf{di}_{\mathfrak{l}}$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{l}}$, $(\cdot,\cdot)_{\,\mathfrak{l}}$, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\,(x)$, $(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}}$ будемо використовувати позначення $\mathbf{di}$, $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$, $\mathfrak{q}(x)$, $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$ відповідно. Також будемо користуватися скороченими варіантами позначень для областей сприймання мінливих множин, описаними в зауваженні 2 (пункт 2).

5. Елементарні властивості кінематичних множин

Твердження 4. *Нехай, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ — кінематичні множини, причому:*

1. $\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_2)$.
2. *Для довільної системи відліку* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_2)$ *справедлива рівність,* $\mathfrak{C}_1 \restriction \mathfrak{l} = \mathfrak{C}_2 \restriction \mathfrak{l}$.
3. *Для довільних систем відліку* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_2)$ *справедлива рівність,* $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C}_1\rangle = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C}_2\rangle$.

Тоді, $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2$.

Доведення.

Нехай, $\mathfrak{C}_1 = (\mathcal{Z}_1, \mathcal{G}_1)$, $\mathfrak{C}_2 = (\mathcal{Z}_2, \mathcal{G}_2)$, де $\mathcal{G}_1 = \left(\left(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}^{(1)}, k_{\mathfrak{l}}^{(1)}\right) \mid \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_1)\right)$, $\mathcal{G}_2 = \left(\left(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}^{(2)}, k_{\mathfrak{l}}^{(2)}\right) \mid \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_2)\right)$ — кінематичні множини, що задовольняють умови твердження 4. Тоді мінливі множини $\mathcal{Z}_1$ і $\mathcal{Z}_2$ задовольняють умови твердження 1. Отже, $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_2$.

За умовою, для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_2)$, виконується рівність $\mathfrak{C}_1 \restriction \mathfrak{l} = \mathfrak{C}_2 \restriction \mathfrak{l}$. Отже, згідно з позначеннями, прийнятими в розділі 4, $\left(\mathfrak{l}^{\wedge}, \left(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}^{(1)}, k_{\mathfrak{l}}^{(1)}\right)\right) = \mathfrak{C}_1 \restriction \mathfrak{l} = \mathfrak{C}_2 \restriction \mathfrak{l} = \left(\mathfrak{l}^{\wedge}, \left(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}^{(2)}, k_{\mathfrak{l}}^{(2)}\right)\right)$. Тобто, $\left(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}^{(1)}, k_{\mathfrak{l}}^{(1)}\right) = \left(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}^{(2)}, k_{\mathfrak{l}}^{(2)}\right)$ $(\forall \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_2))$. Звідси:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_1 &= \left(\left(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}^{(1)}, k_{\mathfrak{l}}^{(1)}\right) \mid \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_1)\right)\\ &= \left(\left(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}^{(2)}, k_{\mathfrak{l}}^{(2)}\right) \mid \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_2)\right) = \mathcal{G}_2.\end{aligned}$$

Отже, $\mathfrak{C}_1 = (\mathcal{Z}_1, \mathcal{G}_1) = (\mathcal{Z}_2, \mathcal{G}_2) = \mathfrak{C}_2$.

Наслідок 1. *Нехай, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ — кінематичні множини, причому:*

1. $\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_2)$.
2. *Для довільної системи відліку* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_2)$ *справедливі рівності:*

$$\begin{aligned}&\mathsf{BG}\,(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C}_1) = \mathsf{BG}\,(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C}_2)\\ &\quad \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\,(x,\,\mathfrak{C}_1) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\,(x,\,\mathfrak{C}_2) \quad (\forall x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}))\,.\end{aligned}$$

3. *Для довільних систем відліку* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_2)$ *справедлива рівність,* $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C}_1\rangle = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C}_2\rangle$.

Тоді, $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2$.

Доведення.

Нехай, кінематичні множини $\mathfrak{C}_1$ і $\mathfrak{C}_2$ задовольняють умови наслідку. Тоді, згідно із системою позначень, прийнятою в розділі 4, для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_2)$ отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_1 \restriction \mathfrak{l} &= (\mathsf{BE}(\mathfrak{l}), (\mathsf{BG}\,(\mathfrak{l}, \mathfrak{C}_1)\,, \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\,(\cdot;\,\mathfrak{C}_1))) =\\ &= (\mathsf{BE}(\mathfrak{l}), (\mathsf{BG}\,(\mathfrak{l}, \mathfrak{C}_2)\,, \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\,(\cdot;\,\mathfrak{C}_2))) = \mathfrak{C}_2 \restriction \mathfrak{l}.\end{aligned}$$

Отже, за твердженням 4, $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2$.

