УДК 517.956.4

©2015 р. В.А. Літовченко, О.Б. Васько

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Буковинський державний фінансово-економічний університет

ЛОКАЛІЗАЦІЯ ГЛАДКИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

Досліджено властивість локального посилення збіжності розв'язку задачі Коші при $t \to +0$ до свого граничного значення для вироджених параболічних систем класу $\mathbb{SE}^t_{\overrightarrow{2b}}$.

For degenerate parabolic systems of the class $\mathbb{SE}^t_{\overrightarrow{2b}}$, we investigate the property of local improvement of the convergence of the Cauchy problem solution to its limiting value when $t \to +0$.

Вступ. Вироджені параболічні рівняння типу Колмогорова знайшли своє застосування у математичному моделюванні багатьох реальних процесів. Вивченню класичного рівняння дифузії з інерцією Колмогорова [1]

$$\left(\partial_t - x_1\partial_{x_2} - a^2\partial^2_{x_1}\right) u\left(t; x_1, x_2\right) = 0$$

та його різноманітних узагальнень присвячено багато праць (див. огляд у [2]).

Дослідження систем вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова розпочато відносно недавно [3–5]. У цих працях з'ясовується питання побудови та дослідження основних властивостей фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші (ФМРЗК) для систем з параболічною за Петровським головною частиною та коефіцієнтами, не залежними від просторової змінної.

У роботі [6] означено новий клас $\mathbb{SE}^t_{\overrightarrow{2b}}$ вироджених параболічних систем типу Колмогорова векторного порядку, який охоплює системи, розглянуті в [3–5]. Для таких систем побудовано ФМРЗК та досліджено її властивості в рамках просторів типу S Гельфанда і Шилова [7].

Коректну розв'язність задачі Коші для систем з класу $\mathbb{SE}^t_{\overrightarrow{2b}}$ у випадку, коли початкові дані є узагальненими функціями типу розподілів Гельфанда і Шилова встановлено у [8].

Дана робота є продовженням досліджень, проведених у [7,8]; у ній з'ясовується питання про можливість посилення збіжності при $t \to +0$ розв'язку задачі Коші для таких систем до свого узагальненого граничного значення f на тих областях зміни просторової змінної, де $f = 0$.

1. Допоміжні відомості. Нехай $\mathbb{N}$ — множина всіх натуральних чисел; $\mathbb{N}_m := \{1; \ldots; m\}$; $\mathbb{R}^m$ — дійсний простір розмірності $m \geq 1$; $\mathbb{R} := \mathbb{R}^1$, $\mathbb{Z}^m_+$ — множина всіх m-вимірних мультиіндексів, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{Z}^1_+$; i — уявна одиниця; $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток у просторі $\mathbb{R}^m$; $\|x\| := (x,x)^{\frac{1}{2}}$ для $x \in \mathbb{R}^m$; $|x + iy| := (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, якщо $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$; $z^l := z_1^{l_1} \ldots z_m^{l_m}$, $|z|^l := |z_1|^{l_1} \ldots |z_m|^{l_m}$, якщо $z := (z_1; \ldots; z_m) \in \mathbb{R}^m$, $l := (l_1; \ldots; l_m) \in \mathbb{Z}^m_+$; $\overrightarrow{\gamma} := (\gamma_1; \ldots; \gamma_m)$ - m-вимірний вектор, $\overrightarrow{1} := (1; \ldots; 1)$; запис $\overrightarrow{\alpha} \mho \overrightarrow{\beta}$, де $\mho$ — деяке відношення, означає, що це відношення виконується для всіх відповідних координат векторів $\overrightarrow{\alpha}$ і $\overrightarrow{\beta}$, при цьому, якщо $q := (q_1; \ldots; q_m) \in \mathbb{Z}^m_+$, $\{\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\gamma}\} \subset \mathbb{R}^m$, то $q^{q\overrightarrow{\gamma}} := q_1^{q_1\gamma_1} \ldots q_m^{q_m\gamma_m}$; $|\overrightarrow{\alpha}|_+^{\overrightarrow{\gamma}} := |\alpha_1|^{\gamma_1} + \ldots + |\alpha_m|^{\gamma_m}$, $|\overrightarrow{\alpha}|_+ := |\overrightarrow{\alpha}|_+^{\overrightarrow{1}}$ — скалярні величини (якщо $\overrightarrow{\alpha}$ — мультиіндекс або просторова змінна, то замість $\overrightarrow{\alpha}$ писатимемо α).

