УДК 517.9

©2014 р. І.І. Клевчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ІНТЕГРАЛЬНІ МНОГОВИДИ ТА РОЗЩЕПЛЕННЯ ЛІНІЙНИХ ІМПУЛЬСНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Розглядається система лінійних імпульсних сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь. Доведено існування інтегральних многовидів. Показано, що вихідну систему за допомогою лінійної заміни можна розщепити на дві незалежні підсистеми.

We consider a system of linear impulsive singularly perturbed functional differential equations. We prove the existence of integral manifolds. It is shown that the initial system can be decomposed into two independent systems by linear substitution.

Для диференціальних рівнянь з імпульсною дією питання існування і стійкості інтегральних множин у критичному випадку розглядалися в працях [1, 2], а для імпульсних диференціально-функціональних рівнянь – в [3]. У цій статті результати, одержані в [4, 5], узагальнюються на випадок лінійних імпульсних сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь.

Розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + F(t, y_t),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = D(t)x(t) + G(t, y_t), \quad t \neq t_i,$$

$$\Delta x|_{t=t_i} = B_i x + \varepsilon H_i(y_{t_i}), \tag{1}$$

$$\Delta y|_{t=t_i} = C_i x + N_i(y_{t_i}),$$

де ε – малий додатний параметр; x – m-вимірний вектор, y – p-вимірний вектор, y_t – елемент простору $\mathbb{PC} = \mathbb{PC}[-\varepsilon\tau, 0]$, заданий функцією $y_t(\theta) = y(t+\theta)$, $-\varepsilon\tau \leq \theta \leq 0$; $\mathbb{PC}[-\varepsilon\tau, 0]$ – простір функцій $\varphi(t)$, неперервних на відрізку $[-\varepsilon\tau, 0]$ за винятком скінченного числа точок розриву першого роду, в яких $\varphi(t)$ неперервна зліва; $F(t,\varphi)$, $G(t,\varphi)$, $H_i(\varphi)$, $N_i(\varphi)$ – лінійні відносно φ оператори; матриці $A(t)$, $D(t)$ і оператори $F(t,\varphi)$, $G(t,\varphi)$ неперервні відносно t; матриці $E+B_i$ невироджені; через t_i , $i \in \mathbb{Z}$, позначено моменти імпульсної дії.

Припустимо, що виконуються умови:

1) існує додатне число δ, при якому $0 < \delta < t_{i+1} - t_i$, $i \in \mathbb{Z}$;

2) норми матриць $A(t)$, $D(t)$, C_i, $(E+B_i)^{-1}$ та операторів $F(t,\varphi)$, $G(t,\varphi)$, $H_i(\varphi)$, $N_i(\varphi)$ рівномірно обмежені при $t \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}$ деякою додатною сталою $M > 1$;

3) для оператора $T(t,s)$ зсуву за розв'язками системи

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = G(t, y_t), t \neq t_i, \Delta y|_{t=t_i} = N_i(y_{t_i})$$

виконуються нерівності

$$|T(t,s)\varphi| \leq K|\varphi| \exp\Big[-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)\Big],$$

$$|T(t,s)X_0| \leq K \exp\Big[-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)\Big],$$

де $K > 0$, $t \geq s$, $\alpha > 0$, $\varphi \in \mathbb{PC}$.

Система (1) еквівалентна системі

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + F(t, y_t), t \neq t_i, \Delta x|_{t=t_i} =$$

$$= B_i x + \varepsilon H_i(y_{t_i}), \quad y_t = T(t,\sigma)y_\sigma +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\sigma^t T(t,s)X_0 D(s)x(s)dx + \tag{2}$$

$$+\sum_{\sigma<t_i<t} T(t,t_i)X_0 C_i x(t_i),$$

де $X_0(\theta) = 0$, $-\varepsilon\tau \leq \theta < 0$, $X_0(0) = E$.

Теорема 1. *Нехай відносно системи (1) виконуються умови 1 – 3. Тоді можна вказати таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ існує інтегральний многовид системи (2), який можна зобразити у вигляді $y_t = P(t,\varepsilon)x$, де*

$P(t,\varepsilon)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{PC}$ – рівномірно обмежений при $t \in \mathbb{R}$ оператор.

Доведення.