Зауваження 4. *Із системи позначень, прийнятої в розділі 4, випливає, що для довільної кінематичної множини $\mathfrak{C}$ зберігаються властивості 3, властивості 4 та твердження 3, а у випадку, коли $\mathfrak{C}$ є чітко видимою, — властивості 5 (з заміною скрізь символу $\mathcal{Z}$ на символ $\mathfrak{C}$).*

6. Перетворення координат у кінематичних множинах. Нехай, $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$ – базова кінематична множина. Введемо настуні позначення.

1. Множину:

$$\mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right),$$

будемо називати ***множиною Мінковського*** базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$.

2. Через $\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}$ будемо позначати відображення з $\mathbb{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ в $\mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$, що задається формулою:

$$\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}(\omega) := \left(\mathsf{tm}\,(\omega)\,, \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}(\mathsf{bs}\,(\omega))\right), \quad \omega \in \mathbb{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right).$$

Для елементарно-часового стану $\omega \in \mathbb{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ значення $\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}(\omega)$ будемо називати ***координатами Мінковського*** ω.

3. Якщо $\mathfrak{C}$ — довільна кінематична множина, то для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ вводимо позначення:

$$\mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathfrak{C}) := \mathbb{M}k\left(\mathfrak{C} \restriction \mathfrak{l}\right) = \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{l}).$$

$$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C}) := \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{C}\restriction\mathfrak{l}\rangle}(\omega) = \left(\mathsf{tm}\,(\omega)\,, \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(\mathsf{bs}\,(\omega))\right) \in \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathfrak{C}), \quad \omega \in \mathbb{Bs}(\mathfrak{l}).$$

Для елементарно-часового стану $\omega \in \mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l}\right)$ значення $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C})$ будемо називати ***координатами Мінковського** ω **у системі відліку*** $\mathfrak{l}$.

У тих випадках, коли наперед відомо, про яку кінематичну множину $\mathfrak{C}$ йде мова, замість позначень $\mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathfrak{C})$, $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C})$ будемо використовувати позначення $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$, $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega)$ відповідно.

Означення 5. *Нехай, $\mathfrak{C}$ — чітко видима кінематична множина і $\mathfrak{l},\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ — довільні системи відліку $\mathfrak{C}$.*

1. *Відображення $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}\left(\,\cdot\,;\mathfrak{C}\right) : \mathbb{Bs}(\mathfrak{l}) \mapsto \mathbb{M}k(\mathfrak{m})$, що задається формулою:*

$$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C}) = = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}(\langle!\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,\omega), \quad \omega \in \mathbb{Bs}(\mathfrak{l})$$

   *будемо називати **реальним перетворенням координат** з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$.*
   Для елементарно-часового стану $\omega \in \mathbb{Bs}\left(\mathfrak{l}\right)$ значення $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C})$ можна назвати координатами Мінковського ω у (іншій) системі відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$.

2. *Відображення $\widetilde{Q} : \mathbb{M}k(\mathfrak{l}) \mapsto \mathbb{M}k(\mathfrak{m})$ будемо називати **універсальним перетворенням координат** з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$, якщо:*

   - *$\widetilde{Q}$ є бієкцією з $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ на $\mathbb{M}k(\mathfrak{m})$.*
   - *Для довільного елементарно-часового стану $\omega \in \mathbb{Bs}(\mathfrak{l})$ справедлива рівність:*

$$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C}) = \widetilde{Q}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega)\right).$$

3. *Будемо говорити, що системи відліку $\mathfrak{l},\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ **допускають універсалізацію перетворення координат**, якщо існує хоч одне універсальне перетворення координат $\widetilde{Q} : \mathbb{M}k(\mathfrak{l}) \mapsto \mathbb{M}k(\mathfrak{m})$ з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$.*
   Якщо системи відліку $\mathfrak{l},\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ допускають універсалізацію перетворення координат будемо використовувати позначення:

$$\mathfrak{l} \underset{\mathfrak{C}}{\rightleftarrows} \mathfrak{m},$$

   у випадку, коли наперед відомо, про яку кінематичну множину $\mathfrak{C}$ йде мова, будемо використовувати позначення $\mathfrak{l} \rightleftarrows \mathfrak{m}$.

