УДК 517.983

©2014 р. Ю.С. Лінчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО РІВНЯННЯ НАНДАКУМАРА-КАННАПАНА

Описано всі пари лінійних функціоналів на деяких просторах аналітичних функцій, які задовольняють рівняння Нандакумара-Каннапана.

All pairs of linear functionals on some spaces of analytic functions which satisfy Nandakumar-Kannappan's equation are described.

Нехай G – довільна область комплексної площини і $\mathcal{H}(G)$ – простір усіх аналітичних в G функцій, наділений топологією компактної збіжності. В [1] Л.А. Рубел, узагальнюючи формулу для диференціювання добутку двох функцій, поставив і розв'язав задачу про знаходження всіх пар лінійних неперервних функціоналів L та M на просторі $\mathcal{H}(G)$, які задовольняють співвідношення

$$L(fg) = L(f)M(g) + L(g)M(f)$$

для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G)$. Пізніше Н.Р. Нандакумар в [2] та Л. Зальцман в [3] різними способами розв'язали задачу Рубела в класі лінійних функціоналів, які діють у просторі $\mathcal{H}(G)$. В [4] описано всі пари лінійних неперервних операторів, які діють у просторі $\mathcal{H}(G)$ і задовольняють співвідношення, яке є операторним аналогом класичного рівняння Рубела.

В [5] Н.Р. Нандакумар поставив задачу про знаходження всіх пар лінійних функціоналів L та M на просторі $\mathcal{H}(G)$, які задовольняють співвідношення

$$L(fg) = L(f)L(g) + M(g)M(f)$$

для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G)$. Пізніше в [6] Н.Р. Нандакумар та П. Каннаппан повністю розв'язали задачу про опис в класі лінійних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$ розв'язків рівняння

$$L(fg) = L(f)L(g) - M(f)M(g). \qquad (1)$$

Подальші дослідження стосовно опису пар лінійних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$, які задовольняють подібні співвідношення, розглянуті у монографії П. Каннаппана [7].

В роботі [8] описано всі пари лінійних неперервних операторів, які діють у просторі $\mathcal{H}(G)$ для випадку довільної однозв'язної області G і задовольняють операторний аналог рівняння Нандакумара-Каннапана

$$(A(fg))(z) = (Af)(z)(Ag)(z) - (Bg)(z)(Bf)(z)$$

для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G)$ при $z \in G$.

В цій статті досліджено рівняння (1) в класі лінійних функціоналів на просторах аналітичних функцій, які є підпросторами просторів аналітичних на довільних множинах функцій. Ці простори охоплюють більшість класичних просторів аналітичних функцій.

Нехай F – довільна множина комплексних чисел. Через H позначимо векторний простір, який складається з аналітичних на множині F функцій і володіє наступними властивостями:

1°) $1 \in H$, $zH \subseteq H$;

2°) для довільної функції $f \in H$ і довільної точки $z_0 \in F$ функція

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \text{ при } z \neq z_0, \\ f'(z_0) \text{ при } z = z_0. \end{cases} \qquad (2)$$

належить до простору H;

3°) для довільної точки $z_1 \notin F$ функція $f(z) = \frac{1}{z-z_1}$ належить до простору H;

4°) добуток будь-яких двох функцій з простору H належить H.

Наведемо спочатку допоміжне твердження.

Лема. *Для того, щоб для ненульового лінійного на просторі H функціонала L виконувалося співвідношення*

$$L(zf(z)) = L(z)L(f(z)) \tag{3}$$

для довільної функції $f \in H$, необхідно і достатньо, щоб $L(f) = f(z_0)$, де $z_0 \in F$, або $L(f) = Cf(0)$ у випадку $0 \in G$, де $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Доведення. Припустимо, що для лінійного на просторі H функціонала L виконується рівність (3). Покладаючи в ній $f(z) = 1$, одержимо, що $L(1) = 1$, або $L(z) = 0$.

