УДК 517.51

©2014 р. В.К.Маслюченко, Н.М.Ровенко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО НЕПЕРЕРВНІСТЬ ЛЕДЬ НЕПЕРЕРВНИХ ЛІНІЙНИХ І БІЛІНІЙНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Доведено, що кожне білінійне ледь неперервне у деякій точці відображення $f : X \times Y \to Z$, де X, Y, Z – довільні топологічні векторні простори, є неперервним, а якщо простір Z локально обмежений, то неперервним буде і кожне локально обмежене в деякій точці білінійне відображення $f : X \times Y \to Z$.

We prove that every bilinear somewhat continuous at some point mapping $f : X \times Y \to Z$, where X, Y, Z are arbitrary topological vector spaces, is continuous. If, moreover, the space Z is locally bounded then every locally bounded at some point bilinear mapping $f : X \times Y \to Z$ is continuous.

1.Вступ. У XX столітті в математиці виникло багато послаблень неперервності (квазінеперервність, ледь неперервність, майже неперервність, майже ледь неперервність, тощо), яких зараз нараховується понад 100. Стосовно кожного з них виникає питання: чи буде лінійне відображення $f : X \to Y$ між топологічними векторними просторами (коротко: ТВП) X і Y, яке ослаблено неперервне в тому чи іншому сенсі, неперервним? Аналогічне питання можна ставити і для поліноміальних, білінійних чи n-лінійних відображень.

Можливо, однією з перших теорем на цю тему є класична теорема Банаха про замкнений графік [1, с.35], з якої випливає, що кожне лінійне відображення $f : X \to Y$ між банаховими просторами X і Y, яке має замкнений графік, буде неперервним. В.Птак встановив теорему про неперервність лінійного відображення, в якій фігурує майже неперервність [2, с.125, т.7]: якщо X і Y – гаусдорфові локально опуклі простори, причому простір Y суперповний, і $f : X \to Y$ лінійне майже неперервне відображення, що має замкнений графік, то f неперервне. З неї він отримав свою теорему про замкнений графік [2, с.127, т.8]: якщо X – гаусдорфовий бочковий простір, Y – гаусдорфовий суперповний простір і $f : X \to Y$ – лінійне відображення, яке має замкнений графік, то f неперервне. Відомі й інші варіанти теореми про замкнений графік [3, 4]. Ще один відомий нам результат належить З.Пьотровському [2, th.4], який помітив, що для довільних ТВП X і Y кожне лінійне ледь неперервне відображення $f : X \to Y$ буде неперервним.

У цій роботі ми розвиваємо результат Пьотровського, встановивши, що для довільних ТВП X, Y і Z кожне білінійне ледь неперервне відображення $f : X \times Y \to Z$ буде неперервним. Крім того, ми доводимо, що лінійне відображення $f : X \to Y$ з ТВП X у локально обмежений ТВП Y, яке локально обмежене в деякій точці x з X, буде неперервним. Подібний результат є і для білінійних відображень.

2. Неперервність лінійних ледь неперервних відображень. Нехай X і Y – топологічні простори, $f : X \to Y$ – відображення і $x_0 \in X$. Нагадаємо, що відображення f називається *ледь неперервним у точці* x_0, якщо для кожного околу V точки $y_0 = f(x_0)$ у просторі Y існує така відкрита непорожня множина G в X, що $f(G) \subseteq V$, іншими словами, якщо $int f^{-1}(V) \neq \varnothing$ для кожного околу V точки y_0 в Y. Кажуть, що f *ледь неперервне*, якщо воно є таким у кожній точці x з простору X.

Почнемо з доведення результату Пьотровського у покращеній редакції. Під *лінійністю* відображення $f : X \to Y$, де X і Y – векторні простори над одним і тим же полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, ми розуміємо його *адитивність* і *однорідність*, які означають відповідно, що $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ і $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ для довільних векторів x_1, x_2 і x з X і скаляра $\lambda \in \mathbb{K}$.

Теорема 1. Нехай X і Y – ТВП, $f : X \to Y$ – лінійне відображення, яке ледь неперервне у деякій точці x_0 з X. Тоді f неперервне.