4. *Індексовану сім'ю $\left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C})}$ будемо називати **універсальним перетворенням координат для кінематичної множини** $\mathfrak{C}$, якщо:*

   - *Для довільних $\mathfrak{l},\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ $\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}$ є універсальним перетворенням координат з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$.*
   - *Для довільних $\mathfrak{l},\mathfrak{m},\mathfrak{p} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ і $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ справедливі рівності:*

$$\widetilde{Q}_{\mathfrak{l},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}) = \mathrm{w};$$
$$\widetilde{Q}_{\mathfrak{p},\mathfrak{m}}\left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}(\mathrm{w})\right) = \widetilde{Q}_{\mathfrak{p},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}).$$

5. *Будемо говорити, що кінематична множина $\mathfrak{C}$ **допускає універсальне перетворення координат**, якщо існує хоч одне універсальне перетворення координат $\left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C})}$ для $\mathfrak{C}$.*

Зауваження 5. *У тих випадках, коли наперед відомо, про яку кінематичну множину* $\mathfrak{C}$ *йде мова, замість позначення* $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\omega; \mathfrak{C})$ *будемо використовувати позначення* $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\omega)$.

Твердження 5. *Нехай* $\mathfrak{C}$ *— чітко видима кінематична множина. Тоді:*

1. *Для довільного* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ *тотожне відображення на* $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$*:*
$$\mathbb{I}_{\mathfrak{l}}(\mathrm{w}) := \mathrm{w}, \qquad \mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$$
є універсальним перетворенням координат з $\mathfrak{l}$ *в* $\mathfrak{l}$.

2. *Якщо* $\widetilde{Q}$ *— універсальне перетворення координат з* $\mathfrak{l}$ *в* $\mathfrak{m}$ *(*$\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$*), то* $\widetilde{Q}^{[-1]}$ *— універсальне перетворення координат з* $\mathfrak{m}$ *в* $\mathfrak{l}$ *(відображення* $\widetilde{Q}^{[-1]}$*, обернене до* $\widetilde{Q}$ *існує, оскільки, за означенням 5, пункт 2,* $\widetilde{Q}$ *є бієкцією з* $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ *на* $\mathbb{M}k(\mathfrak{m})$*).*

3. *Якщо* $\widetilde{Q}^{(\mathfrak{m},\mathfrak{l})}$ *є універсальним перетворенням координат з* $\mathfrak{l}$ *в* $\mathfrak{m}$*, а* $\widetilde{Q}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{m})}$ *— універсальним перетворенням координат з* $\mathfrak{m}$ *в* $\mathfrak{p}$ *(*$\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$*), то композиція відображень* $\widetilde{Q}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{m})}$ *і* $\widetilde{Q}^{(\mathfrak{m},\mathfrak{l})}$*, тобто відображення:*
$$\widetilde{Q}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{l})}(\mathrm{w}) = \widetilde{Q}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{m})}\left(\widetilde{Q}^{(\mathfrak{m},\mathfrak{l})}(\mathrm{w})\right), \qquad \mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}).$$
є універсальним перетворенням координат з $\mathfrak{l}$ *в* $\mathfrak{p}$.

Доведення.

1. Нехай, $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$. Очевидно, що відображення $\mathbb{I}_{\mathfrak{l}}$ є бієкцією з $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ на $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$. Використовуючи означення 5 (пункт 1) та властивість 5(1), для довільного елементарно-часового стану $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ отримуємо:
$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\omega) = \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\langle ! \, \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega) = \\ = \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega) = \mathbb{I}_{\mathfrak{l}}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega)\right).$$
Отже, за означенням 5 (пункт 2), $\mathbb{I}_{\mathfrak{l}}$ є універсальним перетворенням координат з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{l}$.

