УДК 512.542 + 512.543

©2014 р. В.В. Ковдриш[1], Р.В. Скуратовський[2], М.І. Сумарюк[3]

[1,3]Інститут післядипломної педагогічної освіти в Чернівецькій області
[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка

КОЗОБРАЖЕННЯ І ВЛАСТИВОСТІ ВІНЦЕВОГО СТЕПЕНЯ ЗНАКОЗМІННИХ ГРУП

Зроблено конструктивне просте й елементарне доведення двопородженності метазнакозмінної групи $A_{n_1} \wr A_{n_2} \ldots \wr A_{n_m}$ ($n_i \geq 5$, $m > 2$). Знайдено твірні та визначальні співвідношення для вінцевого степеня знакозмінних груп $\underbrace{A_n \wr A_n \ldots \wr A_n}_{m}$ ($m > 2$).

An elementary and constructive proof of the existence of an 2-element generator system for metaalternating group $A_{n_1} \wr A_{n_2} \ldots \wr A_{n_m}$, ($n_i \geq 5$, $m > 2$) is given. We find generators and defining relations for wreath products of alternating groups $\underbrace{A_n \wr A_n \ldots \wr A_n}_{m}$ ($m > 2$).

1. Вступ. Знакозмінна група A_n з'являється у багатьох дослідженнях [1 – 4]. Її козображення і властивості досліджував Кармайкл [4]. Питання про козображення вінцевого добутку груп $A_n \wr A_n$ і $A_n \wr A_n \wr A_n$ виникало ще при побудові графів Келі [3] та у дослідженні систем твірних цих груп [4]. Для різних систем твірних і відповідних їм співвідношень ці графи мають мало спільного окрім того, що вони мають однакову кількість вершин і однакові регулярності. Графи Келі цієї групи можуть бути не ізоморфні, окрім як в сенсі спеціального топологічного *lips*-ізоморфізму [5]. Також цікавим є вивчення властивостей інших графів пов'язаних з цими групами. У статті [1] неконструктивними методами була доведена двопородженість нескінченно ітерованих вінцевих добутків

$$A_{n_1} \wr A_{n_2} \wr \ldots, n_i \geq 5.$$

Пізніше (див. [6, 7]), даний результат було узагальнено на нескінченно ітеровані вінцеві добутки довільних неабелевих простих груп. У статтях [10, 11] були побудовані топологічна r-елементна та двоелементна системи твірних для метазнакозмінних груп нескінченного і скінченного рангу відповідно. Наведені нами доведення і результати є дещо простішими і загальнішими ніж попередні.

2. Основні поняття і результати. Нехай (G, X) і (H, Y) дві групи підстановок, де $(G, X) \wr H$ – вінцевий добуток групи (G, X) підстановок з абстрактною групою H. Визначимо дію групи $(G, X) \wr H$ на множині $X \times Y$, поклавши для довільної пари $(u, v) \in X \times Y$ і для довільного елемента $[g, h(x)] \in (G, X) \wr H$

$$(u, v)^{[g, h(x)]} = (u^g, v^h(u)). \qquad (1)$$

При цьому одинична таблиця визначає тривіальну дію. Отже, так задана дія визначає групу підстановок на множині $X \times Y$.

Означення 1. *Група підстановок $(G \wr H, X \times Y)$ з дією* (1), *називається вінцевим добутком груп підстановок (G, X) і (H, Y).*

Знакозмінна група A_n є підгрупою групи підстановок S_n індекса 2, її твірними можна при $n > 3$ взяти цикли

$$t = (1, 2, 3), s = (3, 4, ..., n)$$

для $n \equiv 1 \pmod 2$ та

$$t = (1, 2, 3), s = (1, 2)(3, 4, ..., n)$$

у випадку $n \equiv 0 \pmod 2$.

Козображення A_n для цієї системи твірних знайдене ще Кармайклом [3]:

$$t^3 = s^{n-2} = (st)^n = (ts^{-k}ts^k)^2,$$

якщо $1 \le k \le \dfrac{n-3}{2}$ та $n \equiv 1 \pmod 2$ і

$$t^3 = s^{n-2} = (st)^{n-1} = (t^{(-1)^k} s^{-k} t s^k)^2 = e,$$

якщо $1 \le k \le \dfrac{n-2}{2}$ та $n \equiv 0 \pmod 2$.

Знайдемо козображення для групи

$$A_n \wr A_n = \langle s_0, s_1, \ldots, s_n, t_0, t_1, \ldots, t_n \rangle$$

при $n \equiv 1 \pmod 2$, та

$$s_0 = [(3,4,\ldots,n), e, \ldots, e],$$

$$s_1 = [e, (3,4,\ldots,n), e, \ldots, e],$$

$$\ldots,$$

$$s_i = [e, \ldots, e, (3,4,\ldots,n), e, \ldots, e],$$

$$\ldots,$$

$$s_n = [e, \ldots, e, (3,4,\ldots,n)];$$

$$t_0 = [(1,2,3), e, \ldots, e],$$

$$t_1 = [e, (1,2,3), e, \ldots, e], \ldots,$$

$$t_n = [e, \ldots, e, (1,2,3)].$$

Спочатку розглянемо вінцевий добуток $E \wr A_n$. Зрозуміло, що

$$E \wr A_n = \langle s_1, s_2, \ldots, s_n, t_1, t_2, \ldots, t_n \rangle$$

фактично має конструкцію прямого добутку груп $A_n \times \ldots \times A_n$.

Нагадаємо деякі добре відомі факти.

Теорема 1. *Якщо $G_i = \langle X_i | R_i \rangle$, $i \in I$, причому $X_i \bigcap X_j = \emptyset$, $i \ne j$, тоді маємо*

$$\prod_{i \in I} G_i = \langle \cup X_i | \cup R_i,\ x_i x_j = x_j x_i,$$

$$x_i \in X_i,\ x_j \in X_j \rangle.$$

Оскільки $\wr_{i=1}^{k} A_{n_i} \lhd \wr_{i=1}^{k} S_{n_i}$, то розглянемо будову підгруп у $\wr_{i=1}^{k} S_{n_i}$. Нехай $G < \wr_{i=1}^{k} S_{n_i}$, тоді G допускає таке представлення: $G = \bigsqcup\limits_{i=0}^{p} [a_i, H_i]$, де всі a_i різні, зокрема $a_i \in \wr_{i=1}^{k-1} S_{n_i}$, $a_0 = e$, $H_i \subset \prod\limits_{i=1}^{n_1 n_2 \ldots n_{k-1}} S_{n_i}$, $H_0 = H$.

