УДК 517.956.4

©2014 р. Т.О. Заболотько, С.Д. Івасишен

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут"

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ДЕЯКИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЯКІ ВИНИКАЮТЬ У ТЕОРІЇ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Розглядаються інтегральні рівняння типу Вольтерри-Фредгольма другого роду з квазірегулярними ядрами. Такі рівняння виникають при побудові та дослідженні фундаментальних розв'язків деяких параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами. Для цих інтегральних рівнянь знаходяться резольвенти та одержуються їх оцінки. Оцінки є різними для випадків інтегральних рівнянь, що відповідають параболічним рівнянням другого та довільного порядків. У першому випадку резольвента оцінюється через експоненту зі сталим типом спадання на нескінченності, а в другому – через суму ряду, члени якого містять експоненти з типами спадання, що прямують до нуля.

Integral equations of Volterra-Fredholm type of the second kind with quasi-regular kernels are considered. Such equations arise in the process of construction and study fundamental solutions for some parabolic equations with increasing coefficients. Resolvents for these integral equations are found and estimates of ones are obtained. Estimates are different for the cases of integral equations according to parabolic equations of the second and arbitrary orders. In the first case the resolvent is estimated as exponent with constant type of decreasing at infinity. In the second case the resolvent's estimate have the form of a series the terms of which contain exponents with types of decreasing becoming vanishingly small.

Вступ

У теорії випадкових процесів, статистичній радіотехніці та ін. виникають параболічні рівняння зі зростаючими коефіцієнтами. Так, для нормальних марковських процесів рівняннями Фоккера – Планка – Колмогорова є параболічні рівняння другого порядку, в яких коефіцієнти при похідних першого порядку за просторовими змінними є лінійними функціями цих змінних, а інші коефіцієнти обмежені [1, с. 177–179]. Серед таких рівнянь, зокрема, є рівняння

$$\left(\partial_t - \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\partial_{x_j}\partial_{x_l} + \sum_{j=1}^{n} a_j\partial_{x_j} + a_0 + S_a\right)u = f, \qquad (1)$$

в якому $n \in \mathbb{N}$, a_{jl}, a_j і a_0 – дійсні сталі, матриця, складена з коефіцієнтів a_{jl}, додатно визначена, $S_a u := a\sum\limits_{j=1}^{n} \partial_{x_j}(x_j u)$ – диференціальний вираз (оператор) зі зростаючими на нескінченності коефіцієнтами, $a \in \mathbb{R}$.

Для рівняння (1) у статті [2] знайдено явну формулу для фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК) і досліджено його властивості, які застосовано до встановлення точних результатів про коректну розв'язність та інтегральне зображення розв'язків задачі Коші. У статті [3] для параболічного рівняння довільного порядку $2b$ вигляду

$$\left(\partial_t - \sum_{|k|\le 2b} a_k(t)\partial_x^k - S_a\right)u = f \qquad (2)$$

побудовано ФРЗК і дано його повне аналітичне описання. Указані результати для рівнянь (1) і (2) з $a \neq 0$ подібні до відповідних результатів для цих рівнянь у випадку $a = 0$, тобто коли відсутні члени зі зростаючими коефіцієнтами. Щоб одержати ці результати, треба було модифікувати методику, розроблену для параболічних рівнянь з обмеженими коефіцієнтами (див., наприклад, монографію [4]).

Побудова та дослідження ФРЗК для рівнянь (1) і (2) із залежними від усіх змінних коефіцієнтами потребує дальшого вдосконалення методів із [4]. Зокрема, це стосується методу параметриксу Леві, при застосуванні якого виникають інтегральні рівняння вольтеррівського типу. Питанню розв'язності та оцінок резольвент такого типу інтегральних рівнянь, породжених рівняннями (1) і (2), присвячена ця стаття.

Згідно з методом параметриксу Леві ФРЗК шукається у вигляді суми головного члена – параметрикса Z_0 і доданка у вигляді інтеграла з ядром Z_0 і невідомою густиною Q, яка визначається з відповідного інтегрального рівняння.

