УДК 517.9

©2014 р. Р.В. Рузич

Хмельницький національний університет

БІФУРКАЦІЇ В МОДИФІКОВАНІЙ МОДЕЛІ ЕЙГЕНА ЯК ПРОЯВ САМООРГАНІЗАЦІЇ

В роботі розглядається модель розімкненого гіперциклу Ейгена, що використовується для опису сукцесій в екологічних системах. Виділено два типи самоорганізаційних процесів (еволюційний та деградаційний), що відбуваються в системі, описано їх особливості. Показано роль біфуркацій у процесі самоорганізації.

In article a succession in ecological systems is considered. The model of open Eigen's hypercycle is used to describe this process. It was distinguished two types of self-organizing processes (evolutionary and degradation) that are occurred in the system. It was described its features. It was shown role of bifurcations in the process of self-organization.

Вступ. Однією з найбільш цікавих властивостей нелінійних систем є здатність до самоорганізації. Відзначимо, що вперше вдалося математично описати дані процеси тільки в 70 рр. XX ст. Основи синергетики були закладені в роботах Г. Хакена [7], Г. Ніколаса, І. Пригожина [3]. Значну роль у становленні цієї теорії зіграли роботи Б.П. Білоусова [1], А.М. Жаботинського [2,9], А. П. Руденка [4]. Вони розглядали процеси формування складних просторових структур у фізичних і хімічних системах. Окремо слід відзначити дослідження присвячені самоорганізації в екологічних системах. Так, в роботі А.П. Міхайлова описано просторову самоорганізацію популяцій, для опису взаємодії яких використовувалися рівняння дифузійного типу [6]. Мозаїчна структура екологічних макросистем досліджується в роботі К.Х. Ріттерса та Дж.Д. Вікхама [10].

Переважна більшість досліджень направлена на аналіз просторових і просторово-часових процесів самоорганізації, загальні ж механізми і тенденції самоорганізації залишаються поза розглядом. Дослідження самоорганізації систем у часі, визначення параметрів, які впливають на неї, і біфуркацій, що відбуваються в ході процесу — всі ці питання залишаються в значній мірі відкритими. Їх висвітлення дозволило б зрозуміти механізми ускладнення структури таких систем, що є, безумовно, важливим для подальшого розвитку математичного моделювання.

Мета роботи полягає саме в досліджені процесів самоорганізації в часі, визначення нелінійних властивостей системи, що відповідають за таку динаміку останньої.

Для реалізації поставленої мети в роботі розглядатиметься модель розімкненого гіперциклу Ейгена [8], що використовується для опису сукцесій в екологічних системах.

Узагальнена модель гіперциклу Ейгена. Розглянемо модель виду:

$$\frac{dx_i}{dt} = \left(f_i\left(X\right) - \frac{1}{S_0}\sum_{j=1}^{n} x_j f_j\left(X\right)\right) x_i, \quad i=\overline{1,n}, \tag{1}$$

де $x_i, i = \overline{1,n}$ — змінна, потужність (маса, чисельність) асоціації (тут і надалі розумітимемо залежність змінних від часу); $f_i(X), i = \overline{1,n}$ — деяка функція зв'язку між асоціаціями; S_0 — ємність середовища ($S_0 > 0$); $X = [x_1, ..., x_n]^T$. Просумувавши всі рівняння системи (1) отримаємо:

$$\frac{d\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{dt} = \left(1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{S_0}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i f_i\left(X\right).$$

Проаналізуємо отриманий вираз. Очевидно, що серед стаціонарних точок моделі (1)

є такі, сума координат яких дорівнює S_0, а також стаціонарна точка зі всіма нульовими координатами.

Розглянемо лише додатну область в просторі координат $x_1, ..., x_n$ (що є логічно з боку практичної інтерпретації моделі). Якщо $f_i(X) > 0, i = \overline{1,n}$, то система намагається стабілізувати сумарну потужність асоціацій на рівні S_0. Якщо ж $f_i(X) < 0, i = \overline{1,n}$ і сума початкових координат менша за S_0, то надалі сума координат прямує до нуля; якщо ж сума початкових координат більша за S_0, то надалі сума координат зростає.