Припустимо, що n-вимірна просторова змінна x складається з n_1-вимірної змінної $x_1 := (x_{11}; \ldots; x_{1n_1})$, n_2-вимірної змінної $x_2 := (x_{21}; \ldots; x_{2n_2})$, n_3-вимірної змінної $x_3 := (x_{31}; \ldots; x_{3n_3})$, тобто $x := (x_1; x_2; x_3)$, де n_1, n_2 і n_3 — такі натуральні числа, що $n_3 \leq n_2 \leq n_1$ і $n = n_1 + n_2 + n_3$; $n_0 := n - n_1$. У зв'язку з цим, мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}^n_+$ записуватимемо у вигляді $k := (k_1; k_2; k_3)$, де

$k_j := (k_{j1}; \dots ; k_{jn_j})$, $j \in \mathbb{N}_3$.

Якщо $x = (x_1; x_2; x_3)$ і $x_j := (x_{j1}; \dots ; x_{jn_j})$ — точки відповідно з $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$, то

$$x'_j := (x_{j1}; \dots ; x_{jn_3}), x''_j := (x_{j(n_3+1)}; \dots ; x_{jn_2}),$$

$$x'''_1 := (x_{1(n_2+1)}; \dots ;\ x_{1n_1}), \hat{x}_1 := (x_{11}; \dots ; x_{1n_2});$$

ці позначення будемо використовувати і для інших подібних точок та векторів.

Крім цього, позначимо через

$$\Pi^m_M := \{(t, \xi)|\ t \in M, \xi \in \mathbb{R}^m\}$$

і нехай $\overrightarrow{2b} := (2b_1; \dots ; 2b_{n_1})$,

$$\overrightarrow{\alpha}^* := (\overrightarrow{1} - \overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}; \widehat{\overrightarrow{1} - \overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}}; (\overrightarrow{1} - \overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b})'),$$

$$\overrightarrow{\beta}^* := (\overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}; \widehat{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}}; (\overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b})').$$

При довільно фіксованих $T > 0$, $m \in \mathbb{N}$ та векторі $\overrightarrow{2b}$ розглянемо систему рівнянь

$$\left(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}}\right) u(t; x) =$$

$$= \mathbb{A}(t; \partial_{x_1}) u(t; x),\ (t; x) \in \Pi^n_{(0;T]}, \qquad (1)$$

з класу $\mathbb{SE}^t_{\overrightarrow{2b}}$ [6], у якій $u := \mathrm{col}(u_1; \dots ; u_m)$, а

$$\mathbb{A}(t; \partial_{x_1}) := \left(a^{lj}_0(t) \sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+=1} a_{k_1}(i\partial_{x_1})^{k_1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+<1} a^{lj}_{k_1}(t)(i\partial_{x_1})^{k_1} \right)^m_{l,j=1}$$

— матричний диференціальний вираз, коефіцієнти якого неперервні на $[0; T]$ комплекснозначні функції такі, що відповідний диференціальний вираз

$$\partial_t - \mathbb{A}(t; \partial_{x_1})$$

є $\overrightarrow{2b}$-параболічним на множині $\Pi^{n_1}_{(0;T]}$ [2].