Маючи намір застосувати метод Леві до побудови та вивчення ФРЗК для рівнянь (1) і (2), коефіцієнти яких залежать від усіх змінних, мету даної статті формулюємо так: описати відповідні класи інтегральних рівнянь для густини Q, знайти для цих рівнянь резольвенти та одержати їх оцінки.

1. Позначення та допоміжні твердження

Користуватимемось такими позначеннями: a, b, n і T – задані числа, де b і n – натуральні, a і T – дійсні, причому $T > 0$; $m := 2b$, $m' := m/(m-1)$; $\Pi_H := H \times \mathbb{R}^n$, $H \subset [0,T]$; $X(t) := e^{at}x$, якщо $t \in \mathbb{R}$ і $x \in \mathbb{R}^n$;

$$q_m(t) := \begin{cases} \frac{1}{ma}\left(e^{mat}-1\right), a \neq 0, \\ t, \ a = 0, \end{cases} \quad t \geq 0; \quad (3)$$

$$\rho_m(t,x) := (q_m(t))^{-1/(m-1)}|x|^{m'},$$
$$E_c^{(m)}(t,x) := \exp\{-c\rho_m(t,x)\},$$
$$t > 0, x \in \mathbb{R}^n, c > 0. \quad (4)$$

Прототипом рівнянь (1) і (2) є модельне рівняння

$$\left(\partial_t - \gamma^2 \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 - S_a\right) u = f, \ \gamma > 0. \quad (5)$$

У працях [2, 3] встановлено, що ФРЗК для рівняння (5) має вигляд

$$G_2(t,x,\xi) = \left(4\pi\gamma^2 q_2(t)\right)^{-n/2} e^{nat} \times$$
$$\times E^{(2)}_{1/(4\gamma^2)}\left(t, X(t)-\xi\right),$$
$$t > 0, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (6)$$

а ФРЗК для рівняння (2) володіє оцінкою

$$|G_{2b}(t,x;\tau,\xi)| \leq C(q_{2b}(t-\tau))^{-n/(2b)} e^{na(t-\tau)} \times$$
$$\times E_c^{(2b)}(t-\tau, X(t-\tau)-\xi),$$
$$0 \leq \tau < t \leq T, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Зауважимо, що серед властивостей функції G_2 є формула згортки

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_2(t-\beta,x,y) G_2(\beta-\tau,y,\xi) dy =$$
$$= G_2(t-\tau,x,\xi), \ \tau < \beta < t, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (7)$$

Наведемо потрібні нам властивості функцій (3) і (4).

Лема 1. *Правильні такі твердження: для* $a < 0$

$$q_m(t-\tau) \leq q_m(t-\beta) + q_m(\beta-\tau) \leq 2q_m(t-\tau),$$
$$\tau \leq \beta \leq t < \infty, \quad (8)$$

а якщо $a > 0$, *то для будь-якого* $T > 0$ *існує така стала* $c_T > 0$, *що*

$$c_T q_m(t-\tau) \leq q_m(t-\beta) + q_m(\beta-\tau) \leq q_m(t-\tau),$$
$$0 \leq \tau \leq \beta \leq t \leq T. \quad (9)$$

Доведення. При фіксованих $\tau < t$ розглянемо функцію $p(\beta) := q_m(t-\beta) + q_m(\beta-\tau)$, $\beta \in [\tau,t]$. Оскільки $p(\tau) = p(t) = q(t-\tau)$, $p'(\beta) = 0$ при $\beta = \beta_0 := (t+\tau)/2$, $p''(\beta_0) > 0$ при $a > 0$ і $p''(\beta_0) < 0$ при $a < 0$, то для будь-якого $\beta \in [\tau,t]$ маємо

$$q_m(t-\tau) \leq p(\beta) \leq p(\beta_0), \ a < 0;$$
$$p(\beta_0) \leq p(\beta) \leq q_m(t-\tau), \ a > 0. \quad (10)$$