2. Нехай, $\widetilde{Q}$ — універсальне перетворення координат з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$). Тоді, для довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$, за означенням 5 (пункти 1 та 2), отримуємо:
$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \rangle}(\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega) = \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\omega) = \\ = \widetilde{Q}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega)\right).$$
Звідси:
$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega) = \widetilde{Q}^{[-1]}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \rangle}(\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega)\right).$$
Отже, для довільного $\omega_1 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})$ ($\langle ! \, \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, \omega_1 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$), внаслідок властивостей 5(1,3) будемо мати:
$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\langle ! \, \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, \omega_1) = \\ = \widetilde{Q}^{[-1]}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \rangle}(\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \langle ! \, \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, \omega_1)\right) = \\ = \widetilde{Q}^{[-1]}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \rangle}(\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \, \omega_1)\right) = \\ = \widetilde{Q}^{[-1]}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \rangle}(\omega_1)\right).$$
Тобто, за означенням 5 (пункт 1):
$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle}(\omega_1) = \widetilde{Q}^{[-1]}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \rangle}(\omega_1)\right) \\ (\forall \omega_1 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})).$$
Отже, за означенням 5 (пункт 2), $\widetilde{Q}^{[-1]}$ є універсальним перетворенням координат з $\mathfrak{m}$ в $\mathfrak{l}$.

3. Нехай, $\widetilde{Q}^{(\mathfrak{m},\mathfrak{l})}$ є універсальним перетворенням координат з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$, а $\widetilde{Q}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{m})}$ — універсальним перетворенням координат з $\mathfrak{m}$ в $\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$). Покладемо: $\widetilde{Q}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{l})}(\mathrm{w}) := \widetilde{Q}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{m})}\left(\widetilde{Q}^{(\mathfrak{m},\mathfrak{l})}(\mathrm{w})\right)$, $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$. Очевидно, що відображення $\widetilde{Q}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{l})}$ є бієкцією з $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ на $\mathbb{M}k(\mathfrak{p})$. При цьому, використовуючи означення 5, пункти 1,2 та властивості 5, для довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ отримуємо:
$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\omega) = \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{p} \rangle}(\langle ! \, \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega) = \\ = \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{p} \rangle}(\langle ! \, \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega) = \\ = \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle}(\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega) = \\ = \widetilde{Q}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{m})}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \rangle}(\langle ! \, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \, \omega)\right) = \\ = \widetilde{Q}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{m})}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\omega)\right) = \\ = \widetilde{Q}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{m})}\left(\widetilde{Q}^{(\mathfrak{m},\mathfrak{l})}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega)\right)\right) = \\ = \widetilde{Q}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{l})}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega)\right).$$
Отже, за означенням 5, пункт 2, $\widetilde{Q}^{(\mathfrak{p},\mathfrak{l})}$ є універсальним перетворенням координат з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{p}$.

З твердження 5 випливає такий наслідок:

Наслідок 2. *Відношення* $\rightleftarrows$ *є відношенням еквівалентності на множині* $\mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ *систем відліку довільної чітко видимої кінематичної множини* $\mathfrak{C}$.

Твердження 6. *Для довільної чітко видимої кінематичної множини* $\mathfrak{C}$ *наступні твердження рівносильні:*

1. $\mathfrak{C}$ *допускає універсальне перетворення координат.*

2. *Для довільних систем відліку* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ *має місце співвідношення* $\mathfrak{l} \rightleftarrows \mathfrak{m}$ *(тобто довільні дві системи відліку* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ *допускають універсалізацію перетворення координат).*

3. *Існує система відліку* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ *така, що для довільної системи відліку* $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ *виконується співвідношення* $\mathfrak{l} \rightleftarrows \mathfrak{m}$.

Доведення.

1. Імплікація $1 \Longrightarrow 2$ випливає з означення 5, пункти 3 і 4.

2. За властивістю 3(1), множина $\mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ — непорожня. Тому, для того, щоб переконатись у справедливості імплікації $2 \Longrightarrow 3$ досить зафіксувати довільну систему відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$.