У праці [6] для системи (1) побудована ФМРЗК G та досліджено її основні властивості. Зокрема, встановлено нескінченну диференційовність матриці G за просторовими змінними та існування додатних сталих A, B, c і δ таких, що для всіх $\{q, l\} \subset \mathbb{Z}^n_+$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $t \in (\tau; T]$ та $\tau \in [0; T)$ виконується оцінка

$$\left|\partial^q_x \partial^l_\xi G(t, x; \tau, \xi)\right| \le cA^{|q|_+} q^{q\overrightarrow{\beta^*}} B^{|l|_+} l^{l\overrightarrow{\beta^*}} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-\left|(l_1+q_1+\overrightarrow{1})/\overrightarrow{2b}\right|_+ - \left|\left(\widehat{\overrightarrow{1}+\ \overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}}\right)\cdot\left(l_2+q_2+\widehat{\overrightarrow{1}}\right)\right|_+}$$

$$\times (t-\tau)^{-\left|\left(\overrightarrow{2}+\overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}\right)'\cdot\left(l_3+q_3+\overrightarrow{1}'\right)\right|_+} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\delta \left(\sum_{j=1}^{n_1} \left((t-\tau)^{-\frac{1}{2b_j}} |x_{1j} - \xi_{1j}|\right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}} + \right.\right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_2} \left((t-\tau)^{-1-\frac{1}{2b_j}} |x_{2j} - \xi_{2j} + (t-\tau)x_{1j}|\right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_3} \left((t-\tau)^{-2-\frac{1}{2b_j}} |x_{3j} - \xi_{3j} + (t-\tau)x_{2j} + \right.$$

$$\left.\left.\left. +\ (t-\tau)^2 x_{1j}/2|\right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}} \right)\right\}. \qquad (2)$$

Ці властивості матриці G дозволили у [8] розглянути задачу Коші для системи (1) з початковою умовою

$$u(t; \cdot)|_{t=0} = f,\ f \in (\mathbb{S}^{\overrightarrow{\beta}}_{\overrightarrow{\alpha}})', \qquad (3)$$

де $\mathbb{S}^{\overrightarrow{\beta}}_{\overrightarrow{\alpha}}$ – векторний аналог простору $S^{\overrightarrow{\beta}}_{\overrightarrow{\alpha}}$ Гельфанда і Шилова, та встановити коректну розв'язність цієї задачі в такому вигляді: нехай початкова функція $f \in (\mathbb{S}^{\overrightarrow{\beta^*}}_{\overrightarrow{\alpha^*}})'$, тоді для задачі Коші (1), (3) існує єдиний неперервно залежний від початкових даних розв'язок, який є неперервно диференційовним за t, нескінченно диференційовним за x, задовольняє рівняння (1) у звичайному розумінні, а початкову умову (3) у сенсі слабкої збіжності у просторі $(\mathbb{S}^{\overrightarrow{\beta^*}}_{\overrightarrow{\alpha^*}})'$, при цьому, зображується формулою

$$u(t; x) = < f, G(t, x; 0, \cdot) >,\ (t; x) \in \Pi^n_{(0;T]}.$$

2. Основний результат. Передусім доведемо таке допоміжне твердження.

Лема. *Існують додатні сталі* c_0, A_0, B_0 *і* δ_0 *такі, що для всіх* $\{k, q\} \subset \mathbb{Z}^n_+$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $x_{lj} \ne \xi_{lj}$, $j \in \mathbb{N}_{n_l}$, $l \in \mathbb{N}_3$, *і* $t \in (0; 1)$ *виконується оцінка*

$$\left|\partial^q_x \partial^k_\xi G\left(t, x; 0, \xi\right)\right| \le c_0 t^n A_0^{|q|_+} B_0^{|k|_+} q^q k^k \times$$

$$\times\left(\prod_{j=1}^{n_1}|x_{1j}-\xi_{1j}|^{-\frac{2b_j m_{1j}(k,q)}{2b_j-1}}\right)\times$$

$$\times\left(\prod_{j=1}^{n_2}|x_{2j}-\xi_{2j}+tx_{1j}|^{-\frac{2b_j m_{2j}(k,q)}{2b_j-1}}\right)\times$$