Враховуючи те, що $p(\beta_0) = 2q_m\left((t-\tau)/2\right)$ і функція q_m монотонно зростає, у випадку $a < 0$ одержуємо $p(\beta_0) \leq 2q_m(t-\tau)$, звідки на підставі (10) випливають оцінки (8). Якщо $a > 0$, то $p(\beta_0)$ треба оцінити знизу, тобто оцінити знизу $q_m\left((t-\tau)/2\right)$ через $q_m(t-\tau)$. Для цього розглянемо функцію $r(s) := q_m(s/2)/q_m(s)$, $s > 0$. Оскільки $r(s) \to 1/2$ при $s \to 0$, $r(s) \to 0$ при $s \to \infty$ і $r'(s) < 0$, $s > 0$, при $a > 0$, то функція r спадає від $1/2$ до 0, якщо її аргумент змінюється від 0 до ∞. Тому для заданого $T > 0$ існує стала $c_T > 0$ така, що $r(s) \geq c_T/2$, $s \in [0, T]$. Звідси випливає нерівність $q_m((t-\tau)/2) \geq (c_T/2)q_m(t-\tau)$, якщо $0 \leq t-\tau \leq T$, з якої за допомогою (10) одержуємо оцінки (9). $\triangleright$

Лема 2. *Для довільних $0 \leq \tau < \beta < t \leq T$ і $\{x, y, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$ справджується нерівність*

$$A_0 := \rho_m(t-\beta, X(t-\beta) - y) +$$
$$+\rho_m(\beta - \tau, Y(\beta-\tau) - \xi) \geq$$
$$\geq \delta_0 \rho_m(t-\tau, X(t-\tau) - \xi), \qquad (11)$$

де $\delta_0 \in (0, 1]$ – стала, яка залежить лише від m, a і T, причому $\delta_0 = 1$ тільки при $a = 0$.

Доведення. Спочатку доведемо таку нерівність:

$$A_1 := \rho_m(t-\beta, u-z) + \rho_m(\beta-\tau, z-\xi) \geq$$
$$\geq \delta_1 \rho_m(t-\tau, u-\xi),$$
$$\tau < \beta < t, \ \{u, z, \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \qquad (12)$$

Нехай τ, t, u і ξ довільно фіксовані і нехай $r := |u-z|$, $s := |u-\xi|$. Використовуючи те, що $m' > 1$ і $|z-\xi| \geq |s-r|$, $z \in \mathbb{R}^n$, маємо

$$A_1 \geq \left[(q_m(t-\beta))^{-1/m} r\right]^{m'} +$$
$$+\left[(q_m(\beta-\tau))^{-1/m} |s-r|\right]^{m'} =: f_\beta(r).$$

Доведемо, що для довільних $\beta \in (\tau, t)$ і $r \geq 0$ справджується оцінка

$$f_\beta(r) \geq \delta_1 g_\tau(s), g_\tau(s) :=$$
$$:= \left[(q_m(t-\tau))^{-1/m} s\right]^{m'}. \qquad (13)$$

Якщо $r \geq s$, то для $\beta \in (\tau, t)$

$$f_\beta(r) \geq g_\beta(s) \geq g_\tau(s). \qquad (14)$$

Знайдемо $\min\limits_{r \in [0,s]} f_\beta(r)$. Легко переконуємось, що єдиною стаціонарною точкою функції f_β на проміжку $(0, s)$ є точка $r = r_0 := q_m(t-\beta)(q_m(t-\beta) + q_m(\beta-\tau))^{-1} s$ і що $f_\beta(r_0) = \left[(q_m(t-\beta) + q_m(\beta-\tau))^{-1/m} s\right]^{m'}$. Оскільки за допомогою правих нерівностей з (8) і (9) $f_\beta(r_0) \geq \delta_1 g_\tau(s)$, де

$$\delta_1 := \begin{cases} 1, \ a \geq 0, \\ 2^{-1/(m-1)}, \ a < 0, \end{cases}$$

і $\quad f_\beta(0) = \left[(q_m(\beta-\tau))^{-1/m} s\right]^{m'} \geq g_\tau(s),$

$$f_\beta(s) = \left[(q_m(t-\beta))^{-1/m} s\right]^{m'} \geq g_\tau(s),$$

то $\min\limits_{r \in [0,s]} f_\beta(r) \geq \delta_1 g_\tau(s)$. Звідси та з (14) випливає (13) і, отже, (12).