3. Отже, залишилось довести імплікацію $3 \Longrightarrow 1$. Нехай існує система відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ така, що для довільної $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ виконується співвідношення $\mathfrak{l} \rightleftarrows \mathfrak{m}$. Тоді, для довільної системи відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ існує універсальне перетворення координат $Q^{(\mathfrak{m},\mathfrak{l})} : \mathbb{M}k(\mathfrak{l}) \mapsto \mathbb{M}k(\mathfrak{m})$. Для довільних систем відліку $\mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ покладемо:

$$\widetilde{Q}_{\mathfrak{p},\mathfrak{m}}(\mathrm{w}) := Q^{(\mathfrak{p},\mathfrak{l})}\left(\left(Q^{(\mathfrak{m},\mathfrak{l})}\right)^{[-1]}(\mathrm{w})\right), \qquad (3)$$
$$\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{m}).$$

Згідно з твердженням 5 (пункти 2 і 3), для довільних $\mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ відображення $\widetilde{Q}_{\mathfrak{p},\mathfrak{m}} : \mathbb{M}k(\mathfrak{m}) \mapsto \mathbb{M}k(\mathfrak{p})$ є універсальним перетворенням координат з $\mathfrak{m}$ в $\mathfrak{p}$. Крім того, згідно з рівністю (3), для довільних $\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{k} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ і $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{m})$ отримуємо:

$$\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}}(\mathrm{w}) = Q^{(\mathfrak{m},\mathfrak{l})}\left(\left(Q^{(\mathfrak{m},\mathfrak{l})}\right)^{[-1]}(\mathrm{w})\right) = \mathrm{w};$$
$$\begin{aligned}\widetilde{Q}_{\mathfrak{k},\mathfrak{p}}\left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{p},\mathfrak{m}}(\mathrm{w})\right) &= Q^{(\mathfrak{k},\mathfrak{l})}\left(\left(Q^{(\mathfrak{p},\mathfrak{l})}\right)^{[-1]}\right.\\ &\quad \left.\left(Q^{(\mathfrak{p},\mathfrak{l})}\left(\left(Q^{(\mathfrak{m},\mathfrak{l})}\right)^{[-1]}(\mathrm{w})\right)\right)\right) =\\ &= Q^{(\mathfrak{k},\mathfrak{l})}\left(\left(Q^{(\mathfrak{m},\mathfrak{l})}\right)^{[-1]}(\mathrm{w})\right) =\\ &= \widetilde{Q}_{\mathfrak{k},\mathfrak{m}}(\mathrm{w}).\end{aligned}$$

Отже, за означенням 5 (пункт 4), сім'я відображень $\left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{p},\mathfrak{m}}\right)_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C})}$ є універсальним перетворенням координат для кінематичної множини $\mathfrak{C}$. Тому, за означенням 5 (пункт 5), кінематична множина $\mathfrak{C}$ допускає універсальне перетворення координат.

Нехай, $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$ — базова кінематична множина. Для довільної множини $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ покладемо:

$$\begin{aligned}\mathfrak{trj}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}[A] &:= \mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}(A) =\\ &= \left\{\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}(\omega) \mid \omega \in A\right\} \subseteq \mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right).\end{aligned} \qquad (4)$$

Множину $\mathfrak{trj}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}[A]$ будемо називати ***траєкторією*** множини $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$. Для довільної базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$ покладемо:

$$\begin{aligned}\mathbb{T}\mathbf{rj}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) &:= \mathfrak{trj}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}\left[\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right] =\\ &= \left\{\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right\} \subseteq \mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right),\\ \overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) &:= \mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) \setminus \mathbb{T}\mathbf{rj}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right).\end{aligned}$$

Множину $\mathbb{T}\mathbf{rj}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ будемо називати ***(загальною) траєкторією*** базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$, а множину $\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ — ***доповненням (загальної) траєкторії*** $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$. Відповідно для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ довільної кінематичної множини $\mathfrak{C}$ можна визначити траєкторією довільної мінливої системи $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$, а також загальну траєкторію і доповнення загальної траєкторії системи відліку $\mathfrak{l}$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{trj}_{\mathfrak{l}}[A; \mathfrak{C}] &:= \mathfrak{trj}_{\mathfrak{C}\upharpoonright\mathfrak{l}}[A] = \left\{\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega) \mid \omega \in A\right\};\\ \mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l}; \mathfrak{C}) &:= \mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l})\\ &= \left\{\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\right\};\\ \overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l}; \mathfrak{C}) &:= \overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l}) = \mathbb{M}k(\mathfrak{l}) \setminus \mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l}; \mathfrak{C})\end{aligned} \qquad (5)$$

(у тих випадках, коли кінематична множина $\mathfrak{C}$ є наперед відомою, замість позначень $\mathfrak{trj}_{\mathfrak{l}}[A;\mathfrak{C}]$, $\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l};\mathfrak{C})$, $\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l};\mathfrak{C})$ будемо використовувати позначення $\mathfrak{trj}_{\mathfrak{l}}[A]$, $\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l})$, $\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l})$ відповідно).