$$\times\left(\prod_{j=1}^{n_3}\left|x_{3j}-\xi_{3j}+tx_{2j}+\frac{t^2x_{1j}}{2}\right|^{-\frac{2b_j m_{3j}(k,q)}{2b_j-1}}\right)\times$$

$$\times\exp\left\{-\delta_0\left(\sum_{j=1}^{n_1}\left(\frac{|x_{1j}-\xi_{1j}|}{t^{1/(2b_j)}}\right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}}+\right.\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{n_2}\left(\frac{|x_{2j}-\xi_{2j}+tx_{1j}|}{t^{1+1/(2b_j)}}\right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}}+$$

$$\left.\left.+\sum_{j=1}^{n_3}\left(\frac{|x_{3j}-\xi_{3j}+tx_{2j}+2^{-1}t^2x_{1j}|}{t^{2+1/(2b_j)}}\right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}}\right)\right\},$$

при $m(k,q)=(m_1(k,q),m_2(k,q),m_3(k,q))\in\mathbb{Z}_+^n$ *такому, що*

$$m_{1j}(k,q)=2b_j+\left[\left(1-\frac{1}{2b_j}\right)(k_{1j}+q_{1j}+1)\right],$$

$$j\in\mathbb{N}_{n_1},$$

$$m_{2j}(k,q)=1+\left[\frac{2b_j-1}{2b_j+1}+\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{1}{2b_j}\right)(k_{2j}+q_{2j}+1)\right],\ \ j\in\mathbb{N}_{n_2},\quad (4)$$

$$m_{3j}(k,q)=1+\left[\frac{2b_j-1}{4b_j+1}+\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{1}{2b_j}\right)(k_{3j}+q_{3j}+1)\right],\ \ j\in\mathbb{N}_{n_3}$$

(тут $[\cdot]$ *– ціла частина числа).*

Доведення. Оскільки

$$e^{-p}\le\frac{m!}{p^m},\quad p>0\quad(\forall m\in\mathbb{Z}_+),$$

то

$$t^{-\frac{1}{2b_j}(k_{1j}+q_{1j}+1)}k_{1j}^{\frac{1}{2b_j}k_{1j}}q_{1j}^{\frac{1}{2b_j}q_{1j}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\delta\left(\frac{|x_{1j}-\xi_{1j}|}{t^{1/(2b_j)}}\right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}}\right\}\le\left(\frac{2}{\delta}\right)^{m_{1j}}\times$$

$$\times t^{\frac{m_{1j}}{2b_j-1}-\frac{k_{1j}+q_{1j}+1}{2b_j}}k_{1j}^{\frac{1}{2b_j}k_{1j}}q_{1j}^{\frac{1}{2b_j}q_{1j}}m_{1j}!\times$$

$$\times|x_{1j}-\xi_{1j}|^{-\frac{2b_jm_{1j}}{2b_j-1}}\exp\left\{-\frac{\delta}{2}\left(\frac{|x_{1j}-\xi_{1j}|}{t^{1/(2b_j)}}\right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}}\right\},$$

$$m_{1j}\in\mathbb{Z}_+,\ j\in\mathbb{N}_{n_1},$$

$$t^{-\left(1+\frac{1}{2b_j}\right)(k_{2j}+q_{2j}+1)}k_{2j}^{\frac{1}{2b_j}k_{2j}}q_{2j}^{\frac{1}{2b_j}q_{2j}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\delta\left(\frac{|x_{2j}-\xi_{2j}+tx_{1j}|}{t^{1+1/(2b_j)}}\right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}}\right\}\le$$

$$\le\left(\frac{2}{\delta}\right)^{m_{2j}}t^{\frac{2b_j+1}{2b_j-1}m_{2j}-\frac{2b_j+1}{2b_j}(k_{2j}+q_{2j}+1)}k_{2j}^{\frac{1}{2b_j}k_{2j}}q_{2j}^{\frac{1}{2b_j}q_{2j}}\times$$