У випадку $L(1) = 1$ позначимо $L(z) = z_0$. Використовуючи (3), одержимо, що для довільної функції $f \in H$ виконується рівність

$$L((z - z_0)\, f(z)) = 0. \tag{4}$$

Якщо $z_0 \notin F$, то $\frac{f(z)}{z-z_0} \in H$ і з (4) випливає, що для довільної функції $f \in H$ виконується рівність

$$L(f(z)) = L\left((z - z_0)\frac{f(z)}{z - z_0}\right) = 0,$$

тобто $L = 0$. Якщо ж $z_0 \in F$, то $f(z) = (z-z_0)g(z)+f(z_0)$, де $g(z)$ визначається формулою (2). Використовуючи знову (4), одержимо, що $L(f) = f(z_0)$.

У випадку $L(z) = 0$ та $0 \notin F$ маємо, що для довільної функції $f \in H$:

$$L(f(z)) = L\left(z\frac{f(z)}{z}\right) = 0,$$

тобто $L = 0$. Якщо ж $0 \in F$, то зображаючи довільну функцію $f \in H$ у вигляді $f(z) = zg(z) + f(0)$, де $g(z)$ визначається формулою (2) для $z_0 = 0$ і використовуючи рівність (3), одержимо, що $L(f) = Cf(0)$, де $C = L(1)$. Необхідність умов леми доведено, а їх достатність встановлюється безпосередньою перевіркою.

Використовуючи лему, одержуємо опис мультиплікативних функціоналів на просторі H.

Наслідок. *Для того, щоб для ненульового лінійного на просторі H функціонала L виконувалося співвідношення*

$$L(fg) = L(f)L(g)$$

для довільних функції $f, g \in H$, необхідно і достатньо, щоб $L(f) = f(z_0)$, де $z_0 \in F$.

Припустимо, що пара лінійних функціоналів L та M на H задовольняє співвідношення (1) для довільних функцій f та g з H. Підставляючи в (1) $g = 1$, отримуємо, що

$$L(f)(L(1) - 1) = M(f)M(1). \tag{5}$$

для довільної функції $f \in H$.

Розглянемо далі можливі випадки.

I) Нехай $M(1) \neq 0$. Тоді з (5) випливає, що $M(f) = CL(f)$, де $C = \frac{L(1)-1}{M(1)}$. Враховуючи (1) одержимо, що

$$L(fg) = (1 - C^2)L(f)L(g) \tag{6}$$

для довільних функцій f та g з H. Якщо $1 - C^2 \neq 0$, то з (6) випливає, що функціонал $(1-C^2)L$ є мультиплікативним функціоналом на H. Використовуючи опис мультиплікативних функціоналів на просторі H ми отримуємо, що або $L = 0$, або існує точка $z_0 \in F$ така, що $L(f) = \frac{1}{1-C^2}f(z_0)$. Якщо $L = 0$, то з (1) одержуємо, що $M = 0$. В іншому випадку, маємо, що пара функціоналів L та M визначається наступним чином: $L(f) = \frac{1}{1-C^2}f(z_0)$, $M(f) = \frac{C}{1-C^2}f(z_0)$, де $C \in \mathbb{C}$, причому $C \neq \pm 1$.

Якщо $C = \pm 1$, то з (6) та (5) одержуємо, що $L = M = 0$.

Якщо $L = 0$, то з (1) випливає, що $M = 0$. Тому, надалі вважатимемо, що для пари функціоналів L, M, яка задовольняє співвідношення (1), функціонал L є ненульовим.

II) Нехай $M(1) = 0$, тоді, оскільки $L \neq 0$, то з (5) випливає, що $L(1) = 1$. Якщо $M(z) = 0$, то, використовуючи (1) та лему, одержимо, що $M = 0$ і існує точка $z_0 \in F$ така, що $L(f) = f(z_0)$. Надалі вважатимемо, що $M(z) \neq 0$.

Оскільки $L(1) = 1$, $M(1) = 0$ і $M(z) \neq 0$, то існує єдиний многочлен другого степеня виду $p(z) = z^2+bz+c$, який є нулем кожного з функціоналів L та M.

Нехай D – дискримінант квадратного тричлена $p(z)$. Далі розглянемо два можливі випадки.

1) Нехай $D \neq 0$. Тоді $p(z)$ має два різні корені z_1, z_2. Таким чином, для деяких різних комплексних чисел z_1 і z_2 виконуються

рівності

$$L((z-z_1)(z-z_2)) = M((z-z_1)(z-z_2)) = 0.$$

Розглянемо далі можливі випадки.