Наступна теорема встановлює необхідну і достатню ознаку існування універсального перетворення координат між системами відліку чітко видимої кінематичної множини.

Теорема 4. *Нехай $\mathfrak{C}$ — чітко видима кінематична множина і $\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ — довільні фіксовані системи відліку $\mathfrak{C}$.*

Системи відліку $\mathfrak{l},\mathfrak{m}$ допускають універсалізацію перетворення координат (тобто $\mathfrak{l}\rightleftarrows\mathfrak{m}$) тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

1. $\mathbf{card}\left(\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l})\right) = \mathbf{card}\left(\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{m})\right)$, *де* $\mathbf{card}(\mathcal{M})$ *означає потужність множини* $\mathcal{M}$.
2. *Для довільних $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ рівність $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega_1)=\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega_2)$ справедлива тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_1)=\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_2)$.*

Доведення.

1. Нехай $\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ і $\mathfrak{l}\rightleftarrows\mathfrak{m}$. Тоді, за означенням 5 існує бієкція $\widetilde{Q}:\mathbb{M}k(\mathfrak{l})\mapsto\mathbb{M}k(\mathfrak{m})$ така, що для довільного елементарно-часового стану $\omega\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ справедлива рівність:

$$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega)=\widetilde{Q}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega)\right). \tag{6}$$

1.а) Використовуючи означення загальної траєкторії системи відліку (див. (5)), властивості 5(1,3) означення 5 (пункт 1) та рівність (6) отримуємо:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{m})=\left\{\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}(\omega)\mid\omega\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})\right\}=\\
&=\left\{\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}\left(\langle!\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\langle!\,\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}\rangle\,\omega\right)\mid\omega\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})\right\}=\\
&\qquad=\left\{\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}\left(\langle!\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,\omega_1\right)\mid\omega_1\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\right\}=\\
&\qquad=\left\{\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega_1)\mid\omega_1\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\right\}=\\
&\qquad=\left\{\widetilde{Q}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_1)\right)\mid\omega_1\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\right\}=\\
&\qquad=\widetilde{Q}(\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l})).
\end{aligned}$$

Згідно з рівностями (5), враховуючи, що $\widetilde{Q}$ — бієкція між $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ та $\mathbb{M}k(\mathfrak{m})$, отримуємо:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{m})&=\mathbb{M}k(\mathfrak{m})\setminus\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{m})=\\
&=\widetilde{Q}(\mathbb{M}k(\mathfrak{l}))\setminus\widetilde{Q}(\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l}))=\\
&=\widetilde{Q}(\mathbb{M}k(\mathfrak{l})\setminus\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l}))=\widetilde{Q}(\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l})).
\end{aligned}$$

Звідси, оскільки $\widetilde{Q}$ — бієкція, випливає, що $\mathbf{card}\left(\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{m})\right)=\mathbf{card}\left(\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l})\right)$.

1.б) Нехай, $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ і $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_1)=\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_2)$. Тоді, згідно (6):

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega_1)&=\widetilde{Q}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_1)\right)=\\
&=\widetilde{Q}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_2)\right)=\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega_2).
\end{aligned}$$

Навпаки, якщо $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega_1)=\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega_2)$, то, згідно (6), $\widetilde{Q}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_1)\right)=\widetilde{Q}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_2)\right)$, а отже, оскільки $\widetilde{Q}$ — бієкція, $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_1)=\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_2)$.