Щоб отримати нерівність (11), запишемо рівність $X(t-\beta) - y = e^{-a(\beta-\tau)} \times (X(t-\tau) - Y(\beta-\tau))$ і скористаємось нерівністю (12) для $u = X(t-\tau)$, $z = Y(\beta-\tau)$. Тоді, врахувавши, що

$$e^{-a(\beta-\tau)} \geq \delta_2 := \begin{cases} e^{-aT}, \ a \geq 0, \\ 1, \ a < 0, \end{cases}$$

дістанемо $A_0 = e^{-a(\beta-\tau)} A_1 \geq \delta_2 A_1 \geq \delta_0 \rho_m(t-\tau, X(t-\tau) - \xi)$, де $\delta_0 := \delta_1 \delta_2$.$\triangleright$

Лема 3. *Для будь-яких додатних чисел ν і μ справджуються оцінки*

$$I_{\nu\mu}(t, \tau) := \int\limits_\tau^t (q_m(t-\beta))^{\nu-1} \times$$
$$\times (q_m(\beta-\tau))^{\mu-1} d\beta \leq A_\nu(t-\tau) \mathrm{B}(\nu, \mu) \times$$
$$\times (q_m(t-\tau))^{\nu+\mu-1} \leq e^{m|a|\nu T} \mathrm{B}(\nu, \mu) \times$$
$$\times (q_m(t-\tau))^{\nu+\mu-1}, \ 0 \leq \tau < t \leq T, \qquad (15)$$

де $A_\nu(t) := \begin{cases} 1, \ a \geq 0, \\ e^{m|a|\nu t}, \ a < 0, \end{cases}$ B *– бета-функція Ейлера.*

Доведення. В інтегралі з (15) зробимо заміну змінної інтегрування β за формулою $q_m(\beta-\tau) = q_m(t-\tau)\gamma$, у результаті якої $e^{ma(\beta-\tau)} q_m(t-\beta) = q_m(t-\tau)(1-\gamma)$, $e^{ma(\beta-\tau)} d\beta = q_m(t-\tau) d\gamma$ і $I_{\nu\mu}(t, \tau) \leq \max\limits_{\beta \in [\tau, t]} e^{-ma\nu(\beta-\tau)} (q_m(t-\tau))^{\nu+\mu-1} \times$

$$\times \int\limits_0^1 (1-\gamma)^{\nu-1} \gamma^{\mu-1} d\gamma = A_\nu(t-\tau) \mathrm{B}(\nu, \mu) \times$$

$\times (q_m(t-\tau))^{\nu+\mu-1} \leq e^{m|a|\nu T}\mathrm{B}(\nu,\mu)\times$ $\times(q_m(t-\tau))^{\nu+\mu-1}$. ▷

Лема 4. *Нехай $c>0$ – деяка стала, $\delta_0\in(0,1)$ – стала з оцінки (11) і*

$$J_c^{(m)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c^{(m)}(t-\beta, X(t-\beta)-y)\times$$

$$\times E_c^{(m)}(\beta-\tau, Y(\beta-\tau)-\xi)\times$$

$$\times(q_m(t-\beta)\,q_m(\beta-\tau))^{-n/m}dy. \tag{16}$$

Для довільно взятих $\varepsilon\in(0,1)$ і $T>0$ існує така стала $C_{\varepsilon T}>0$, що виконується нерівність

$$J_c^{(m)} \leq C_{\varepsilon T}(q_m(t-\tau))^{-n/m}\times$$

$$\times E^{(m)}_{c(1-\varepsilon)\delta_0}(t-\tau, X(t-\tau)-\xi),$$

$$0\leq\tau<\beta<t\leq T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{17}$$

Доведення. Записуючи c у вигляді $c = c(1-\varepsilon)+c\varepsilon$ і використовуючи нерівність (11), отримуємо

$$J_c^{(m)} \leq E^{(m)}_{c(1-\varepsilon)\delta_0}(t-\tau, X(t-\tau)-\xi)\times$$

$$\times J^{(m)}_{c\varepsilon}. \tag{18}$$

Оцінимо $J^{(m)}_{c\varepsilon}$. Для цього розглянемо можливі випадки 1) $q_m(\beta-\tau)\leq q_m(t-\tau)/2$ і 2) $q_m(t-\tau)/2<q_m(\beta-\tau)\leq q_m(t-\tau)$.