Доведення. Ми будемо доводити неперервність f у точці 0. Оскільки f лінійне, то $f(0) = 0$. Нехай V – довільний окіл нуля в Y. Як добре відомо [6, с.15], існує такий заокруглений окіл нуля V_0 у просторі Y, що $V_0 + V_0 \subseteq V$. Оскільки f ледь неперервне в точці x_0 і множина $y_0 + V_0$, де $y_0 = f(x_0)$, є околом точки y_0 в Y, то існує така відкрита непорожня множина G в X, що $f(G) \subseteq y_0 + V_0$. Множина $U = G - G$ містить 0, адже існує $a \in G$, бо $G \neq \varnothing$, і $0 = a - a \in U$. Крім того, вона відкрита в X, адже $U = \bigcup\limits_{y \in G} (G - y)$, а множини $G - y$ відкриті в X, бо $G - y = \varphi(G)$, де $\varphi(G) = x - y$, а зсув $\varphi : X \to X$ – це гомеоморфізм [6, п.6, с.13]. Таким чином, U – це окіл нуля в X. Але з лінійності відображення f випливає, що

$$f(U) = f(G) - f(G) \subseteq (y_0 + V_0) - (y_0 + V_0) = \\ = y_0 + V_0 - y_0 - V_0 = V_0 - V_0 = V_0 + V_0 \subseteq V,$$

бо множина V_0 заокруглена. Таким чином, $f(U) \subseteq V$, що дає нам неперервність f у точці 0. Звідси ми негайно отримуємо [7, тв.2, с.11], що f – неперервне відображення.

3. Неперервність локально обмежених відображень. Нагадаємо, що підмножина A ТВП X називається *обмеженою* [6, с.45], якщо вона поглинається будь-яким околом нуля U в X, тобто для кожного околу нуля U в X існує таке $\gamma > 0$, що $A \subseteq \lambda U$, як тільки $|\lambda| \geq \gamma$.

Нехай X – топологічний простір (коротко: ТП), Y – ТВП і $f : X \to Y$ – відображення. Воно називається *локально обмеженим у точці* $x_0 \in X$, якщо існує такий окіл U точки x_0 в X, що його образ $f(U)$ – це обмежена множина у просторі Y.

ТВП Y називається *локально обмеженим* [6, п.28, с.47], якщо в ньому існує обмежений окіл нуля V. Якщо V – обмежений окіл нуля в Y, то, як легко перевірити [6, тв.3, с.48], система його кратних $\{\varepsilon V : \varepsilon > 0\}$ є базою околів нуля в Y. Локально обмеженими будуть всі нормовані і p-нормовані простори.

Теорема 2. Нехай X – ТП, Y – локально обмежений ТВП і $f : X \to Y$ ледь неперервне в деякій точці $x_0 \in X$ відображення. Тоді f буде локально обмеженим у всіх точках деякої непорожньої відкритої множини G у просторі X.

Доведення. Оскільки простір Y локально обмежений, то в ньому існує обмежений окіл нуля V. Тоді його зсув $y_0 + V$, де $y_0 = f(x_0)$, буде обмеженим околом точки y_0 в Y. З ледь неперервності f у точці x_0 випливає, що існує така відкрита в X непорожня множина G, що $f(G) \subseteq y_0 + V$. Множина G є околом кожної своєї точки, а її образ $f(G)$ – це обмежена множина в просторі Y, як підмножина обмеженої множини $y_0 + V$. Тому f локально обмежена в кожній точці з G.

Звичайно, локально обмежена функція чи навіть обмежена не зобов'язана бути ледь неперервною, наприклад, функція Діріхле $f = \chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обмежена, але не є ледь неперервною в жодній точці з $\mathbb{R}$.

У тому випадку, коли Y – локально обмежений ТВП, можна запропонувати і такий підсилений варіант теореми 1.

Теорема 3. Нехай X – ТВП, Y – локально обмежений ТВП і $f : X \to Y$ – лінійне відображення, яке є локально обмеженим у деякій точці x_0 простору X. Тоді f неперервне.

Доведення. За умовою існує такий окіл U_{x_0} точки x_0 в X, що його образ $f(U_{x_0})$ – це обмежена множина у просторі Y. Оскільки X – це ТВП, то існує такий окіл нуля U в X, що $U_{x_0} = x_0 + U$. З лінійності відображення f випливає, що

$$B = f(U) = f(U_{x_0} - x_0) = f(U_{x_0}) - f(x_0).$$

Тоді образ $B = f(U)$ – це обмежена множина у просторі Y, бо такою є образ $f(U_{x_0})$.