Самоорганізація через зміну керуючого параметра. Нехай взаємодія між асоціаціями в моделі (1) описується функціями Аллена:

$$\begin{aligned} &F_1(X) = N - x_1, \\ &F_i(X) = a_{i-1}x_{i-1} - x_i, i = \overline{2,n}, \end{aligned} \tag{2}$$

де N — коефіцієнт, що задає значення чисельності рівноваги для першої асоціації, при відсутності другої ($N > 0$); a_i — коефіцієнт, що відображає залежність $(i+1)$-ої асоціації від i-ої ($a_i > 0$).

Досліджено стаціонарні точки двовимірного випадку моделі (1) - (2). Визначено, що при $S_0/N \in \left(0, (a_1+1)^{-1}\right)$ стійкою стаціонарною точкою є $(S_0, 0)$; точка $\left(\frac{S_0+N}{a_1+2}, \frac{S_0(a_1+1)-N}{a_1+2}\right)$ буде стійкою, якщо $S_0/N \in \left((a_1+1)^{-1}, a_1+1\right)$; а при $S_0/N \in (a_1+1, +\infty)$ стійкою буде точка (N, a_1N). Таким чином, при будь-яких додатних значеннях параметрів на фазовому портреті двовимірної моделі розімкнутого гіперциклу Ейгена існує тільки один аттрактор.

Згідно аналізу поведінки траєкторій біля стаціонарних точок двовимірного випадку моделі (1)-(2) можна стверджувати, що при розгляді всього фазового портрету біфуркації в системі відсутні. Проте, якщо розглядатимемо лише першу чверть (що є логічним, враховуючи практичний смисл моделі), можемо помітити наступну властивість. Якщо $S_0/N \in \left(0, (a_1+1)^{-1}\right)$, то в першому квадранті фазової площини знаходиться п'ять стаціонарних точок. При $S_0/N \in \left((a_1+1)^{-1}, +\infty\right)$ в першій чверті існує шість стаціонарних точок. У цьому випадку ми можемо говорити про біфуркацію. Біфуркаційні значення параметрів визначаються як $S_0/N = (a_1+1)^{-1}$.

З практичної точки зору це означає, що при малих значеннях розміру екологічної ніші ($S_0/N \in \left(0, (a_1+1)^{-1}\right)$) в екосистемі існує тільки одна асоціація. При $S_0/N \in \left((a_1+1)^{-1}, a_1+1\right)$ в біогеоценозах конкурують дві асоціації. А коли $S_0/N \in (a_1+1, +\infty)$, ми можемо говорити про наявність надлишку ресурсів у системі. Відмітимо, що біфуркаційне значення параметрів визначає момент появи в екологічній системі другої асоціації.

Приділимо увагу і тривимірному випадку моделі (1)-(2). Досліджено поведінку траєкторій біля стаціонарних точок даної моделі. Було визначено, що при $S_0/N \in \left(0, (a_1+1)^{-1}\right)$ стійкою буде точка $(S_0, 0, 0)$; якщо $S_0/N \in \left((a_1+1)^{-1}, \frac{1+a_1+a_2}{1+a_2+a_1a_2}\right)$, то стійкою стаціонарною точкою буде точка $\left(\frac{S_0+N}{a_1+2}, \frac{S_0(a_1+1)-N}{a_1+2}, 0\right)$; при $S_0/N \in \left(\frac{1+a_1+a_2}{1+a_2+a_1a_2}, 1+a_1+a_1a_2\right)$ стійкою буде точка $\left(\frac{S_0+N(a_2+2)}{a_1a_2+a_1+a_2+3}, \frac{(a_1+1)S_0+(a_1-1)N}{a_1a_2+a_1+a_2+3}, \frac{(a_1a_2+a_2+1)S_0-(a_1+a_2+1)N}{a_1a_2+a_1+a_2+3}\right)$; точка (N, a_1N, a_1a_2N) буде стійкою, якщо $S_0/N \in (1+a_1+a_1a_2, +\infty)$.

Знову звернемо увагу на біфуркації, що можуть відбуватися в системі. При розгляді всього фазового простору тривимірного випадку моделі (1)-(2) можна говорити про одну біфуркацію (біфуркаційне значення параметрів визначаються як $S_0/N = 1$), підчас якої зникає одне сідло і з'являється нестійкий вузол.