а) Нехай $z_1 \notin F, z_2 \notin F$. Для довільної функції $f(z)$ з простору H функція $\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}$ належить до простору H і, використовуючи (1), одержимо, що $L(f) = 0$ для довільної функції f з H. А це суперечить тому, що функціонал L є ненульовим.

б) Нехай $z_1 \in F$, а $z_2 \notin F$. Використовуючи властивість 2°) простору H, довільну функцію f з цього простору зобразимо у вигляді $f(z) = (z-z_1)g_1(z) + f(z_1)$, де $g_1(z)$ – деяка функція з простору H. Тоді зі співвідношення (1) одержимо, що $L(f) = f(z_1)$, $M = 0$.

в) Нехай $z_2 \in F$, а $z_1 \notin F$. Аналогічно, як і в попередньому випадку, отримаємо, що $L(f) = f(z_2)$, $M = 0$.

г) Нехай $z_1 \in F$, $z_2 \in F$. Використовуючи двічі властивість 2°) простору H, довільну функцію f з цього простору зобразимо у вигляді

$$f(z) = (z-z_1)(z-z_2)g_2(z) + \\ + \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} z + \frac{z_1 f(z_2) - z_2 f(z_1)}{z_1 - z_2},$$

де $g_2(z)$ – деяка функція з простору H.

Користуючись цим зображенням та співвідношенням (1), одержимо, що

$$L(f) = Af(z_1) + (1-A)f(z_2), \tag{7}$$

де $A = \frac{L(z)-z_2}{z_1-z_2}$.

Покладаючи в (1) $g(z) = z$, отримаємо, що для довільної функції $f \in H$

$$M(z)M(f) = (A^2 - A)(z_1 - z_2)(f(z_1) - f(z_2)).$$

Оскільки $M(z) \neq 0$, то звідси випливає, що

$$M(f) = B(f(z_1) - f(z_2)), \tag{8}$$

де $B = \frac{(A^2-A)(z_1-z_2)}{M(z)}$.

Використовуючи (7) і (8) одержимо, що співвідношення (1) рівносильне виконанню рівності

$$(A - A^2 + B^2)(f(z_1) - f(z_2))(g(z_1) - g(z_2)) = 0$$

для довільних функцій f та g з простору H. Покладаючи в цій рівності $f(z) = g(z) = z$, отримуємо, що

$$A - A^2 + B^2 = 0. \tag{9}$$

Таким чином, у цьому випадку одержуємо пару функціоналів L та M, які визначаються формулами (7) і (8), де A та B – деякі комплексні числа, для яких виконується співвідношення (9).

2) Нехай $D = 0$. Тоді $p(z) = (z-z_0)^2$, де z_0 – деяке комплексне число. Таким чином, в цьому випадку

$$L((z-z_0)^2) = M((z-z_0)^2) = 0.$$

Покажемо, що точка z_0 належить множині F. Якби $z_0 \notin F$, то для довільної функції $f \in H$ функція $\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}$ також належала б простору H. Використовуючи (1) ми одержали б, що $L = 0$, а це не так. Отже, $z_0 \in F$.

Візьмемо довільну функцію $f \in H$ і зобразимо її у вигляді $f(z) = (z-z_0)g(z) + f(z_0)$, де $g(z)$ – визначається формулою (2). Подамо функцію $g(z)$ у вигляді $g(z) = (z - z_0)g_1(z) + f'(z_0)$, де $g_1 \in H$. З цих рівностей випливає, що

$$f(z) = (z-z_0)^2 g_1(z) + f'(z_0)z + f(z_0) - z_0 f'(z_0).$$

Користуючись співвідношенням (1) одержимо, що для довільної функції f з простору H

$$L(f) = f(z_0) + Af'(z_0), \tag{10}$$

де $A = L(z) - z_0$. Підставляючи в (1) $g(z) = z$, одержимо, що для довільної функції f з простору H виконується рівність

$$M(f) = Bf'(z_0), \tag{11}$$

де $B = \frac{A^2}{M(z)}$. Оскільки $M(z) = B$, то $B^2 = A^2$ і ми отримуємо ще дві пари функціоналів:

$$L(f) = f(z_1) + Af'(z_1),\ M(f) = Af'(z_1);$$

$$L(f) = f(z_1) + Af'(z_1),\ M(f) = -Af'(z_1),$$

де A – деяке комплексне число.