Лема 1. *Нехай $G \lhd \wr_{i=1}^{k} S_{n_i}$, тоді*

$$G = \bigsqcup_{i=0}^{p} [a_i, H_i] : H_i = H_0 b_i, b_i \in H_i.$$

Доведення. Нехай $[a_i, H_i] \subset G$. Враховуючи, що $G \lhd \wr_{i=1}^{k} S_{n_i}$, для довільного $[a_i, e] \in \wr_{i=1}^{k} S_{n_i}$, маємо

$$[a_i, e][a_i, H_i][a_i, e]^{-1} = [a_i, H_i^{a_i}] \subset G,$$

тому $H_i^{a_i} = H_i$. Нехай $|a_i| = m$, тоді

$$[a_i, H_i]^m = [e, H_i^m],$$

а звідси $H_i^m \subset H$. Оскільки G — група, то

$$[e, H][a_i, H_i] = [a_i, H H_i].$$

Отже, $H \cdot H_i^m \subset H_i$. Маємо ланцюг потужностей:

$$|H_i| \le |H_i^m| \le |H H_i| \le |H_i|.$$

Звідси $H H_i = H_i$, тому $H b_i = H_i$, $b_i \in H_i$. $\Box$

Нехай D — довільна двопороджена досконала група.

Лема 2. *Нехай t_D і s_D — це твірні групи D. Тоді наступні елементи утворюють систему твірних для $A_n \wr D$, $n \ge 4$:*

$$\begin{cases} [t, e, \ldots, e], [e, e, e, t_D, \ldots, e], \\ [s_n, e, e, e, \ldots, e], [e, e, e, s_D, e, \ldots, e], \end{cases} \tag{2}$$

де символом e позначено як тотожну підстановку, так і функцію від k змінних $(1 \le k \le n-1)$, всі значення якої є тотожними підстановками.

Доведення. Оскільки A_n діє точно і транзитивно, то згідно з [10] системою твірних для групи $A_n \wr D$ є наступна система:

$$\begin{cases} s_0 = [(3,4,\ldots,n), e, \ldots, e], \\ s_1 = [e, s_D, e, \ldots, e], \ldots, \\ s_i = [e, \ldots, e, s_D, e, \ldots, e], \ldots, \\ s_n = [e, \ldots, e, s_D]; \\ t_0 = [(1,2,3), e, \ldots, e], \\ t_1 = [e, t_D, e, \ldots, e], \ldots, \\ t_i = [e, e, \ldots, e, t_D, e, \ldots, e], \ldots, \\ t_n = [e, \ldots, e, t_D]. \end{cases} \tag{3}$$

Доведемо можливість виразити твірні з (3) через (2). Справді, шляхом спряження твірних з (2) можна отримати всі елементи з (3), наприклад:

$$s_0 t_3 s_0^{-1} =$$

$$= [s, e, e, ..., e][e, e, e, t, e, ..., e][s^{-1}, e, e, ..., e] =$$

$$= [e, e, e, e, t, e, ..., e] = t_4,$$

$$s_0 t_i s_0^{-1} =$$

$$= [s, e, e, ..., e][e, e, ..., e, t, e, ..., e]\cdot$$

$$\cdot[s^{-1}, e, e, ..., e] = [e, e, e, ..., e, t, e, ..., e] = t_{i+1},$$

$$s_0^j t_i s_0^{-j} = t_{i+j}, i + j \le n,$$

$$t_0^j t_i t_0^{-j} = t_{i+j}, i + j \le 3.$$

Лема 3. *Нехай A, D – скінченні, досконалі групи, тоді $A \wr D$ теж досконала.*

Доведення. Маємо систему твірних виду (3) і зафіксуємо довільний $x \in X$ і $B_X = \{[e, ..., e, b_x, e, ..., e] | b_x \in D\}$ – база вінцевого добутку. З одного боку комутант $(A \wr D)'$ містить окрім інших і усі елементи виду (3), тобто $[a, e, ..., e]$ та $[e, ..., e, b_x, ..., e]$. Наприклад, $[a, e, ..., e] = \prod_{i=1}^{k} ([v_i, e, ..., e] \cdot [u_i, e, ..., e] \cdot [v_i^{-1}, e, ..., e]\cdot [u_i^{-1}, e, ..., e])$ і в силу досконалості такі $u, v \in A$ існують. Аналогічно з твірними виду $[e, ..., e, b_x, ..., e]$. Тобто $(A \wr D)' \supseteq (A \wr D)$. Навпаки, група завжди містить свій комутант, тому $(A \wr D)' \subseteq (A \wr D)$. □

Зауваження 1. *Вінцевий добуток $\wr_{i=1}^{k} D_i$ досконалих груп (D_i, X_i), $|X_i| < +\infty$, $1 \le i \le k$, теж досконала група.*

Доведення здійснюється методом математичної індукції по i. База індукції перевірена у лемі 3.

Зауваження 2. *Вінцевий добуток $\wr_{i=1}^{k} D_i$ скінченно породжених досконалих не обов'язково скінченних груп (D_i, X_i), де кожна D_i, $1 \le i \le k$, має скінченну ширину по комутанту [9], теж є досконалою групою.*

Доведення. Оскільки кожен елемент комутанта $D' = D$ у цьому випадку виражається через скінченну кількість комутаторів $[u_i, v_i]$, $u_i, v_i \in D$, то кожен фіксований твірний виду $[a_i, e, ..., e]$ і $[e, ..., e, b_x, ..., e]$ виразиться через скінченну кількість елементів комутанта. □

Лема 4. *Нехай маємо досконалу групу $D \simeq \langle t_D, s_D \rangle$. Тоді елементи*

$$g = [t, e, e, t_D, e, \ldots, e]$$

та

$$f = [s_n, e, e, s_D, e, \ldots, e]$$

утворюють систему твірних для $A_n \wr D$, $n \ge 4$.