Якщо ж розглядати лише перший октант фазового простору, то можемо говорити про ще дві біфуркації, які пов'язані з появою додаткових стаціонарних точок у цій частині фазового простору моделі. Біфуркаційні значення параметрів обчислюються як $S_0/N = (a_1+1)^{-1}$ та $S_0/N = \frac{1+a_1+a_2}{1+a_2+a_1a_2}$.

Інтерпретуємо отриманий результат до поведінки екологічних систем. Як можна по-

бачити, система з трьох асоціацій на перших етапах свого розвитку проходить ті самі етапи, що і більш проста екосистема. Так, при $S_0/N \in \left(0, (a_1+1)^{-1}\right)$ в екологічній системі достатньо ресурсів тільки для підтримки однієї асоціації. При $S_0/N \in \left((a_1+1)^{-1}, \frac{1+a_1+a_2}{1+a_2+a_1a_2}\right)$ в біогеоценозах достатньо ресурсів для утримання двох асоціацій. Коли $S_0/N \in \left(\frac{1+a_1+a_2}{1+a_2+a_1a_2}, 1+a_1+a_1a_2\right)$ в системі можуть конкурувати три асоціації. А при $S_0/N \in (1+a_1+a_1a_2, +\infty)$ в біогеоценозах з'являється надлишок ресурсів. Потрібно відзначити, що третя асоціація з'являється раніше, ніж надлишок ресурсів в екосистемі з двома асоціаціями. Крім того, відмітимо, що біфуркації, які розглядаються лише при аналізі першого октанта фазового простору моделі, визначають момент появи відповідно другої та третьої ассоціації в системі. Щодо біфуркації при $S_0/N = 1$, то вона визначає різні механізми стабілізації системи при виході останньої з стабільного режиму функціонування.

В описаному процесі можна помітити елементи самоорганізації. Система здатна сама визначати свою розмірність і ускладнюватися залежно від розміру екологічної ніші. Цей процес був названий самоорганізацією через зміну керуючого параметра. Очевидно, що таким параметром є ємність середовища S_0. Також зазначимо, що процес самоорганізації відбувається через механізм біфуркацій, що пов'язано з перебудовою структури системи.

Самоорганізація через зміну кількості компонентів. Цікавим з практичної точки зору є твердження, що сформоване в роботі [5]: якщо праворуч від нульової координати стаціонарної точки моделі разімкнутого гіперциклу Ейгена існує ненульова координата, то така точка нестійка при будь-яких додатних значеннях параметрів. З практичної точки зору це означає наступне: якщо в екологічній системі існує деяка асоціація, то існують і асоціації попередники.

Покажемо подібні властивості у тривимірному випадку моделі (1)-(2). Для цього використаємо ідеї методу внутрішніх біфуркацій. Визначимо стаціонарне значення змінної x_3 за умови, що всі інші змінні розглядаються як параметри:

$$x_3^{(1)} = 0, \tag{3}$$

$$x_3^{(2)} = \frac{(S_0+a_2x_2- -\sqrt{(S_0-a_2x_2)^2+4\left(Nx_1+a_1x_1x_2-x_1^2-x_2^2\right)})}{2}, \tag{4}$$

$$x_3^{(3)} = \frac{(S_0+a_2x_2+ +\sqrt{(S_0-a_2x_2)^2+4\left(Nx_1+a_1x_1x_2-x_1^2-x_2^2\right)})}{2}. \tag{5}$$

Нехай $x_1 = 0$ і $x_2 = 0$ (тобто з системи, що функціонує у стабільному режимі, вилучаються перша та друга асоціації відповідно). Тоді x_3 змінюється за законом:

$$\frac{dx_3}{dt} = -x_3^2\left(1 - \frac{x_3}{S_0}\right). \tag{6}$$

З продеденого вище дослідження очевидно, що $x_3 < S_0$. Тому вираз у правій частині рівняння (6) від'ємний, а x_3 зменшується. Тобто x_3 змінюється за законом (4). Як можна побачити, з часом x_3 дорівнюватиме нулю.

Розглянемо ситуацію, коли $x_2 = 0$ (з системи, що функціонує у стабільному режимі, вилучається лише друга асоціація). Тоді x_3 змінюється за законом:

$$\frac{dx_3}{dt} = -x_3\left(x_3 - \frac{x_3^2}{S_0} + \frac{x_1(N-x_1)}{S_0}\right). \tag{7}$$

Якщо в початковий момент в системі стійкою стаціонарною точкою є (N, a_1N, a_1a_2N) (тобто існує надлишок ресурсів), тоді закон (7) еквівалентний закону (6), і x_3 зменшується до нуля.