У випадку 1) маємо

$$q_m(t-\beta) = e^{-ma(\beta-\tau)}(q_m(t-\tau)-$$

$$-q_m(\beta-\tau)) \geq e^{-ma(\beta-\tau)}q_m(t-\tau)/2 \geq$$

$$\geq \left(e^{-m|a|T}/2\right)q_m(t-\tau),$$

і, отже,

$$J^{(m)}_{c\varepsilon} \leq 2^{n/m}e^{n|a|T}(q_m(t-\tau))^{-n/m}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n} E^{(m)}_{c\varepsilon}(\beta-\tau, Y(\beta-\tau)-\xi)\times$$

$$\times(q_m(\beta-\tau))^{-n/m}dy.$$

Якщо в останньому інтегралі зробити заміну $e^{a(\beta-\tau)}y-\xi = (q_m(\beta-\tau))^{1/m}z$, де z – нова змінна інтегрування, то дістанемо оцінку

$$J^{(m)}_{c\varepsilon} \leq C'_{\varepsilon T}(q_m(t-\tau))^{-n/m}. \tag{19}$$

У випадку 2) одержуємо

$$J^{(m)}_{c\varepsilon} \leq 2^{n/m}(q_m(t-\tau))^{-n/m}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n} E^{(m)}_{c\varepsilon}(t-\beta, X(t-\beta)-y)\times$$

$$\times(q_m(t-\beta))^{-n/m}dy$$

і заміна $X(t-\beta)-y = (q_m(t-\beta))^{1/m}z$ в останньому інтегралі приводить до оцінки

$$J^{(m)}_{c\varepsilon} \leq C''_{\varepsilon}(q_m(t-\tau))^{-n/m}. \tag{20}$$

З нерівностей (18) – (20) випливає оцінка (17).▷

Лема 5. *Якщо $m=2$, то для інтеграла (16) справджується рівність*

$$J_c^{(2)} = \left(\frac{c}{\pi}\right)^{n/2}(q_2(t-\tau))^{-n/2}\times$$

$$\times E_c^{(2)}(t-\tau, X(t-\tau)-\xi),$$

$$\tau<\beta<t,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{21}$$

Доведення. Згідно з формулою (6) функція $\left(\frac{c}{\pi}\right)^{n/2}(q_2(t))^{-n/2}e^{nat}E_c^{(2)}(t,X(t)-\xi)$, $t>0$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, є ФРЗК для рівняння (5) з $\gamma^2 = 1/(4c)$. Застосувавши для нього формулу (7), отримаємо рівність (21). ▷

2. Основні результати

Нехай t_0 і T – задані числа, причому $0\leq t_0<T$, і $P^\delta_{[t_0,T]} := \Big\{(t,x;\tau,\xi)\in \left(\Pi_{[t_0,T]}\times\Pi_{[t_0,T]}\right) \mid t-\tau>\delta\Big\}$, $\delta\geq 0$. При побудові ФРЗК для рівнянь (1) і (2) з коефіцієнтами, залежними від усіх змінних, виникають інтегральні рівняння вольтеррівсько-фредгольмового типу вигляду

$$u(t,x) = f(t,x) + \int\limits_{t_0}^{t}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(t,x;\tau,\xi)\times$$

$$\times u(\tau,\xi)\,d\xi,\ (t,x)\in\Pi_{[t_0,T]}, \tag{22}$$

ядра K яких визначені в області $P^0_{[t_0,T]}$ і є квазірегулярними. Якраз невідома густина

Q із методу Леві є резольвентою R рівняння (22), яка є сумою ряду

$$R\left(t,x;\tau,\xi\right):=\sum_{s=1}^{\infty}K_s\left(t,x;\tau,\xi\right),$$
$$\left(t,x;\tau,\xi\right)\in P^0_{[t_0,T]},\qquad(23)$$

де $K_1:=K$, а K_s, $s>1$, – повторні ядра, що визначаються із рекурентного співвідношення

$$K_s\left(t,x;\tau,\xi\right)=\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}K\left(t,x;\beta,y\right)\times$$
$$\times K_{s-1}\left(\beta,y;\tau,\xi\right)dy,\ \left(t,x;\tau,\xi\right)\in P^0_{[t_0,T]}.$$

Основні результати статті містяться в наступній теоремі.