Доведення. Спочатку розглянемо випадок коли n — непарне. Тоді $s_n = (3, 4, \ldots, n)$. Маючи елементи

$$g^3 = [e, s, s, s, e, ..., e],$$

$$f^{n-2} = [e, e, e, t_D, t_D, ..., t_D],$$

що отримані з твірних, породжуємо ними підгрупу $H = \langle g^3, f^{n-2} \rangle$. Помітимо, що її третя координата містить всю множину елементів з D, тобто $[H]_3 \simeq D$, оскільки $D = =< t_D, s_D >$. Знаходимо її комутант $K = [H, H]$. Зрозуміло, що кожен елемент із K має вигляд $[e, e, e, g', e, ..., e]$, де g' довільний елемент з D. Тобто $[K]_3 \simeq D$. Таким чином, елементи $[e, e, e, t_D, e, ..., e]$ і $[e, e, e, s_D, e, ..., e]$ з (2) містяться в K і тому можуть бути виражені з g і f. Покажемо, що з вказаних твірних можна виразити (2). Справді, помножимо твірний $g = [t, e, e, t_D, e, \ldots, e]$ на елемент $\omega = [e, e, e, t_D^{-1}, e, e, ..., e] \in K$ зліва, матимемо $[t, e, e, \ldots, e]$. Аналогічно отримуємо $[s, e, e, ..., e]$. Отже, отримуємо систему твірних (2).

Тепер розглянемо випадок, коли n — парне. Тоді

$$s_n = (1, 2)(3, ..., n)$$

і

$$f^{n-1} = [s_n^{n-1}, e, s_D, ..., s_D] = [e, e, s_D, ..., s_D].$$

Далі породжуємо групу $H = \langle g^3, f^{n-1} \rangle$, а потім беремо її комутант. Отримаємо таку групу:

$$K = \{[e, e, b, e, ..., e] \mid b \in D\}.$$

Далі цілком аналогічно виражається система твірних (2). Отже, f, g – твірні для $A_n \wr D, n \ge 4$.

Наслідок 1. *Нехай* $A_{n_0} = \langle t, s_{n_0} \rangle$, D — *деяка досконала двопороджена група. Тоді група* $\wr_{i=0}^{n_{k-1}} A_{n_i} \wr D$, *де*

$$n_0 \geq 4,\ n_i \geq 5,\ k-1 \geq i \geq 1$$

має двоелементну систему твірних

$$f_1 = [t, e, e, f, e, ..., e],\ g_1 = [s_{n_0}, e, e, g, e, ..., e].$$

Доведення. Скористаємося методом математичної індукції. База індукції перевірена в лемі 4. Покажемо правильність припущення індукції для $k+1$ співмножників. Нехай доведено двопородженість для k множників

$$D_2 \simeq \wr_{i=1}^{n_{k-1}} A_{n_i} \wr D = \langle f, g \rangle,$$

тоді врахувавщи асоціативність вінцевого добутку груп підстановок маємо

$$\wr_{i=0}^{n_{k-1}} A_{n_i} \wr D \simeq A_{n_0} \wr (\wr_{i=1}^{n_{k-1}} A_{n_i} \wr D) \simeq A_{n_0} \wr D_2$$

(тут до останньої групи застосовна лема 4).

Наслідок 2. *Метазнакозмінна група рангу* $(k_1, \ldots, k_s)$, *де всі* $k_i \geq 5, i > 1$ *для* $i = 1$, $k_1 \geq 4$ *є двопородженою.*

Доведення випливає з леми 4.

Теорема 4. *Нехай при* $n \equiv 1 \pmod 2$ *група* G *має наступне козображення:*

$$\langle t_0, ..., t_n, s_0, ..., s_n | t^3 = s^{n-3} = (st)^n =$$

$$= (ts^{-k}ts^k)^2,\ 0 \leq k \leq \frac{(n-3)}{2}, 1 \leq i, j \leq n;$$

$$s_j s_i = s_i s_j, t_j t_i = t_i t_j, 0 \leq i, j \leq n, n > 3;$$

$$R_2, s_0 s_i = s_i s_0, i = 1, 2\rangle,$$

де R_2 *– співвідношення з системи* (2), *тоді* $G \simeq A_n \wr A_n$.

Доведення. Доведемо, що G ізоморфна $A_n \wr A_n$. Справді, всі зазначені співвідношення з G виконуються в $A_n \wr A_n$, але в $A_n \wr A_n$ можуть бути ще якісь співвідношення, що невивідні з вище вказаних. Якщо б такі були, то порядок групи $A_n \wr A_n$ був би меншим за порядок групи G. Доведемо, що порядки цих груп співпадають. Для цього доведемо, що кожне слово $\omega \in G$ можна звести до канонічного виду:

$$\omega = \omega_n \omega_{n-1} \ldots \omega_1 \omega_0,$$

де ω_i — це комбінація зі степенів s_i, t_i. При зведенні до такого виду врахуємо, що

$$s_i s_j = s_j s_i,\ t_i s_j = s_j t_i,\ t_i t_j = t_j t_i,$$

для $1 \leq i, j \leq n$.

Далі наведемо процес зведення ω до канонічної форми, де s_0, t_0 стоять в правому кінці слова, тобто процес «перекидування» s_0, t_0 в кінець слова.