Нехай V – обмежений окіл нуля в Y. Тоді система $\{\varepsilon V : \varepsilon > 0\}$ – це база околів нуля в Y. Окіл V поглинає множину B, тому існує така константа $\gamma > 0$, що $B \subseteq \gamma V$. З однорідності f тоді випливає, що для $\delta = \frac{\varepsilon}{\gamma}$

$$f(\delta U) = \delta f(U) = \delta B \subseteq \delta\gamma V = \varepsilon V.$$

Оскільки δU – це теж окіл нуля разом з U, то отримане включення $f(\delta U) \subseteq \varepsilon V$ показує, що відображення f неперервне в нулі, а значить, і в кожній точці з X.

4. Білінійні відображення. Для відображення $f : X \times Y \to Z$ і точки $p = (x, y) \in X \times Y$ покладемо $f^x(y) = f(p) = f_y(x)$. Нехай X, Y і Z – векторні простори над одним і тим же полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *білінійним*, якщо воно нарізно лінійне, тобто для кожного $x \in X$ і кожного $y \in Y$ відображення $f^x : Y \to Z$ і $f_y : X \to Z$ лінійні. Наступне твердження добре відоме, але його доведення годі шукати у монографіях з ТВП, у книзі Гельмута Шефера [8, с.152, вправа 16] частина його пропонується як вправа. Ми дамо тут його доведення для повноти викладу.

Теорема 4. Нехай X, Y і Z – ТВП над одним і тим же полем $\mathbb{K}$ і $f : X \times Y \to Z$ – білінійне відображення. Тоді наступні умови рівносильні:

(i) f неперервне;

(ii) f неперервне в деякій точці $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$;

(iii) f неперервне в точці $0 = (0, 0)$.

Доведення. Під неперервністю відображення $f : X \times Y \to Z$ у точці $p_0 = (x_0, y_0)$ ми розуміємо його сукупну неперервність, яка означає, що для кожного околу W_{z_0} точки $z_0 = f(p_0)$ у просторі Z існують такі околи U_{x_0} і V_{y_0} точок x_0 і y_0 у просторах X і Y відповідно, що $f(U_{x_0} \times V_{y_0}) \subseteq W_{z_0}$. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ очевидна, бо неперервність відображення f означає його неперервність у кожній точці $p_0 \in X \times Y$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Нехай f неперервне в точці $p_0 = (x_0, y_0)$. Ясно, що тоді лінійні відображення $f^{x_0} : Y \to Z$ і $f_{y_0} : X \to Z$ будуть неперервними у точках y_0 і x_0 відповідно. Але в такому разі, як добре відомо, вони будуть неперервні і в кожній точці, зокрема, в нулі.

Доведемо, що f неперервне в точці $(0, 0)$. Нехай W – довільний окіл нуля в Z. Знайдемо такий заокруглений окіл нуля W_0 в Z, що $W_0 + W_0 + W_0 \subseteq W$ і такі околи нуля U і V у просторах X і Y відповідно, що $f^{x_0}(V) \subseteq W_0$, $f_{y_0}(U) \subseteq W_0$ і $f((x_0+U)\times(y_0+V)) \subseteq z_0 + W_0$. З білінійності відображення f випливає, що

$$f(x_0 + u, y_0 + v) =$$
$$f(x_0, y_0) + f(x_0, v) + f(u, y_0) + f(u, v)$$

для довільних u і v з X. Тому для $u \in U$ і $v \in V$ матимемо, що $f(u, v) = f(x_0 + u, y_0 + v) - z_0 - f^{x_0}(v) - f_{y_0}(u) \in W_0 - W_0 - W_0 = W_0 + W_0 + W_0 \subseteq W$. Таким чином, $f(U \times V) \subseteq W$, що і дає нам неперервність у точці $(0, 0)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Нехай f неперервне в точці $(0, 0)$ і $p_0 = (x_0, y_0)$ – довільна точка з добутку $X \times Y$. Доведемо, що f неперервне і в точці p_0.