$$\times m_{2j}!\,|x_{2j}-\xi_{2j}+tx_{1j}|^{-\frac{2b_jm_{2j}}{2b_j-1}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\delta}{2}\left(\frac{|x_{2j}-\xi_{2j}+tx_{1j}|}{t^{1+1/(2b_j)}}\right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}}\right\},$$

$$m_{2j}\in\mathbb{Z}_+,\ j\in\mathbb{N}_{n_2},$$

$$t^{-\left(2+\frac{1}{2b_j}\right)(k_{3j}+q_{3j}+1)}k_{3j}^{\frac{1}{2b_j}k_{3j}}q_{3j}^{\frac{1}{2b_j}q_{3j}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\delta\left(\frac{\left|x_{3j}-\xi_{3j}+tx_{2j}+\frac{t^2x_{1j}}{2}\right|}{t^{2+1/(2b_j)}}\right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}}\right\}\le$$

$$\le\left(\frac{2}{\delta}\right)^{m_{3j}}t^{\frac{4b_j+1}{2b_j-1}m_{3j}-\frac{4b_j+1}{2b_j}(k_{3j}+q_{3j}+1)}k_{3j}^{\frac{1}{2b_j}k_{3j}}\times$$

$$\times q_{3j}^{\frac{1}{2b_j}q_{3j}}m_{3j}!\left|x_{3j}-\xi_{3j}+tx_{2j}+\frac{t^2x_{1j}}{2}\right|^{-\frac{2b_jm_{3j}}{2b_j-1}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\delta}{2}\left(\frac{\left|x_{3j}-\xi_{3j}+tx_{2j}+\frac{t^2x_{1j}}{2}\right|}{t^{2+1/(2b_j)}}\right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}}\right\},$$

$$m_{3j}\in\mathbb{Z}_+,\ j\in\mathbb{N}_{n_3}.$$

Розглянемо тепер нерівності

$$\frac{m_{1j}}{2b_j+1}-\frac{k_{1j}+q_{1j}+1}{2b_j}\ge1,\quad j\in\mathbb{N}_{n_1},$$

$$\frac{2b_j+1}{2b_j-1}m_{2j}-\frac{2b_j+1}{2b_j}(k_{2j}+q_{2j}+1)\ge1,\ (5)$$

$$j\in\mathbb{N}_{n_2},$$

$$\frac{4b_j+1}{2b_j-1}m_{3j}-\frac{4b_j+1}{2b_j}\left(k_{3j}+q_{3j}+1\right)\geq 1,$$
$$j\in\mathbb{N}_{n_3}.$$

Очевидно, що компоненти вектора $m\,(k,q)$ із $\mathbb{Z}_+^n$, які визначаються рівностями (4), є натуральними роз'язками нерівностей (5).

Зазначимо далі, що для всіх $\{\alpha,a,b,c\}\subset(0;+\infty)$

$$([a+\alpha b+\alpha c]+1)!\leq(([a]+4)+[\alpha b]+$$
$$+[\alpha c])!=\frac{(([a]+4)+[\alpha b]+[\alpha c])!}{([a]+4)!\,([\alpha b]+[\alpha c])!}\times$$
$$\times\frac{([\alpha b]+[\alpha c])!}{[\alpha b]!\,[\alpha c]!}\,([a]+4)!\,[\alpha b]!\,[\alpha c]!\leq$$
$$\leq([a]+4)!2^{(a+4+2(\alpha b+\alpha c))}\,(\alpha b)^{\alpha b}\,(\alpha c)^{\alpha c}.$$

Урахувавши все це, безпосередньо з оцінки (2) при $\{k,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n$ і відповідному $m\in\mathbb{Z}_+^n$ із компонентами (4), приходимо до твердження вихідної леми.

Лему доведено.

Правильне наступне твердження.