а) Розглянемо слово $s_0 \omega_n \omega_{n-1} \ldots \omega_1$. Маємо кілька випадків:

$$1а)\ s_0\omega_1 = \begin{cases} s_0 t_1^k \\ s_0 s_1^k \end{cases} = \begin{cases} t_1^k s_0, \\ s_1^k s_0; \end{cases}$$

$$2а)\ s_0\omega_2 = \begin{cases} s_0 t_2^k \\ s_0 s_2^k \end{cases} = \begin{cases} t_2^k s_0, \\ s_2^k s_0; \end{cases}$$

$$3а)\ s_0\omega_3 = \begin{cases} s_0 t_3^k \\ s_0 s_3^k \end{cases} = \begin{cases} t_n^k s_0, \\ s_n^k s_0; \end{cases}$$

$$4а)\ s_0\omega_n = \begin{cases} s_0 t_n^k \\ s_0 s_n^k \end{cases} = \begin{cases} t_{n-1}^k s_0, \\ s_{n-1}^k s_0, \end{cases} \quad n > 3.$$

б) Знаходимо подібні співвідношення для t_0. Отже, маємо:

$$1б)\ t_0\omega_1 = \begin{cases} t_0 t_1^k \\ t_0 s_1^k \end{cases} = \begin{cases} t_3^k t_0, \\ s_3^k t_0; \end{cases}$$

$$2б)\ t_0\omega_2 = \begin{cases} t_0 t_2^k \\ t_0 s_2^k \end{cases} = \begin{cases} t_1^k t_0, \\ s_1^k t_0; \end{cases}$$

$$3б)\ t_0\omega_3 = \begin{cases} t_0 t_3^k \\ t_0 s_3^k \end{cases} = \begin{cases} t_2^k t_0, \\ s_2^k t_0; \end{cases}$$

$$4б)\ t_0\omega_n = \begin{cases} t_0 t_n^k \\ t_0 s_n^k \end{cases} = \begin{cases} t_n^k t_0, \\ s_n^k t_0, \end{cases} \quad n > 3.$$

Отже, кожне слово $\omega \in G$ має канонічний вигляд $\omega = \omega_n \omega_{n-1} \ldots \omega_1 \omega_0$, причому для кожного $i \geq 0$: $|\omega_i| = |A_n| = \dfrac{n!}{2}$, тоді

$$| G |=| A_n \wr A_n |= \left(\frac{n!}{2}\right)^{n+1}.$$

Теорему доведено. □

Знайдемо тепер козображення для групи

$$A_n \wr A_n = \langle s_0, s_1, \ldots, s_n, t_0, t_1, \ldots, t_n \rangle$$

при $n \equiv 0 \pmod 2$, де її твірні елементи задаються таблицями:

$$s_0 = [(12)(3, 4, \ldots, n), e, \ldots, e],$$

$$s_1 = [e, (12)(3, 4, \ldots, n), e, \ldots, e], \ldots,$$

$$s_n = [e, \dots, e, (12)(3,4,\dots,n)],$$
$$t_0 = [(1,2,3), e, \dots, e],$$
$$t_1 = [e, (1,2,3), e, \dots, e], \dots,$$
$$t_n = [e, e, \dots, e, (1,2,3)].$$

Аналогічно, як і в попередньому випадку, скориставшись теоремою 1, знаходимо козображення для $E \wr A_n$, а саме:

$$E \wr A_n = \langle s_1, s_2, \dots, s_n,\ t_1, t_2, \dots, t_n | s_i^{n-2} =$$
$$= t_i^3 = (s_i t_i)^n = (t_i s_i^{-k} t_i s_i^k)^2 = e,\ t_i t_j =$$
$$= t_j t_i,\ s_i s_j = s_j s_i,\ \ t_i s_j = s_j t_i,\ 1 \le i, j \le n \rangle.$$

Наведемо правила множення в $A_n \wr A_n$. Отже, маємо наступну систему співвідношень:

$$\begin{cases} s_j s_i = s_i s_j,\ \ t_j t_i = t_i t_j, 1 \le i, j \le n; \\ s_0 t_i = t_{i-1} s_0, s_0 s_i = s_{i-1} s_0, i > 3; \\ s_0 s_3 = s_n s_0, s_0 t_3 = t_n s_0, \\ s_0 t_1 = t_2 s_0, s_0 s_1 = s_2 s_0, \\ s_0 t_2 = t_1 s_0, s_0 s_2 = s_1 s_0, \\ t_0 t_i = t_i t_0, t_0 s_i = s_i t_0, i > 3; \\ t_0 t_1 = t_3 t_0,\ t_0 s_1 = s_3 t_0, \\ t_0 t_i = t_{i-1} t_0,\ t_0 s_i = s_{i-1} t_0, i = 2, 3. \end{cases} \quad (4)$$

Таким чином, у співвідношеннях (4) знайдено правила множення елементів t_0, s_0 на решту елементів з $A_n \wr A_n$.

Теорема 5. *Нехай $n \equiv 0 \pmod 2$ і група G задається наступним козображенням:*

$$G = \langle s_0, s_1, s_2, \dots, s_n,\ t_0, t_1, t_2, \dots, t_n | s_i^{n-2} =$$
$$= t_i^3 = (s_i t_i)^{n-1} = (t_i^{(-1)^k} s_i^{-k} t_i s_i^k)^2 = e,$$
$$0 \le i, j \le n, 1 \le k \le \frac{n-2}{2},\ n > 3;$$
$$s_j s_i = s_i s_j, t_j t_i = t_i t_j, 1 \le i, j \le n, R_3 \rangle,$$

де R_3 це співвідношення із системи (3)*. Тоді G ізоморфна $A_n \wr A_n$.*

Доведення. Помітимо, що всі правила множення з групи G виконуються в $A_n \wr A_n$. Залишилося довести, що в $A_n \wr A_n$ немає інших невивідних співвідношень. Якби вони існували, то порядок $A_n \wr A_n$ був би меншим ніж $|G|$, тому покажемо рівність цих порядків. Для цього доведемо, що кожне слово $\omega \in G$ можна звести до канонічного виду:

$$\omega = \omega_n \omega_{n-1} \dots \omega_1 \omega_0,$$

де ω_i — це комбінація зі степенів s_i, t_i. При зведенні до такого виду врахуємо, що

$$s_i s_j = s_j s_i,\ t_i s_j = s_j t_i,\ t_i t_j = t_j t_i,$$

для $1 \le i, j \le n$.

Далі наведемо процес зведення слова ω до канонічного виду, де s_0, t_0 знаходиться в правому кінці слова, тобто процес «перекидування» s_0, t_0 в кінець слова.

а) Розглянемо слово $s_0 \omega_n \omega_{n-1} \dots \omega_1$. Маємо кілька випадків:

1а) $s_0 \omega_1 = \begin{cases} s_0 t_1^k \\ s_0 s_1^k \end{cases} = \begin{cases} s_2^k s_0, \\ s_2^k s_0; \end{cases}$

2а) $s_0 \omega_2 = \begin{cases} s_0 t_2^k \\ s_0 s_2^k \end{cases} = \begin{cases} s_1^k s_0, \\ s_1^k s_0; \end{cases}$

3а) $s_0 \omega_3 = \begin{cases} s_0 t_3^k \\ s_0 s_3^k \end{cases} = \begin{cases} t_n^k s_0, \\ s_n^k s_0; \end{cases}$ і т.д.