Розглянемо систему рівнянь

$$x(t) = L(t,\sigma) - \int\limits_t^\sigma L(t,s)F(s,y_s)ds-$$

$$-\varepsilon \sum_{t<t_i<\sigma} L(t,t_i)H_i(y_{t_i}),$$

$$y_t = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^t T(t,s)X_0D(s)x(s)ds+ \qquad (3)$$

$$+\sum_{-\infty<t_i<t} T(t,t_i)X_0C_ix(t_i),$$

де $L(t,s)$ – фундаментальна матриця системи $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x$, $t \neq t_i$, $\Delta x|_{t=t_i} = B_ix$.

Існування розв'язку системи (3) доведемо за допомогою методу послідовних наближень

$$y_t^{(0)} = 0, \quad x_n(t) = L(t,\sigma) - \int\limits_t^\sigma L(t,s)\times$$

$$\times F(s,y_s^{(n)})ds - \varepsilon \sum_{t<t_i<\sigma} L(t,t_i)H_i(y_{t_i}^{(n)}),$$

$$y_t^{(n+1)} = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^t T(t,s)X_0D(s)x_n(s)ds+$$

$$+\sum_{-\infty<t_i<t} T(t,t_i)X_0C_ix_n(t_i), \quad n = 0,1,\ldots.$$

Справджується нерівність

$$|L(t,s)| \leq \exp[\gamma(s-t)], \gamma = M + \frac{\ln M}{\delta}, t \leq s.$$

Доведемо, що правильна оцінка

$$|y_t^{(q)} - y_t^{(q-1)}| \leq \frac{K_1}{2^q}\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon\gamma}{2\varepsilon}(\sigma-t)\right], \quad (4)$$

де

$$q = 1,2,\ldots, \quad K_1 = \frac{4KM}{\alpha} + \frac{2KM}{1-\exp(-\gamma\delta)},$$

$$\varepsilon < \min\left(\frac{\alpha}{2\gamma}, \frac{1}{2KM^2\left(\frac{4}{\alpha} + \frac{1}{1-\exp(-\gamma\delta/2)}\right)}\right).$$

При $q = 1$ нерівність (4) правильна.

Нехай нерівність (4) правильна при $q = n$. Тоді одержимо

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq \Big(\frac{4\varepsilon MK_1}{\alpha 2^n}+$$

$$+\frac{\varepsilon MK_1}{2^n(1-\exp(-\gamma\delta/2))}\Big)\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon\gamma}{2\varepsilon}(\sigma-t)\right].$$

Звідси знаходимо

$$|y_t^{(n+1)} - y_t^{(n)}| \leq \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^t K\exp\left[\frac{\alpha}{\varepsilon}(s-t)\right]M\times$$

$$\times|x_n(s) - x_{n-1}(s)|ds + \sum_{-\infty<t_i<t} K\exp\Big[\frac{\alpha}{\varepsilon}(t_i-$$

$$-t)\Big]M|x_n(t_i) - x_{n-1}(t_i)| \leq \frac{\varepsilon KK_1M^2}{2^n}\Big(\frac{4}{\alpha}+$$

$$+\frac{1}{1-\exp(-\gamma\delta/2)}\Big)^2\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon\gamma}{2\varepsilon}(\sigma-t)\right] \leq$$

$$\leq \frac{K_1}{2^{n+1}}\exp\left[\frac{\alpha+\varepsilon\gamma}{2\varepsilon}(\sigma-t)\right].$$

Із правильності нерівності (4) при $q = n$ випливає її виконання при $q = n+1$. Отже, нерівність справджується при всіх натуральних q. Із (4) випливає, що послідовність $(x_n(t), y_t^{(n)})$ збігається до деякої функції $(x(t), y_t)$, яка є розв'язком системи (3).

Вважаючи в (3) $t = \sigma$, одержуємо зображення інтегрального многовиду

$$P(\sigma,\varepsilon) = y_\sigma = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^\sigma T(\sigma,s)X_0D(s)x(s)ds+$$

$$+\sum_{-\infty<t_i<\sigma} T(\sigma,t_i)X_0C_ix(t_i).$$

Якщо просумувати нерівності (4) по всіх q і вважати $t = \sigma$, то одержимо рівномірну оцінку $|P(\sigma,\varepsilon)| \leq K_1$. Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай відносно системи (1) виконуються умови 1 – 3. Тоді можна вказати таке $\varepsilon_1 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ існує інтегральний многовид системи (2), який можна зобразити у вигляді $x = Q(t,y_t,\varepsilon)$, де $Q(t,\varphi,\varepsilon)$ – лінійний відносно φ оператор. Справджується оцінка $|Q(t,\varphi,\varepsilon)| \leq \varepsilon K_1|\varphi|$, $K_1 > 0$.*