Резюмуючи всі розглянуті випадки, одержуємо, що є правильними необхідні умови наступної теореми.

Теорема. *Для того, щоб функціонали L та M були лінійними на просторі H і задовольняли співвідношення* (1), *необхідно і достатньо, щоб пара цих функціоналів визначалася однією з наступних чотирьох умов:*

1) $L = 0$, $M = 0$;

2) $L(f) = \frac{1}{1-C^2} f(z_0)$, $M(f) = \frac{C}{1-C^2} f(z_0)$, *де* $z_0 \in F$, $C \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$;

3) $L(f) = Af(z_1) + (1-A)f(z_2)$, $M(f) = B(f(z_1) - f(z_2))$, *де* $z_1, z_2 \in F$, A *та* B – *довільні комплексні числа, для яких* $A - A^2 + B^2 = 0$;

4) $L(f) = f(z_0) + Af'(z_0)$, $M(f) = \omega Af'(z_0)$, *де* $z_0 \in F$, $A \in \mathbb{C}$, $\omega^2 = 1$.

Достатність умов теореми перевіряється безпосереднім обчисленням.

Зауваження. *Рівняння*

$$L(fg) = L(f)L(g) + M(f)M(g)$$

заміною $M_1 = iM$, *зводиться до рівняння виду* (1) *для функціоналів* L *та* M_1.

Якщо G – довільна область комплексної площини, то для простору $\mathcal{H}(G)$ аналітичних в області G функцій умови $1^\circ) - 4^\circ)$ виконуються. Таким чином, ми отримуємо інше розв'язання задачі Нандакумара-Каннапана. Зазначимо, що метод розв'язання цієї задачі для абстрактного простору H, який запропонований в даній роботі, відрізняється від наведеного в [6] для простору $\mathcal{H}(G)$, і є значно простішим. Іншим прикладом просторів аналітичних функцій, які задовольняють умови $1^\circ) - 4^\circ)$, є простір $H(\overline{G})$ функцій, аналітичних на замкненій області $\overline{G}$, де G – довільна область комплексної площини [9].

Якщо $F = \mathbb{C}$, то умова $3^\circ)$ для відповідного простору H виконується автоматично. Тому твердження теореми є правильним для випадку, коли H збігається з простором усіх многочленів над полем комплексних чисел, а також у випадку, коли H є одним з наступних підпросторів простору цілих функцій: $[\rho, \infty)$ або $[\rho, 0]$ [10].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Rubel L. A.* Derivation pairs on the holomorphic functions // Funkcial. Ekvac. – 1967. – №10. – P. 225 – 227.

2. *Nandakumar N. R.* A Note on Derivation Pairs // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – №21. – P. 535 – 539.

3. *Zalcman L.* Derivation pairs on algebras of analytic functions // J. Func. Anal. – 1970. – **5**, №3. – P. 329 – 333.

4. *Лінчук Ю.С.* Операторне узагальнення одного результата Рубела // Укр. матем. журнал. – 2011. – **63**, №12. – С. 1710 – 1716.

5. *Nandakumar N. R.* A note on the functional equation $M(fg) = M(f)M(g) + L(f)L(g)$ on $H(G)$ // Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari. – 1998. – **68**. – P. 13 – 17.

6. *Kannappan Pl., Nandakumar N. R.* On a cosine functional equation for operators on the algebra of analytic functions in a domain // Aeq. Math. – 2001. – **61**, №3. – P. 233 – 238.

7. *Kannappan Pl.* Functional Equations and Inequalities with Applications, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2009. – 810 p.

8. *Лінчук Ю.С.* Про операторний аналог теореми додавання для косинуса // Укр. мат. вісник. – 2014. – **11**, №1.– С. 69 – 78.

9. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie // J. reine und angew. Math. – 1953. – **191**. – P. 30 – 49.

10. *Леонтьев А. Ф.* Обобщения рядов экспонент. – М., Наука, 1981. – 321 с.