б) Аналогічно розглянемо випадки із t_0, враховуючи при цьому, що t_0 комутує з s_i, та t_i при $i > 3$.

1б) $t_0 \omega_1 = \begin{cases} s_0 t_1^k \\ s_0 s_1^k \end{cases} = \begin{cases} t_1^k s_3, \\ s_1^k s_3; \end{cases}$

2б) $t_0 \omega_2 = \begin{cases} s_0 t_2^k \\ s_0 s_2^k \end{cases} = \begin{cases} t_1^k s_0, \\ s_1^k s_0; \end{cases}$

3б) $t_0 \omega_3 = \begin{cases} t_0 t_3^k \\ t_0 s_3^k \end{cases} = \begin{cases} t_2^k t_0, \\ s_2^k t_0; \end{cases}$ і т.д.

Отже, кожне слово $\omega \in G$ має канонічний вигляд $\omega = \omega_n \omega_{n-1} \dots \omega_1 \omega_0$, при цьому для кожного $i \ge 0$: $|\omega_i| = |A_n| = \dfrac{n!}{2}$, тоді

$$\mid G \mid = \mid A_n \wr A_n \mid = \left(\frac{n!}{2} \right)^{n+1},$$

що і треба було довести. □

Нехай $W_2 = A_n \wr A_n$ діє підстановками на множині X^2 з n^2 елементів і A_n на множині з n елементів. Тоді можна індуктивно визначити $W_3 = (W_2, X^2) \wr A_n$. Позначимо через X^* вільний моноїд породжений множиною X. Тоді множина X^* скінченних послідовностей над X має структуру регулярного дерева [8].

Відомо [6], що для сферично однорідного кореневого дерева висоти m маємо ізоморфізм

$$Aut X^m \simeq S_n \wr S_n \wr \dots \wr S_n,$$

тому група $\wr_{i=1}^{m} A_n$ занурюється в цю групу.

Означення 2. *Рівнем L_k назвемо множину вершин V, що лежать на відстані $d(v, v_0) = k - 1$ від кореня v_0.*

Позначимо через t_{001} — 1-ий твірний елемент з L_3, що містить підстановку $t = (1, 2, 3)$ на першій позиції пасивної частини. Аналогічно знаходимо

$$t_{002} = [[e, \ldots, e], e, (1, 2, 3), e, \ldots, e].$$

Згідно з конструкцією ітерованого вінцевого добутку i-ий пасивний елемент 1-ої таблиці діє на елементах, що мають позиції з номерами $(i-1)n+1, \ldots, ni$ наступної (другої) таблиці при множенні, в яку теж вкладена менша таблиця в якості активного елемента.

Означення 3. *Назвемо твірними 3-го рівня елементи, які утворюються при спряженні твірних t_{001}, s_{001} твірними з $A_n \wr A_n$, тобто з групи, яка утворилась на попередній ітерації, наприклад, таким є $t_{01}t_{001}t_{01}^{-1} = t_{003}$.*

Зрозуміло, що довільний твірний з L_3 можна отримати спряженнями елементами t_{001}, s_{001}, зокрема,

$$t_{00i} = s_{01}^{j} t_{01} t_{001} t_{01}^{-1} s_{01}^{-j},$$

$$3 \leq i \leq n \, 1 \leq j \leq n-3,$$

де j залежить від i. Для рівня L_2 маємо

$$t_{0n} = s_0 t_0 t_{01} t_0^{-1} s_0^{-1},$$

$$t_{0(n-i+1)} = s_0^{i} t_0 t_{01} t_0^{-1} s_0^{-i}, \; 0 < i < n-3.$$

Знайдемо тепер козображення для групи $A_n \wr A_n \wr A_n$, що породжена твірними s_0, s_{01}, ..., s_{0n}, s_{001}, ..., s_{00n}, t_0, t_{01}, ..., t_{0n}, t_{001}, ..., t_{00n} при $n \equiv 1 \pmod 2$, де

$$s_0 = [[(3, 4, \ldots, n), e, \ldots, e]e, \ldots, e],$$

$$s_{01} = [[e, (3, 4, \ldots, n), e, \ldots, e]e, \ldots, e], ...,$$

$$s_{0i} = [[e, \ldots, e, (3, 4, \ldots, n), e, \ldots, e], e, \ldots, e],$$

$$s_{0n} = [[e, \ldots, e, (3, 4, \ldots, n)], e, \ldots, e];$$

$$s_{001} = [[e, \ldots, e](3, 4, \ldots, n), e, \ldots, e,], ...,$$

$$s_{00n^2} = [[e, \ldots, e], e, \ldots, e, (3, 4, \ldots, n)];$$

$$t_0 = [[(1, 2, 3), e, \ldots, e], e, \ldots, e],$$

$$t_{01} = [[e, (1, 2, 3), e, \ldots, e], e, \ldots, e], ...,$$

$$t_{0n} = [[e, \ldots, e, (1, 2, 3)], e, \ldots, e],$$

$$t_{001} = [[e, \ldots, e], (1, 2, 3), e, \ldots, e], ...,$$

$$t_{00n^2} = [[e, \ldots, e], e, \ldots, e, (1, 2, 3)].$$

Дослідимо правила множення в $A_n \wr A_n \wr A_n$. При множенні в $A_n \wr A_n \wr A_n$ теж використовується права регулярна дія, тому співвідношення між елементами сусідніх рівнів, які належать одному піддереву, тобто мають однакові перші $k-1$, $1 \leq k \leq 3$ індексів, є по суті такі ж як у $A_n \wr A_n$. Точніше для елементів з L_2, L_3 при $n \equiv 1 \pmod 2$ маємо:

$$\begin{cases} s_{0j} t_{00i} = t_{00i-1} s_{0j}, \\ s_{0j} s_{00i} = s_{00i-1} s_{0j}, \\ (j-1)n + 3 \leq i \leq jn; \\ s_{0j} t_{00i} = t_{00i} s_{0j}, \\ s_{01} s_{00i} = s_{00i} s_{01}, \\ (j-1)n + 1 \leq i \leq (j-1)n + 2; \\ s_{0i} s_{00(i-1)n+3} = s_{00in} s_{0i}, \\ s_{0i} t_{00(i-1)n+3} = t_{00in} s_{0i}, \\ s_{0i} t_{00(i-1)n+r_0} = t_{00(i-1)n+r_0} s_{0i}, \\ s_{0i} s_{00(i-1)n+r_0} = s_{00(i-1)n+r_0} s_{0i}, \\ r_0 \in \{1, 2\}; \\ t_{0i} t_{00(i-1)n+r} = t_{00(i-1)n+r} t_{0i}, \; r > 3; \\ t_{0i} s_{00(i-1)n+r} = s_{00(i-1)n+r} t_{0i}, \; r > 3; \\ t_{0i} t_{00(i-1)n+1} = t_{00(i-1)n+3} t_{0i}, \\ t_{0i} s_{00(i-1)n+1} = s_{00(i-1)n+3} t_{0i}, \end{cases} \qquad (5)$$

де $0 \leq j \leq n-1$, а для елементів з L_1, L_2 виконуються рівності (2) і (4), при цьому перепозначаємо в нових твірних $s_{0i} = s_i$, $t_{0i} = t_i$, $n \geq i \geq 1$. Для випадку $n \equiv 1 \pmod 2$ можна записати аналогічні співвідношення.

Для елементів з різних піддерев, тобто для t_{0i}, t_{0jl}, $i - 1 \neq j$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq r \leq n$ виконуються співвідношення:

$$\begin{cases} t_{0i} t_{00jn+r} = t_{00jn+r} t_{0i}, \\ t_{0i} s_{00jn+r} = s_{00jn+r} t_{0i}, \\ s_{0i} t_{00jn+r} = t_{00jn+r} s_{0i}, \\ s_{0i} t_{00jn+r} = t_{00jn+r} s_{0i}, \end{cases} \qquad (6)$$

бо їм відповідають автоморфізми, що діють на різних множинах слів.

Залишилося дослідити правила множення елементів t_0, s_0 на решту елементів з L_3. Для цього позначимо

$$t_{00i} = t_i, s_{00i} = s_i, \; 1 \leq i \leq n^2.$$

Для елементів з 0-го і 3-го рівнів, у випадку $n \equiv 1 \pmod 2$, маємо наступні співвідношення, які також є у групі G, а саме:

$$\begin{cases} s_0t_i = t_is_0, s_0s_i = s_is_0, 1 < i < 3n; \\ t_0t_n = t_{3n}t_n, t_ns_1 = s_{3n}t_n, \\ s_0t_i = t_{i-n}s_0, s_0s_i = s_{i-n}s_0, \\ 4n < i \leq n^2; \\ s_0t_i = t_{n^2-k}s_0, s_0s_i = s_{n^2-k}s_0, \\ k = n - 1 - (i - 3n) = 4n - i - 1, \\ 3n \leq i \leq 4n; \\ t_0t_i = t_it_0, t_0s_i = s_it_0, i > 3n; \\ t_0t_i = t_{i-n}t_0, t_0s_i = s_{i-n}t_0, \\ n < i \leq 3n; \\ t_0t_i = t_{2n+i}t_0, t_0s_i = s_{2n+i}t_0, \\ 1 \leq i \leq n. \end{cases} \tag{7}$$

Доведемо детально лише кілька співвідношень, бо всі інші правила множення перевіряються аналогічно безпосереднім множенням. Нехай $i < 3n$. Тоді

$$s_0t_i = [[(3, 4, \ldots, n), e, \ldots, e], e, \ldots, e]\cdot$$
$$\cdot[[e, \ldots, e], e, (1, 2, 3), e, \ldots, e] =$$
$$= [[e, \ldots, e], e, (1, 2, 3), e, \ldots, e]\cdot$$
$$\cdot[[(3, 4, \ldots, n), e, \ldots, e], e, \ldots, e] = t_is_0.$$

Для $i = 2n + 1$ маємо

$$t_0t_i = [[(1, 2, 3), e, \ldots, e], e, \ldots, e]\cdot$$
$$\cdot[[e, \ldots, e], e, \ldots, (1, 2, 3), e, \ldots, e] =$$
$$= [[e, \ldots, e], (1, 2, 3), e, \ldots, e]\cdot$$
$$\cdot[[(1, 2, 3), e, \ldots, e], e, \ldots, e] = t_{n+1}t_0.$$

Отже, співвідношення $t_0t_{2n+1} = t_{n+1}t_0$ виконується.

Нехай n — парне. Тоді маємо наступну систему співвідношень:

$$\begin{cases} 1 \leq i \leq n, s_0t_i = t_{n+i}s_0, s_0s_i = s_{n+i}s_0, \\ s_0t_i = t_{i-n \pmod{2n}}s_0, s_0s_i = s_{i-n \pmod{2n}}s_0; \\ s_0t_i = t_{i-n}s_0, s_0s_i = s_{i-n}s_0, n < i \leq 2n; \\ s_0t_i = t_{i-n}s_0, s_0s_i = s_{i-n}s_0, 4n < i \leq n^2; \\ s_0t_i = t_{n^2-k}s_0, s_0s_i = s_{n^2-k}s_0, \\ k = 4n - i - 1, 3n \leq i \leq 4n; \\ t_0t_i = t_it_0, t_0s_i = s_it_0, i > 3n; \\ t_0t_i = t_{i-n}t_0, t_0s_i = s_{i-n}t_0, n < i \leq 3n; \\ t_0t_i = t_{2n+i}t_0, t_0s_i = s_{2n+i}t_0, 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Перевіримо співвідношення $s_0t_i = t_{n+i}s_0$, при $i = 2$ та $n > 2$:

$$s_0t_2 = [[(1, 2)(3, 4, \ldots, n), e, \ldots, e], e, \ldots, e]\cdot$$
$$\cdot[[e, \ldots, e], e, (1, 2, 3), e, \ldots, e] =$$
$$= [[e, \ldots, e], e, \ldots, e, (1, 2, 3), e, \ldots, e]\cdot$$
$$\cdot[[(1, 2)(3, 4, \ldots, n), e, \ldots, e], e, \ldots, e] = t_{n+2}s_0.$$

Отже, потрібне співвідношення виконується.