Проаналізуємо випадок, коли в системі в початковий момент стаціонарна точка $\left(\frac{S_0+N(a_2+2)}{a_1a_2+a_1+a_2+3}, \frac{(a_1+1)S_0+(a_1-1)N}{a_1a_2+a_1+a_2+3}, \frac{(a_1a_2+a_2+1)S_0-(a_1+a_2+1)N}{a_1a_2+a_1+a_2+3}\right)$ стійка (тобто ресурси обмежені). Тоді рівняння (7) запишеться як

$$\frac{dx_3}{dt} = -x_3\left(x_3 - \frac{x_3^2}{S_0} + \frac{((2+a_2)N+S_0)((1+a_1+a_1a_2)N-S_0)}{S_0(a_1+a_2+a_1a_2+3)^2}\right).$$

Оскільки у цьому випадку $S_0 < (1 + a_1 + a_1 a_2) N$, то поліном у правій частині рівняння (7) від'ємний, а x_3 змінюється згідно з законом (4). Отже, з часом x_3 прямує до нуля.

Визначимо, як змінюється x_1 у цьому випадку. Запишемо стаціонарні значення x_1, якщо всі інші змінні розглядати як параметри:

$$x_1^{(1)} = 0, \tag{8}$$

$$x_1^{(2)} = \frac{N+S_0+a_1x_2}{2} - \frac{\sqrt{(N+S_0+a_1x_2)^2+4\left(a_2x_2x_3-x_2^2-x_3^2-NS_0\right)}}{2}, \tag{9}$$

$$x_1^{(3)} = \frac{N+S_0+a_1x_2}{2} + \frac{\sqrt{(N+S_0+a_1x_2)^2+4\left(a_2x_2x_3-x_2^2-x_3^2-NS_0\right)}}{2}. \tag{10}$$

Легко показати, що $x_1^{(3)}$ стійке стаціонарне положення. Таким чином, якщо $x_2 = 0$, то $x_1 = S_0$.

Отже, вилучення першої та другої асоціації з системи, призводить до повної деградації останньої. Якщо ж з системи вилучити лише другу асоціацію, то перша асоціація використає всі доступні ресурси і досягне розміру S_0, при цьому третя асоціація зникне. Подібну поведінку систем можна показати і при вилучені інших асоціацій.

У цьому випадку спостерігається самоорганізація системи через зміну кількості компонентів, причому процес має деградаційний характер: вилучення компонента системи призводить до спрощення останньої. Однак подібні стани є нестійкими, і система, запускаючи механізми гомеостазу, намагається відновити свою структуру.

Покажемо здатність до відновлення у тривимірному випадку моделі (1)-(2). Визначимо стаціонарне значення змінної x_2 за умови, що всі інші змінні розглядаються як параметри:

$$x_2^{(1)} = 0, \tag{11}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{S_0+a_1x_2+a_2x_3}{2} - \frac{\sqrt{(S_0+a_1x_1+a_2x_3)^2+4\left(Nx_1-x_1^2-S_0a_1x_1-x_3^2\right)}}{2}, \tag{12}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{S_0+a_1x_2+a_2x_3}{2} + \frac{\sqrt{(S_0+a_1x_1+a_2x_3)^2+4\left(Nx_1-x_1^2-S_0a_1x_1-x_3^2\right)}}{2}. \tag{13}$$

Розглянемо ситуацію, коли $x_2 = x_2^{(1)}$ (тобто вилучається друга асоціація). Тоді x_3, залежно від початкових умов, дорівнює

$$x_3^{(1)} = 0, x_1 > \frac{\left(N + \sqrt{N^2 + S_0^2}\right)}{2} \tag{14}$$

$$x_3^{(2)} = \frac{\left(S_0 - \sqrt{S_0^2 + 4x_1(N-x_1)}\right)}{2}, \quad 0 < x_1 < \frac{\left(N+\sqrt{N^2+S_0^2}\right)}{2}, \tag{15}$$

або

$$x_3^{(3)} = \frac{\left(S_0 + \sqrt{S_0^2 + 4x_1(N-x_1)}\right)}{2}, \quad 0 < x_1 < \frac{\left(N+\sqrt{N^2+S_0^2}\right)}{2}, \tag{16}$$

Стан (11) стійкий, якщо

$$\frac{x_1^2 - Nx_1 + x_3^2}{S_0} + a_1x_1 < 0. \tag{17}$$

Якщо початкове значення x_1 досить велике (випадок (14)), тоді x_3 зменшується, а нерівність (17) виконується при $0 < x_1 < N - S_0a_1$, $S_0 < N/a_1$. Проте дані значення параметрів не задовольняють умові в (14). Таким чином, цей стан системи є нестійким.