Доведення. Розглянемо систему рівнянь

$$x(t) = -\int_t^\infty L(t,s)F(s,y_s)ds - \varepsilon \sum_{t<t_i<\infty} L(t,t_i)\times$$

$$\times H_i(y_{t_i}), y_t = T(t,\sigma)\varphi + \frac{1}{\varepsilon}\int_\sigma^t T(t,s)X_0\times \quad (5)$$

$$\times D(s)x(s)ds + \sum_{\sigma<t_i<t} T(t,t_i)X_0C_ix(t_i).$$

Існування розв'язку системи (5) доведемо за допомогою методу послідовних наближень

$$x_0(t) = 0, x_{n+1}(t) = -\int_t^\infty L(t,s)F(s,y_s^{(n)})ds -$$

$$-\varepsilon \sum_{t<t_i<\infty} L(t,t_i)H_i(y_{t_i}^{(n)}), \quad y_t^{(n)} =$$

$$= T(t,\sigma)\varphi + \frac{1}{\varepsilon}\int_\sigma^t T(t,s)X_0D(s)x_n(s)ds +$$

$$+ \sum_{\sigma<t_i<t} T(t,t_i)X_0C_ix_n(t_i).$$

Доведемо, що справджується оцінка

$$|x_q(t) - x_{q-1}(t)| \leq \frac{\varepsilon K_1|\varphi|}{2^q}\exp\Big[\frac{\alpha+\varepsilon\gamma}{2\varepsilon}(\sigma - t)\Big], \quad (6)$$

де

$$q = 1,2,\dots, \quad K_1 = \frac{4KM}{\alpha} + \frac{2KM}{1-\exp(-\gamma\delta)},$$

$$\varepsilon < \min\Big(\frac{\alpha}{2\gamma}, \frac{1}{2KM^2\Big(\frac{4}{\alpha}+\frac{1}{1-\exp(-\gamma\delta/2)}\Big)}\Big).$$

При $q=1$ нерівність (6) правильна.

Нехай нерівність (6) правильна при $q = n$. Тоді одержимо

$$|y_t^{(n)} - y_t^{(n-1)}| \leq \Big(\frac{4\varepsilon KMK_1|\varphi|}{\alpha 2^n} +$$

$$+ \frac{\varepsilon KMK_1|\varphi|}{2^n(1-\exp(-\gamma\delta/2))}\Big)\exp\Big[\frac{\alpha+\varepsilon\gamma}{2\varepsilon}(\sigma - t)\Big].$$

Звідси знаходимо

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq \int_t^\infty \exp[\gamma(s-t)]M|y_s^{(n)} -$$

$$-y_s^{(n-1)}|ds + \varepsilon\sum_{t<t_i<\infty}\exp[\gamma(t_i - t)]M|y_{t_i}^{(n)} -$$

$$-y_{t_i}^{(n-1)}| \leq \frac{\varepsilon^2KM^2K_1|\varphi|}{2^n}\Big(\frac{4}{\varepsilon} +$$

$$+\frac{1}{1-\exp(-\gamma\delta/2)}\Big)^2\exp\Big[\frac{\alpha+\varepsilon\gamma}{2\varepsilon}(\sigma - t)\Big] \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon K_1|\varphi|}{2^{n+1}}\exp\Big[\frac{\alpha+\varepsilon\gamma}{2\varepsilon}(\sigma - t)\Big].$$

Нерівність (6) правильна при $q = n+1$, отже, вона правильна при всіх натуральних q. Із (6) випливає, що послідовність $(x_n(t), y_t^{(n)})$ рівномірно збігається до функції $(x(t), y_t)$, яка є розв'язком системи (5).

Вважаючи в (5) $t = \sigma$, одержуємо зображення інтегрального многовиду

$$Q(\sigma,\varphi,\varepsilon) = x(\sigma) = -\int_\sigma^\infty L(\sigma,s)F(s,y_s)ds -$$

$$-\varepsilon\sum_{\sigma<t_i<\infty} L(\sigma,t_i)H_i(y_{t_i}).$$

Додаючи нерівності (6) і вважаючи $t = \sigma$, знаходимо $|Q(\sigma,\varphi,\varepsilon)| \leq \varepsilon K_1|\varphi|$. Теорему 2 доведено.