Теорема 1. *Якщо ядро K інтегрального рівняння (22) в області $P^0_{[t_0,T]}$ неперервне та задовольняє умову*

$$\left|K\left(t,x;\tau,\xi\right)\right|\le C_0(q_m\left(t-\tau\right))^{-n/m+\chi-1}\times$$
$$\times E^{(m)}_{c_0}\left(t-\tau,X\left(t-\tau\right)-\xi\right),$$
$$\left(t,x;\tau,\xi\right)\in P^0_{[t_0,T]},\qquad(24)$$

з деякими сталими $C_0>0$, $c_0>0$ і $\chi\in(0,1)$, то існує резольвента (23), яка є неперервною функцією і для якої справджується оцінка

$$\left|R\left(t,x;\tau,\xi\right)\right|\le C(q_m\left(t-\tau\right))^{-n/m+\chi-1}\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{\infty}\left[C_1\Gamma\left(\chi\right)\left(q_m\left(t-\tau\right)\right)^{\chi}\right]^j(\Gamma\left(j\chi+1\right))^{-1}\times$$
$$\times E^{(m)}_{c\delta_0^j}\left(t-\tau,X\left(t-\tau\right)-\xi\right),$$
$$\left(t,x;\tau,\xi\right)\in P^0_{[t_0,T]}.\qquad(25)$$

Тут C, C_1 і c – деякі додатні сталі, $c<c_0$, Γ – гамма-функція Ейлера, δ_0 – стала з леми 2.

Теорема 2. *Нехай для ядра K виконуються умови теореми 1 з $m=2$, тоді для резольвенти R справджується оцінка*

$$\left|R\left(t,x;\tau,\xi\right)\right|\le C(q_2\left(t-\tau\right))^{-n/2+\chi-1}\times$$
$$\times E^{(2)}_{c_0}\left(t-\tau,X\left(t-\tau\right)-\xi\right),$$
$$\left(t,x;\tau,\xi\right)\in P^0_{[t_0,T]},\qquad(26)$$

де C – деяка додатна стала, а стала c_0 така сама, як у (24).

Доведення теорем 1 і 2 проводиться за схемою доведень лем 1.8 – 1.10 з [4], при цьому використовуються наведені вище леми 1 – 5. Ці леми відображають зміни в проведених у [4] міркуваннях, викликані наявністю у рівняннях (1) і (2) члена $S_a u$. Умови на ядро K у теоремах 1 і 2 забезпечують абсолютну та рівномірну збіжність ряду (23) в $P^{\delta}_{[t_0,T]}$ для довільного $\delta\in(0,T-t_0)$.

3. Висновки

Проведені в статті дослідження свідчать про те, що за наявності в рівняннях членів зі зростаючими коефіцієнтами результати істотно різні для рівнянь вищого і другого порядків, чого не спостерігається у випадку рівнянь з обмеженими коефіцієнтами. Результати статті будуть використані для побудови та дослідження ФРЗК для параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Тихонов В.И.* Марковские процессы / В.И. Тихонов, М.А. Миронов. – М.:Сов.радио, 1977. – 488 с.

2. *Заболотько Т.О.* Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами та деякі його застосування / Т.О. Заболотько, С.Д. Івасишен, Г.С. Пасічник // Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича. Сер.: математика: зб. наук. пр. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2012. – Т. 2, № 2–3. – С. 81 – 89.

3. *Заболотько Т.О.* Повне аналітичне описання фундаментального розв'язку одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами / Т.О. Заболотько, С.Д. Івасишен // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер.: фіз.-мат. науки: зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський, 2014. – Вип. 10. – С. 88 – 98.

4. *S.D. Eidelman.* Analitic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Kochubei. – Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – Vol. 152. – 390 p.