Спочатку з'ясуємо, що відображення f^{x_0} і f_{y_0} неперервні в точці 0. Нехай W – довільний окіл нуля в Z. З неперервності f у точці $(0, 0)$ випливає, що існують такі околи нуля U і V у просторах X і Y відповідно, що $f(U \times V) \subseteq W$. Оскільки околи нуля в ТВП радіальні множини [6, с.13], то існують такі числа $\alpha > 0$ і $\beta > 0$, що $x_0 \in \alpha U$ і $y_0 \in \beta V$. В такому разі

$$f^{x_0}(\frac{1}{\alpha}V) \in f(\alpha U \times \frac{1}{\alpha}V) = \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} f(U \times V) \subseteq W$$

і так само $f_{y_0}(\frac{1}{\beta}U) \subseteq W$. Оскільки $\frac{1}{\alpha}V$ і $\frac{1}{\beta}U$ – це околи нуля у просторах Y і X відповідно, то доведені включення і дають нам неперервність f^{x_0} і f_{y_0} в нулі.

Тепер візьмемо такий заокруглений окіл нуля W_0 в Z, що $W_0 + W_0 + W_0 \subseteq W$ і знайдемо такі околи нуля U_0 і V_0 у просторах X і Y відповідно, що $f^{x_0}(V_0) \subseteq W_0$, $f_{y_0}(U_0) \subseteq W_0$ і $f(U_0 \times V_0) \subseteq W_0$. В такому разі, коли $u = x - x_0 \in U_0$ і $v = y - y_0 \in V_0$, то

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0, v) + f(u, y_0) +$$
$$+ f(u, v) \in W_0 + W_0 + W_0 \subseteq W,$$

а це і дає нам неперервність відображення f у точці p_0.

5. Неперервність нарізно неперервних ледь неперервних білінійних відображень. У цьому пункті ми доведемо теорему, яку підсилимо далі іншим методом.

Теоема 5. Нехай X, Y і Z – ТВП над одним і тим же полем $\mathbb{K}$, $f : X \times Y \to Z$ – білінійне нарізно неперервне відображення, яке ледь неперервне в деякій точці $p_0 = (x_0, y_0)$ з $X \times Y$. Тоді f неперервне.

Доведення. На основі теореми 4 досить довести неперервність f у точці $(0,0)$, для якої $f(0,0) = 0$. Розглянемо окіл нуля W у просторі Z і знайдемо для нього такі околи нуля U і V у просторах X і Y відповідно, що $f(U \times V) \subseteq W$.

Спочатку візьмемо такий заокруглений окіл нуля W_0 в Z, що

$$W_0 + W_0 + W_0 + W_0 \subseteq W.$$

Нехай $z_0 = f(p_0)$. Оскільки f ледь неперервне в точці p_0, то існує така відкрита непорожня множина G в $X \times Y$, що $f(G) \subseteq z_0 + W_0$. Візьмемо якусь точку $q_0 = (u_0, v_0) \in G$. Оскільки відображення f^{u_0} і f_{v_0} неперервні і множина G відкрита в $X \times Y$, то існують такі околи нуля U і V у просторах X і Y відповідно, що $(u_0 + U) \times (v_0 + V) \subseteq G$, $f^{u_0}(V) \subseteq W_0$ і $f_{v_0}(U) \subseteq W_0$. Тоді для $u \in U$ і $v \in V$ будемо мати

$$f(u,v) =$$
$$f(u_0+u, v_0+v) - f(u_0, v) - f(u, v_0) - f(u_0, v_0) = f(u_0+u, v_0+v) - f(u_0, v_0) - f^{u_0}(v) - f_{v_0}(u) \in (z_0 + W_0) - (z_0 + W_0) - W_0 - W_0 = z_0 + W_0 - z_0 - W_0 - W_0 - W_0 = W_0 + W_0 + W_0 + W_0 \subseteq W,$$

отже, $f(U \times V) \subseteq W$, що й треба було довести.

6. Неперервність ледь неперервних білінійних відображень. Тут ми покажемо, що умову нарізної неперервності відображення f у теоремі 5 можна зняти.

Теорема 6. Нехай $f : X \times Y \to Z$ – білінійне ледь неперервне в деякій точці $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$ відображення. Тоді f неперервне.