Теорема. *Нехай узагальнена функція $f\in\left(\mathbb{S}_{\overrightarrow{\alpha}^*}^{\overrightarrow{\beta}}\right)'\subset\left(\mathbb{S}_{\overrightarrow{\alpha}^*}^{\overrightarrow{\beta}^*}\right)'$ при $\overrightarrow{\beta}>\overrightarrow{1}$ на множині $Q\subset\mathbb{R}^n$ дорівнює нулеві, а $u\,(t;x)=\langle f,G\,(t,x;0,\cdot)\rangle$ – відповідний розв'язок задачі Коші (1), (3). Тоді $\partial_x^q u\,(t;x)$, $q\in\mathbb{Z}_+^n$, збігається до нуля при $t\to+0$ рівномірно стосовно змінної x на кожній компактній множині $\mathbb{K}\subset Q$.*

Доведення. Нехай $\mathbb{K}\subset\mathbb{K}_1\subset Q$, де $\mathbb{K}_1$ – деяка компактна множина з $\mathbb{R}^n$ така, що

$$\forall x\in\mathbb{K}\ \ \forall\xi\in\mathbb{R}^n\backslash\mathbb{K}_1:|x_{lj}-\xi_{lj}|\geq a_{lj}>0,$$
$$j\in\mathbb{N}_{n_l},\ l\in\mathbb{N}_3.$$

Побудуємо фінітну функцію $\eta_0\in\mathbb{S}_{\overrightarrow{\alpha}^*}^{\overrightarrow{\beta}}$ з носієм в Q так, щоб $\eta_0=1$ на $\mathbb{K}_1$. Тоді, оскільки у просторах типу S визначена операція множення, а елементи матричної функції $\partial_x^q G\,(t,x;0,\cdot)$ належать до простору $\mathbb{S}_{\overrightarrow{\alpha}^*}^{\overrightarrow{\beta}^*}$ при $x\in\mathbb{R}^n,\ t\in(0;T]$, то елементи матриць $\eta_0(\cdot)\partial_x^q G(t,x;0,\cdot)$ і $(1-\eta_0(\cdot))\partial_x^q G(t,x;0,\cdot)$ належать до $\mathbb{S}_{\overrightarrow{\alpha}^*}^{\overrightarrow{\beta}}$ при зазначених t та x.

Отже,

$$\partial_x^q u\,(t;x)=\langle f,\eta_0(\cdot)\partial_x^q G\,(t,x;0,\cdot)\rangle+$$
$$+\langle f,\eta_1(\cdot)\partial_x^q G\,(t,x;0,\cdot)\rangle,\quad(t;x)\in\Pi_{(0;T]}^n,$$

де $\eta_1(\cdot):=1-\eta_0(\cdot)$. Урахувавши те, що узагальнена функція f дорівнює нулю на Q, а $\mathrm{supp}\,(\eta_0(\cdot)\partial_x^q G\,(t,x;0,\cdot))\subset Q$, з попередньої рівності одержуємо, що

$$\partial_x^q u\,(t;x)=t^n\left\langle f,t^{-n}\eta_1(\cdot)\partial_x^q G\,(t,x;0,\cdot)\right\rangle,$$

при $(t;x)\in\Pi_{(0;T]}^n$.

Для доведення теореми досить установити рівномірну обмеженість стосовно змінних t, $0<t<<1$, $x\in\mathbb{K}$ і $\xi\in\mathbb{R}^n$ сукупності функцій $\omega_{t,x}(\xi):=t^{-n}\eta_1(\xi)\partial_x^q G\,(t,x;0,\xi)$ у просторі $\mathbb{S}_{\overrightarrow{\alpha}^*}^{\overrightarrow{\beta}}$, тобто встановити оцінку

$$\left|\partial_\xi^k\omega_{t,x}(\xi)\right|\leq cA^{|k|_+}k^{\overrightarrow{\beta}k}e^{-\delta|\xi|_+^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\alpha}^*}},k\in\mathbb{Z}_+^n\quad(6)$$

(тут величини c, A і δ не залежать від t, x, ξ і k). Але, оскільки $\omega_{t,x}(\xi)=0$ для $\xi\in\mathbb{K}_1$, то оцінку (6) досить установити лише для $\xi\in\mathbb{R}^n\backslash\mathbb{K}_1$.