Обґрунтуємо формулу для величини зсуву k відносно n^2 у формулі

$$s_0t_i = t_{n^2-k}s_0, \ 3n \leq i \leq 4n.$$

Зсув до позиції з номером $3n$ це величина $i'' = i - 3n$, зсув вправо від позиції n^2 це $i'' = n - i'$. Ще віднімемо 1, враховуючи відображення із позиції з номером $3n$ в позицію n^2, в результаті маємо:

$$k = i'' - 1 == (n - i') - 1 =$$
$$= n - (i - 3n) - 1 = 4n - i - 1.$$

Доведемо, що в $A_n \wr A_n \wr A_n$ інших співвідношень немає. Покажемо, що

$$\mid G \mid = \mid A_n \wr A_n \wr A_n \mid .$$

Для цього доведемо, що слово $w \in G$ можна звести до канонічного виду:

$$w = w_{n^2}w_{n^2-1} \ldots w_1w_0.$$

При зведенні до канонічного виду врахуємо вище наведені співвідношення і комутації $s_{0j}t_{0i} = t_{0i}s_{0j}$, $t_{0j}t_{0i} = t_{0i}t_{0j}$, $s_{0j}s_{0i} = s_{0i}s_{0j}$, аналогічно комутації між елементами 3-го рівня $s_{00j}t_{00i} = t_{00i}s_{00j}, \ldots$, $1 \leq j, i \leq n^2$ і комутації між елементами різних рівнів $t_{0i}t_{0jl} = t_{0jl}t_{0i}, t_{0i}s_{0jl} = s_{0jl}t_{0i}$, $s_{0i}t_{0jl} = t_{0jl}s_{0i}$, $s_{0i}t_{0jl} = t_{0jl}s_{0i}$, $i \neq j$, $1 \leq l \leq n^2$, $1 \leq i, j \leq n$. Далі здійснюємо процес зведення довільного слова $\omega \in G$ до канонічного виду:

$$\omega = \omega_n\omega_{n-1} \ldots \omega_1\omega_0,$$

де ω_i — це комбінація зі степенів s_i, t_i, t_{0i}, s_{0i}, t_{0jl}, s_{0jl}. Цей процес зводиться до «перекидування» s_0, t_0 в кінець слова і впорядкуванні інших елементів так, щоб отримати канонічне слово w. Отже, доведено теорему про те, що G ізоморфна $A_n \wr A_n \wr A_n$.

Теорема 6. *Нехай при* $n \equiv 1 \pmod 2$ *група* G *має наступне козображення:*

$$\langle t^3 = s^{n-3} = (st)^n = (ts^{-k}ts^k)^2, 0 \leq k \leq \frac{n-3}{2};$$

$$s_{0j}s_{0i} = s_{0i}s_{0j}, s_{0j}t_{0i} = t_{0i}s_{0j}, t_{0j}t_{0i} = t_{0i}t_{0j},$$

$$t_{0j}s_{0i} = s_{0i}t_{0j}, 1 \leq i, j \leq n, n > 3;$$

$$s_0 s_{0i} = s_{0i}s_0, i = 1, 2, R_2, R_4, R_5, R_6\rangle,$$

де R_2, R_4, R_5, R_6 *— це співвідношення з систем* (2), (4), (5), (6) *відповідно, тоді*

$$G \simeq A_n \wr A_n \wr A_n.$$

Доведення. Для $\wr_{i=1}^m A_n$ (тут і надалі під $\wr_{i=1}^m A_n$ розуміємо $\wr_{i=1}^m A_n^{(i)}$, при цьому $A_n^{(1)} = A_n^{(2)} = \ldots = A_n^{(m)} = A_n$) досить довести детально лише кілька співвідношень, бо всі інші правила множення перевіряються аналогічно безпосереднім множенням.

Нехай $i < 3n$, тоді

$$s_0t_i = [[(3, 4, \ldots, n), e, \ldots, e], e, \ldots, e]\cdot$$

$$\cdot[[e, \ldots, e]e, e, (1, 2, 3), e, \ldots, e] =$$

$$= [[e, \ldots, e]e, e, (1, 2, 3), e, \ldots, e]\cdot$$

$$\cdot[[(3, 4, \ldots, n), e, \ldots, e], e, \ldots, e] = t_is_0.$$

Для $i = 2n + 1$:

$$t_0t_i = [[(1, 2, 3), e, \ldots, e], e, \ldots, e]\cdot$$

$$\cdot[[e, \ldots, e]e, e, \ldots, (1, 2, 3), e, \ldots, e] =$$

$$= [[e, \ldots, e](1, 2, 3), e, e, e, \ldots, e]\cdot$$

$$\cdot[[(1, 2, 3), e, \ldots, e], e, \ldots, e] = t_{n+1}t_0.$$

Отже, співвідношення $t_0t_{2n+1} = t_{n+1}t_0$, виконується.

Виведемо співвідношення для $\wr_{i=0}^m A_n$ за індукцією, припустивши, що для $\wr_{i=1}^{m-1} A_n$ співвідношення знайдені і є аналогічними наведеним вище а саме, для парного n маємо:

1) при $1 < i < 3n^{m-1}$,

$$s_0t_i = t_is_0, s_0s_i = s_is_0;$$

2) при $3n^{m-2} \geq i > 1$, $i \in \mathbb{N}$,

$$t_0s_i = s_{i-n^{m-2} (\mathrm{mod}\ 3n^{m-2})}t_0,$$

$$t_0t_i = t_{i-n^{m-1} (\mathrm{mod}\ 3n^{m-2})}t_0;$$

3) при $n^m \geq i > 3n^{m-2}$, $i \in \mathbb{N}$,

$$t_0s_i = s_it_0;$$

4) при $3n^{m-2} < i < n^m$, $i \in \mathbb{N}$,

$$s_0t_i = t_{i-3n^{m-2}-n^{m-2}+1 (\mathrm{mod}\ n^{m-1})}s_0,$$

$$s_0s_i = s_{i-3n^{m-2}-n^{m-2}+1 (\mathrm{mod}\ n^{m-1})}s_0.$$

Помітимо вкладеність $\wr_{i=1}^{m-1} A_n$ в $\wr_{i=1}^m A_n$. Звідси отримуємо, що співвідношення між твірними з L_1 і L_m у $\wr_{i=1}^m A_n$ такі самі як у $\wr_{i=1}^{m-1} A_n$, тобто для твірних з різних рівнів визначальним є відстань $d(v_1, v_2)$ між відповідними вершинами v_1, v_2. Тому для $k < m$ співвідношення можна виписати у меншій вкладеній підгрупі $\wr_{i=1}^{m-1} A_n$, що ізоморфна групі $AutX^{m-1}$, для якої ми власне і ввели відстань.