2. Навпаки, нехай для систем відліку $\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ виконуються умови 1,2 даної теореми. Для $\mathrm{w}=\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\omega\in\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l})$, де $\omega\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ покладемо:

$$\widetilde{Q}_0(\mathrm{w}):=\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega). \tag{7}$$

З означення (5) траєкторії системи відліку та другої умови даної теореми випливає, що формула (7) коректним чином визначає відображення $\widetilde{Q}_0:\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l})\mapsto\mathbb{M}k(\mathfrak{m})$. Доведемо, що це відображення є бієкцією між $\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l})$ і $\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{m})$. Згідно з означенням 5 (пункт 1) та рівностями (5), для довільного $\mathrm{w}=\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\omega\in\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l})$ ($\omega\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$), отримуємо,

$$\begin{aligned}
\widetilde{Q}_0(\mathrm{w})&=\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega)=\\
&=\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}\left(\langle!\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,\omega\right)\in\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{m}).
\end{aligned} \tag{8}$$

Крім того, використовуючи властивості 5, для довільного $\mathrm{w}_1=\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}(\omega_1)\in\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{m})$ ($\omega_1\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})$) отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathrm{w}_1&=\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}(\omega_1)=\\
&=\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}\left(\langle!\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,\langle!\,\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}\rangle\,\omega_1\right)=\\
&=\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}\left(\langle!\,\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}\rangle\,\omega_1\right)=\\
&=\widetilde{Q}_0\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\langle!\,\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}\rangle\,\omega_1\right)\right),
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\text{де}\quad\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\langle!\,\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}\rangle\,\omega_1\right)\in\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l}).$$

Із співвідношень (8) та (9) випливає, що $\widetilde{Q}_0$ є відображенням з $\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l})$ на $\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{m})$. З другої

умови теореми випливає, що для довільних $\mathrm{w}, \mathrm{w}' \in \mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l})$ таких, що $\mathrm{w} \neq \mathrm{w}'$ виконується умова $\widetilde{Q}_0(\mathrm{w}) \neq \widetilde{Q}_0(\mathrm{w}')$. Отже, відображення $\widetilde{Q}_0$ є бієкцією між $\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l})$ та $\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{m})$.

За умовою теореми, множини $\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l})$ та $\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{m})$ — рівнопотужні. Тому, існує бієкція $\widetilde{Q}_1 : \overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l}) \mapsto \overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{m})$ між $\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l})$ і $\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{m})$. Враховуючи, що, за означенням загальної траєкторії системи відліку (5), $\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l}) \sqcup \overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l}) = \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ (де символ "$\sqcup$" означає диз'юнктне об'єднання), для $\omega \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ покладемо:

$$\widetilde{Q}(\mathrm{w}) := \begin{cases} \widetilde{Q}_0(\mathrm{w}), & \mathrm{w} \in \mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l}) \\ \widetilde{Q}_1(\mathrm{w}), & \mathrm{w} \in \overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l}). \end{cases} \tag{10}$$

Оскільки (згідно з доведеним вище) $\widetilde{Q}_0$ є бієкцією між $\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l})$ та $\mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{m})$, а $\widetilde{Q}_1$ — бієкцією між $\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l})$ та $\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{m})$, то $\widetilde{Q}$ є бієкцією між $\mathbb{M}k(\mathfrak{l}) = \mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{l}) \sqcup \overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l})$ та $\mathbb{M}k(\mathfrak{m}) = \mathbb{T}\mathbf{rj}(\mathfrak{m}) \sqcup \overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{m})$. Крім того, для довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$, за означенням відображень $\widetilde{Q}$ та $\widetilde{Q}_0$ отримуємо:

$$\widetilde{Q}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\omega\right) = \widetilde{Q}_0\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\omega\right) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega).$$

Отже, за означенням 5 (пункт 2), $\widetilde{Q}$ є універсальним перетворенням координат з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$.

Зауваження 6. *З доведення теореми 4 (рівність (10)) випливає, що у випадку, коли умови 1,2 цієї теореми виконуються, універсальне перетворення координат між системами відліку* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}$ *визначається неоднозначно. А саме, коли* $\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l})$ *та* $\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{m})$ *містять більше, ніж один елемент, існує більше, ніж одне універсальне перетворення координат з* $\mathfrak{l}$ *в* $\mathfrak{m}$, *оскільки існує більше, ніж одна бієкція* $\widetilde{Q}_1 : \overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l}) \mapsto \overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{m})$.