Згідно формули Лейбніца диференціювання добутку функцій маємо

$$\left|\partial_\xi^k\omega_{t,x}(\xi)\right|\leq$$
$$\leq t^{-n}\sum_{|l|_+=0}^{|k|_+}C_k^l\left|\partial_\xi^l\eta_1(\xi)\right|\left|\partial_\xi^{k-l}\partial_x^q G\,(t,x;0,\xi)\right|=$$
$$=t^{-n}\Bigg\{\left|\partial_\xi^k\partial_x^q G\,(t,x;0,\xi)\right|+$$
$$+\sum_{|l|_+=0}^{|k|_+}C_k^l\left|\partial_\xi^{k-l}\eta_0(\xi)\right|\left|\partial_\xi^l\partial_x^q G\,(t,x;0,\xi)\right|\Bigg\}.$$

Зваживши тепер на твердження попередньої леми та належність η_0 до $\mathbb{S}_{\overrightarrow{\alpha}^*}^{\overrightarrow{\beta}}$, для $t\in(0;1)$, $\{k,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n$, $x\in\mathbb{K}$ і $\xi\in\mathbb{R}^n\backslash\mathbb{K}_1$ одержимо

$$\left|\partial_\xi^k\omega_{t,x}(\xi)\right|\leq c_0A_0^{|q|_+}q^q\left\{B_0^{|k|_+}k^k\times\right.$$
$$\times\left(\prod_{j=1}^{n_1}|x_{1j}-\xi_{1j}|^{-\frac{2b_jm_{1j}(k,q)}{2b_j-1}}\right)\times$$
$$\times\left(\prod_{j=1}^{n_2}|x_{2j}-\xi_{2j}+tx_{1j}|^{-\frac{2b_jm_{2j}(k,q)}{2b_j-1}}\right)\times$$

$$\times\left(\prod_{j=1}^{n_3}\left|x_{3j}-\xi_{3j}+tx_{2j}+\frac{t^2x_{1j}}{2}\right|^{-\frac{2b_jm_{3j}(k,q)}{2b_j-1}}\right)+$$

$$+c_1\sum_{|l|_+=0}^{|k|_+}2^{|k|_+}B_1^{|k-l|_+}\left(k-l\right)^{\beta(k-l)}e^{-\delta_1|\xi|_+^{\vec{1}/\alpha^*}}\times$$

$$\times B_0^{|l|_+}l^l\left(\prod_{j=1}^{n_1}|x_{1j}-\xi_{1j}|^{-\frac{2b_jm_{1j}(l,q)}{2b_j-1}}\right)\times \qquad (7)$$

$$\times\left(\prod_{j=1}^{n_2}|x_{2j}-\xi_{2j}+tx_{1j}|^{-\frac{2b_jm_{2j}(l,q)}{2b_j-1}}\right)\times$$

$$\left.\times\left(\prod_{j=1}^{n_3}\left|x_{3j}-\xi_{3j}+tx_{2j}+\frac{t^2x_{1j}}{2}\right|^{-\frac{2b_jm_{3j}(l,q)}{2b_j-1}}\right)\right\}$$

$$\times\exp\left\{-\delta_0\left(\sum_{j=1}^{n_1}\left(\frac{|x_{1j}-\xi_{1j}|}{t^{1/(2b_j)}}\right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}}+\right.\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{n_2}\left(\frac{|x_{2j}-\xi_{2j}+tx_{1j}|}{t^{1+1/(2b_j)}}\right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}}+$$

$$\left.\left.+\sum_{j=1}^{n_3}\left(\frac{\left|x_{3j}-\xi_{3j}+tx_{2j}+\frac{t^2x_{1j}}{2}\right|}{t^{2+1/(2b_j)}}\right)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}}\right)\right\}.$$