Розглянемо систему

$$\frac{dv}{dt} = A(t)v + F(t, P(t,\varepsilon)v), \quad t \neq t_i,$$

$$\Delta v|_{t=t_i} = B_iv + \varepsilon H_i(P(t_i,\varepsilon)v),$$

$$w_i = T(t,\sigma)w_\sigma + \frac{1}{\varepsilon}\int_\sigma^t T(t,s)X_0D(s)\times \quad (7)$$

$$\times Q(s,w_s,\varepsilon)ds + \sum_{\sigma<t_i<t} T(t,t_i)X_0C_iQ(t_i,w_{t_i},\varepsilon).$$

Функції $Q(t,w_t,\varepsilon)$, $P(t,\varepsilon)v$ задовольняють рівняння

$$\frac{dQ(t,w_t,\varepsilon)v}{dt} = A(t)Q(t,w_t,\varepsilon)v + F(t,w_t),$$

$$t \neq t_i, \quad \Delta Q(t,w_t,\varepsilon)|_{t=t_i} = B_iQ(t_i,w_{t_i},\varepsilon) +$$

$$+\varepsilon H_i(w_{t_i}), P(t,\varepsilon)v(t) = T(t,\sigma)P(\sigma,\varepsilon)v(\sigma)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\sigma}^{t} T(t,s)X_0 D(s)v(s)ds+ \qquad (8)$$

$$+\sum_{\sigma<t_i<t} T(t,t_i)X_0 C_i v(t_i).$$

В результаті заміни

$$x = v + Q(t, w_t, \varepsilon), \quad y_t = w_t + P(t,\varepsilon)v \quad (9)$$

і додавання рівностей (7), (8) одержимо систему (2).

Отже, правильне таке твердження.

Теорема 3. *За допомогою заміни* (9) *система* (7) *зводиться до вигляду* (2).

При досить малому ε систему (9) можна розв'язати відносно v та w_t і визначити заміну, яка розщеплює систему (2) на дві незалежні підсистеми (7).

Оцінимо розв'язок останнього рівняння системи (7), використовуючи метод послідовних наближень

$$w_t^{(0)} = 0, \quad w_t^{(n+1)} = T(t,\sigma)\varphi+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\sigma}^{t} T(t,s)X_0 D(s)Q(s, w_s^{(n)}, \varepsilon)ds+$$

$$+\sum_{\sigma<t_i<t} T(t,t_i)X_0 C_i Q(t_i, w_{t_i}^{(n)}, \varepsilon),$$

де $\varphi = w_\sigma$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Індукцією можна довести, що правильна нерівність

$$|w_t^{(n+1)} - w_t^{(n)}| \le \frac{K|\varphi|}{2^n} \exp\left[\left(\frac{\alpha}{\varepsilon} - \chi\right)(\sigma - t)\right], \quad (10)$$

де

$$t \ge \sigma, \quad \chi = 2MKK_1,$$

$$\varepsilon < \min\left(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \frac{1-\exp(-\chi\delta)}{4MKK_1}\right).$$

Якщо просумувати нерівності (10) за n, то одержимо оцінку

$$|w(t)| \le 2K|\varphi| \exp\left[\left(\frac{\alpha}{\varepsilon} - \chi\right)(\sigma - t)\right].$$

Тому стійкість нульового розв'язку системи (1) при $\varepsilon < \alpha/\chi$ рівносильна стійкості нульового розв'язку імпульсної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dv}{dt} = A(t)v + F(t, P(t,\varepsilon)v), \quad t \ne t_i,$$

$$\Delta v|_{t=t_i} = B_i v + \varepsilon H_i(P(t_i,\varepsilon)v).$$

Зауваження. Умова 3 накладає обмеження на корені характеристичного рівняння, що відповідає системі $\varepsilon\dfrac{dy}{dt} = G(t, y_t)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища шк., 1987. – 287 с.

2. *Черникова О.С.* Принцип сведения для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 5. – С. 601 – 607.

3. *Клевчук І.І.* Інтегральні многовиди та принцип зведення для імпульсних диференціально-функціональних рівнянь // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 134. Математика. – Чернівці: Рута, 2002. – С. 52 – 56.

4. *Фодчук В.И., Клевчук И.И.* Расщепление линейных дифференциально-функциональных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1986. – № 8. – С. 23 – 26.

5. *Клевчук И.И.* Расщепление линейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа // Нелінійні коливання. – 1999. – **2**, № 4. – С. 490 – 500.