Наслідок 3. *Для довільної чітко видимої кінематичної множини* $\mathfrak{C}$ *наступні твердження рівносильні:*

1. $\mathfrak{C}$ *допускає універсальне перетворення координат.*
2. *Довільні системи відліку* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ *задовольняють умови 1,2 теореми 4.*
3. *Існує система відліку* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ *така, що для довільної системи відліку* $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ *виконуються мови 1,2 теореми 4.*
4. *Для довільних систем відліку* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ *виконуються наступні умови:*
   (a) $\mathbf{card}\left(\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{l})\right) = \mathbf{card}\left(\overline{\mathbb{T}\mathbf{rj}}(\mathfrak{m})\right)$;
   (b) *Для довільних* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ *з рівності* $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_1) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_2)$ *випливає рівність* $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega_1) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega_2)$.

Доведення.

Рівносильність перших трьох тверджень даного наслідку випливає з твердження 6 та теореми 4.

Отже, для того, щоб довести даний наслідок залишається довести, наприклад, рівносильність четвертого та другого тверджень. З другого твердження, очевидно, випливає четверте. Тому залишається довести обернену імплікацію.

Отже, нехай для чітко видимої кінематичної множини $\mathfrak{C}$ виконується твердження 4 даного наслідку. Розглянемо довільні системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$.

Якщо для елементарно-часових станів $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ виконується рівність $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_1) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_2)$, то $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega_1) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega_2)$, згідно з пунктом (b) четвертого твердження даного наслідку.

Навпаки, припустимо, що для $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ виконується рівність $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega_1) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega_2)$, тобто (за означенням 5) рівність $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}(\langle !\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,\omega_1) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}(\langle !\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,\omega_2)$. Тоді, оскільки пункт (b) четвертого твердження даного наслідку виконується для довільної пари систем відліку кінематичної множини $\mathfrak{C}$, отримуємо рівність, $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}\rangle}(\langle !\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,\omega_1) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}\rangle}(\langle !\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,\omega_2)$, тобто (за означенням 5) рівність $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\langle !\,\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}\rangle\,\langle !\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,\omega_1) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\langle !\,\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}\rangle\,\langle !\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,\omega_2)$. З останньої рівності з використанням властивостей 5 випливає бажана рівність $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_1) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega_2)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Valentina Baccetti, Kyle Tate, and Matt Visser.* Inertial frames without the relativity principle // Preprint: arXiv:1112.1466v3. – 2012.

2. *James M. Hill and Barry J. Cox.* Einstein's special relativity beyond the speed of light. // Proceedings of the Royal Society. – Published on-line, 3 October 2012 in advance of the print journal (doi:10.1098/rspa.2012.0340).

3. *Ricardo S. Vieira.* An Introduction to the Theory of Tachyons. – Preprint: arXiv:1112.4187v2. – 2012.

4. *E. Recami.* Classical Tachyons and Possible Applications. // Riv. Nuovo Cim. – **9**, s. 3, N 6. – 1986. – pp. 1-178.

5. *Grushka Ya.I.* Tachyon Generalization for Lorentz Transforms // Methods of Functional Analysis and Topology. – **20**, N 2. – 2013. – P. 127-145.

6. *Грушка Я.І.* Алгебраїчні властивості тахіонних перетворень Лоренца // Збірник праць Ін-ту математики НАНУ. – **10**, N 2. – 2013. – С. 138-169.

7. *Грушка Я.І.* Мінливі множини та їх властивості // Доповіді НАНУ. – 2012, N 5. – С. 12-18.

8. *Ya.I. Grushka.* Abstract concept of changeable set // Preprint arXiv:1207.3751v1. – 2012.

9. *Я.І. Грушка.* Видимість у мінливих множинах // Праці Ін-ту математики НАНУ. – **9**, N 2. – 2012. – С. 122-145.

10. *Я.І. Грушка* Мінливі множини та їх застосування для побудови кінематики тахіонів // Праці Ін-ту математики НАНУ. – **11**, N 1. – 2014. – С. 192-227.

11. *Я. І. Грушка.* Базові мінливі множини та математичне моделювання еволюції систем // Укр. мат. журн. – **65**, N 9. – 2013. – С. 1190-1210.

12. *Г. Биркгоф.* Теория решёток. – М.: Наука, 1984. – 567 с.

13. *Я. І. Грушка.* Еволюційні розширення та аналоги операції об'єднання для базових мінливих множин // Праці Ін-ту математики НАНУ. – **11**, N 2. – 2014.