Далі, оскільки $x\in\mathbb{K}$, то існує такий вектор $r=(r_1,r_2,r_3)\in\mathbb{R}^n$ з додатними компонентами, що для всіх $x\in\mathbb{K}$ виконуються такі нерівності:

$$|x_{lj}|\le r_{lj},\quad j\in\mathbb{N}_{n_l},\ l\in\mathbb{N}_3.$$

Тоді для $x\in\mathbb{K}$, $\xi\in\mathbb{R}^n\backslash\mathbb{K}_1$ і $t\in(0;r_0)$, $r_0:=$ $=\min\left\{\min\limits_{j\in\mathbb{N}_{n_2}}\left\{\frac{a_{2j}}{2r_{2j}}\right\},\min\limits_{j\in\mathbb{N}_{n_3}}\left\{\frac{a_{3j}}{2(r_{2j}+r_{3j})}\right\},1\right\}$,

$$|x_{1j}-\xi_{1j}|\ge a_{1j}>0,\quad j\in\mathbb{N}_{n_1},$$

$$|x_{2j}-\xi_{2j}+tx_{1j}|\ge|x_{2j}-\xi_{2j}|-t\,|x_{1j}|\ge$$

$$\ge|x_{2j}-\xi_{2j}|-tr_{2j}\ge\frac{a_{2j}}{2}>0,\quad j\in\mathbb{N}_{n_2},$$

$$\left|x_{3j}-\xi_{3j}+tx_{2j}+\frac{t^2x_{1j}}{2}\right|\ge$$

$$\ge|x_{3j}-\xi_{3j}|-t\left(|x_{2j}|+\frac{t|x_{1j}|}{2}\right)\ge$$

$$\ge|x_{3j}-\xi_{3j}|-t\left(r_{2j}+r_{3j}\right)\ge\frac{a_{3j}}{2}>0,\quad j\in\mathbb{N}_{n_3}.$$

Крім цього, для зазначених x, ξ і t

$$|x_{1j}-\xi_{1j}|\ge|\xi_{1j}|-r_{1j},\quad j\in\mathbb{N}_{n_1},$$

$$|x_{2j}-\xi_{2j}+tx_{1j}|\ge|\xi_{2j}|-(r_{1j}+r_{2j}),\quad j\in\mathbb{N}_{n_2},$$

$$\left|x_{3j}-\xi_{3j}+tx_{2j}+2^{-1}t^2x_{1j}\right|\ge$$

$$\ge|\xi_{3j}|-(r_{1j}+r_{2j}+r_{3j}),\quad j\in\mathbb{N}_{n_3}.$$

Звідси та з нерівності (7), урахувавши структуру (4) компонент вектора $m(k,q)$, одержуємо оцінку (6).

Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Kolmogoroff A.N.* Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownshen Bewegung) // Ann. Math. 1934. **35**. P. 116–117.

2. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. 2004. **152**. 390 p.

3. *Малицька Г.П.* Системи рівнянь типу Колмогорова // Укр. мат. журн. 2008. **60**, №12. С. 1650–1663.

4. *Малицкая А.П.* Фундаментальная матрица решений задачи Коши для одного класса систем уравнений типа Колмогорова // Дифференц. уравнения. 2010. **46**, №5. С. 748–751.

5. *Буртняк І.В., Малицька Г.П.* Фундаментальні матриці розв'язків одного класу вироджених параболічних системи // Карпатскі мат. публ. 2012. **4**, №1. С. 12–22.

6. *Литовченко В.А., Настасий Е.Б.* Вырожденные параболические системы уравнений типа Колмогорова векторного порядка // Сиб. мат. журн. 2012. **53**, №1. С. 148–164.

7. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. М.: Физматгиз, 1958.

8. *Литовченко В.А., Васько Е.Б.* Задача Коши для вырожденные параболические системы уравнений типа Колмогорова векторного порядка с обобщенными начальными данными // Дифференц. уравнения. 2014. **50**, №12. С. 1598–1606.