Отже, залишається перевірити лише правильність співвідношень між твірними t_0, s_0 і твірними m-го рівня, бо між вершинами v_1, v_2 з $AutX^m$, що відповідають іншим твірним, окрім вершин з L_1 і L_m, відстань $d(v_1, v_2)$ менша за m, тому вони вкладені в $AutX^{m-1}$, де виконані співвідношення за припущенням індукції. Тоді позначимо через t_i^m твірний з m-го рівня і його образ після дії спряженням позначимо як $t_i^{(m)}$, $1 < i < 3n^{m-1}$, який має вигляд: $t_i^{(m)} \equiv t_i = [[\ldots[e, e, e, \ldots,]\ldots]\underbrace{\ldots}_{i-1}(1, 2, 3), \ldots, e]$.

Для парного n маємо:

1) при $1 < i < 3n^{m-1}$,

$$s_0t_i = t_is_0, s_0s_i = s_is_0;$$

2) при $3n^{m-1} \geq i > 1$, $i \in \mathbb{N}$, маємо:

$$t_0s_i = s_{i-n^{m-1} (\mathrm{mod}\ 3n^{m-1})}t_0,$$

$$t_0t_i = t_{i-n^{m-1} (\mathrm{mod}\ 3n^{m-1})}t_0;$$

3) при $n^m \geq i > 3n^{m-1}$, $i \in \mathbb{N}$, $t_0s_i = s_it_0$;

4) при $3n^{m-1} < i < n^m, i \in \mathbb{N}$,

$$s_0t_i = t_{i-3n^{m-1}-n^{m-1}+1 (mod n^m)}s_0,$$

$$s_0 s_i = s_{i-3n^{m-1}-n^{m-1}+1(mod n^m)} s_0.$$

Наприклад, для $\wr_{i=0}^{3} A_5$ остання формула дасть $s_0 t_{75} = t_{101} s_0$.

Оскільки для всіх $i : 0 \leq i \leq n+1$ маємо $|\omega_i| = |A_n| = \dfrac{n!}{2}$, то $\mid G \mid = \mid A_n \wr A_n \wr A_n \mid = \left(\dfrac{n!}{2}\right)^{n^2+n+1}$. Для непарного n доведення абсолютно аналогічне. Отже, встановлено ізоморфізм $G \cong A_n \wr A_n \wr A_n$. □

Позначимо через $G_k = \wr_{n_0}^{n_k} A_{n_i} \wr D$ і нехай G є інверсною границею $\varprojlim G_k$. Оскільки $G = A_{n_i} \wr G$, то G є гіллястою групою [2] і не є локально-скінченною. Справді, G є нескінченно породженою як група континуальної потужності, тому G є топологічним замиканням множини, яка має нескінченну потужність, у даному випадку зліченну. Цією підмножиною є підгрупа G_k, яка є двопородженою.

3. Висновки. У статті наведено просте й елементарне доведення двопородженності метазнакозмінної групи, досліджено козображення груп $\wr_{i=1}^{m} A_n$, $m \in \mathbb{N}$. Побудовано різні системи твірних для цих груп у тому числі і мінімальну систему твірних $A_{n_1} \wr A_{n_2} \ldots \wr A_{n_m}, n_i \geq 5, m > 2$. Наведену в теоремі 5 систему твірних можна мінімізувати, врахувавши наслідки з співвідношень виду

$$t_{01} t_{001} t_{01}^{-1} = t_{003},$$
$$s_0 t_{0i} s_0^{-1} = t_{0,i-1},$$

де $i > 3$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Bhattacharjee M.* The probability of generating certain profinite groups by two elements // Israel J. Math. 86, 1994. — P. 311–329.

2. *Bartholdi L., Grigorchuk R., Sunich Z.* Branch Groups. arXiv: math 0510294 v2 [math.GR]. – 19 Oct. – 2005.

3. *W.M. Kantor.* Some Cayley graphs for simple groups // Discrete Applies Mathematics, **V. 25**, 1989. — P. 99-104.

4. *Karmichael R.D.* Abstract definitions of the symmetric and alternating groups and certain other permutation groups // Quart. J. Math., 49, 1923.

5. *Protasov I., Zelenuk E.* Topologies on Groups Determined by Sequences // VNTL — Klasyka Publishers, 1996-2002, 2002. — 112 pp.

6. *Quick M.* Probabilistic generation of wreath products of non-Abelian finite simple groups. Commun. Algebra, 32(12) : 4753–4768, 2004.

7. *Quick M.* Probabilistic generation of wreath products of non-Abelian finite simple groups. II. Int. J. Algebra Comput., 16(3) : 493–503, 2006.

8. *Mustafa Gëokhan Benli.* Profinite completion of Grigorchuk's group is not finitely presented. arXiv:1011.3880v2 [math.GR], 2 Feb. – 2012.

9. *Alexey Muranov.* Finitely generated infinite simple groups of infinite commutator width. arXiv:math/0608688v4 [math.GR] 12 Sep. – 2009.

10. *Олійник Б.В., Сікора В.С., Сущанський В.І.* Метасимметрические и метазнакопеременные группы бесконечного ранга // Математичні Студії. – 2010. – Т.34, №1. – С.3–12.

11. *Заводя М.В., Сікора В.С., Сущанський В.І.* Двухелементні системи твірних метазнакозмінних груп скінченного рангу. // Математичні Студії. – 2010. – Т.34, №1. – С.3–12.