Доведення. Нехай W – довільний окіл нуля в Z і W_0 – такий заокруглений окіл нуля в Z, що $W_0 + W_0 + W_0 + W_0 \subseteq W$. Оскільки f ледь неперервне в точці p_0, то існують такі відкриті непорожні множини G і H у просторах X і Y відповідно, що $f(G \times H) \subseteq z_0 + W_0$. Множина $U = G - G$ – це окіл нуля в просторі X. Для довільного $u \in U$ існують такі вектори x_1 і x_2 з G, що $u = x_1 - x_2$. Тоді для довільного $y \in H$ будемо мати, що $f(u,y) = f(x_1 - x_2, y) = f(x_1, y) - f(x_2, y) \in z_0 + W_0 - z_0 - W_0 = W_0 + W_0$. Отже, $f(U \times H) \subseteq W_0 + W_0$. Далі множина $V = H - H$ – це окіл нуля в Y. Для довільного $v \in V$ існують вектори y_1 і y_2 з H, такі, що $v = y_1 - y_2$. Тоді для довільного $u \in U$ отримаємо, що $f(u,v) = f(u, y_1 - y_2) = f(u, y_1) - f(u, y_2) \in W_0 + W_0 - W_0 - W_0 = W_0 + W_0 + W_0 + W_0 \subseteq W$. Таким чином, виходить, що $f(U \times V) \subseteq W$, а це і дає нам неперервність f у точці $(0,0)$. Тому f неперервне на основі теореми 4.

7. Неперервність білінійних локально обмежених відображень. Аналогічно до теореми 2 можна довести відповідне твердження і для білінійних відображень.

Теорема 7. Нехай X і Y – ТВП, а Z – локально обмежений ТВП і $f : X \times Y \to Z$ – білінійне відображення, яке локально обмежене у якісь точці $p_0 = (x_0, y_0)$ з $X \times Y$. Тоді f неперервне.

Доведення. За умовою існують такі околи U_{x_0} і V_{y_0} точок x_0 і y_0 у просторах X і Y відповідно, що множина $A = f(U_{x_0} \times V_{y_0})$ обмежена в Z. Множини $U = U_{x_0} - U_{x_0}$ і $V = V_{y_0} - V_{y_0}$ – це околи нуля у просторах X і Y відповідно. Для довільних $u \in U$ і $v \in V$ існують такі вектори x_1 і x_2 з U_{x_0} і y_1 та y_2 з V_{y_0}, що $u = x_1 - x_2$ і $v = y_1 - y_2$. Тоді $f(u,v) = f(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1) - f(x_1, y_2) + f(x_2, y_2) \in A - A - A + A = B$. Отже, $f(U \times V) \subseteq B$, причому множина B обмежена разом з множиною A.

За припущенням існує обмежений окіл нуля W в просторі Z. Він поглинає обмежену множину B, тому існує таке $\gamma > 0$, що $\gamma W \supseteq B$. Для даного $\varepsilon > 0$ розглянемо число $\delta = \frac{\varepsilon}{\gamma}$. Тоді

$$f(\delta U \times V) = \delta f(U \times V) \subseteq \delta B = \frac{\varepsilon}{\gamma} B \subseteq \varepsilon W.$$

Оскільки δU – це окіл нуля і множини виду εW, де $\varepsilon > 0$, утворюють базу околів нуля в просторі Z, то включення $f(\delta U \times V) \subseteq \varepsilon W$ показує, що відображення f неперервне в точці $(0,0)$, а значить, і в кожній точці за теоремою 4.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Банах С.С.* Курс функціонального аналізу. – К.: Рад.школа, 1948. – 216 с.
2. *Маслюченко В.К.* Елементи теорії двоїстості. – Чернівці: Рута, 2005. – 160 с.
3. *Köthe G.* Topological vector spaces. I. – New York – Heidelberg – Berlin: Springer–Verlag, 1969. – 554 p.
4. *Köthe G.* Topological vector spaces. II. – New York – Heidelberg – Berlin: Springer–Verlag, 1979. – 332 p.
5. *Piotrowski Z.* Somewhat continuity on linear topological spaces implies continuity // Math. Slovaca. – 1979. – **29**, № 3. – P.289 - 292.
6. *Маслюченко В.К.* Перші типи топологічних векторних просторів. – Чернівці: Рута, 2002. – 72 с.
7. *Маслюченко В.К.* Лінійні оператори. – Чернівці: Рута, 2002. – 72 с.
8. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1971. – 360 с.