Розглянемо випадок, x_3 змінюється за законом (15). Цей стан системи стійкий, якщо $N < x_1 < \frac{\left(N+\sqrt{N^2+S_0^2}\right)}{2}$. Нерівність (17) виконується при $0 < x1 < (N - S_0a_1)\left(a_1^2+1\right)^{-1}$, $S_0 < N/a_1$. Враховуючи ці дві умови, можна стверджувати, що нерівність (17) не виконується. Тобто стани (11) та (15) не можуть бути одночасно стійкими. Якщо ж значення x_3 змінюється за законом (16), то стан (11) буде нестійким.

Розглянемо ситуацію, коли $x_1 = x_1^{(1)}$ (тобто з системи, що складається з трьох асоціацій, вилучається перша асоціація). Цей стан стійкий, якщо

$$N + \left(x_2^2 - a_2x_2x_3 + x_3^2\right) S_0^{-1} < 0. \tag{18}$$

Запишемо, яким буде розмір x_2, в даній ситуації:

$$x_2^{(1)} = 0, \quad 0 < a_2 < 2 \ \ i \ \ 0 < x_3 < S_0\left(2-a_2\right)^{-1}, \tag{19}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{S_0 + a_2 x_3}{2} - \\ - \frac{\sqrt{(S_0 + a_2 x_3)^2 - 4x_3^2}}{2}, \tag{20}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 \geq 2, \\ x_3 \geq 0, \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} 0 < a_2 < 2, \\ x_3 > S_0 \left(2 - a_2\right)^{-1}, \end{array} \right.$$

$$x_2^{(2)} = \frac{S_0 + a_2 x_3}{2} - \\ - \frac{\sqrt{(S_0 + a_2 x_3)^2 - 4x_3^2}}{2}, \tag{21}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 \geq 2, \\ x_3 \geq 0, \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} 0 < a_2 < 2, \\ x_3 > S_0 \left(2 - a_2\right)^{-1}, \end{array} \right.$$

Якщо $x_2 = x_2^{(1)}$ (19), то, очевидно, що нерівність (18) не виконується. Тому стан (8) нестійкий.

Якщо x_2 змінюється за законом (20), то легко показати, що умова (18) також не виконується. Щодо стану (21), то він не стійкий. Таким чином, відсутні такі значення параметрів, при яких стан (8) є стійким одночасно з тим, щоб був стійким хоча б один зі станів (19), (20) або (21).

Отже, такий режим функціонування екологічної системи, при якому з останньої вилученні певні асоціації, є нестабільним. А поява представників цих асоціацій запускає механізм гомеостазу, і система відновлює свою структуру.

Висновок. В роботі досліджено модель розімкненого гіперциклу Ейгена, що використовується для моделювання екологічних сукцесій. Показано, що за допомогою даної моделі можна описати процеси самоорганізації в біогеоценозах. Виділено два види самоорганізації: самоорганізація через зміну керуючого параметру та самоорганізація через зміну кількості компонентів.

В ролі керуючого параметру, очевидно, є розмір екологічної ніші S_0. Залежно від значень даного параметру система може вибирати свою розмірність. Крім того, показано, що кожний етап сукцесії (а саме включення нової асоціації) пов'язаний з біфуркацією додатної області фазового простору моделі. Таким чином, ускладнення системи відбувається через механізм біфуркацій.

Сумарна потужність асоціацій на кожному етапі розвитку біогеоценоза, дорівнює розміру екологічної ніші S_0, а у випадку надлишку ресурсів — прямує до цього значення. Таким чином, екосистема, згідно з "четвертим законом термодинаміки", намагається прийняти форму, що максимально використовує енергетичні можливості середовища.

Другий вид самоорганізації має деградаційний характер і повязаний зі спрощенням системи при вилученні її компонентів. Він є результатом існування певних наслідкових зв'язків між асоціаціями в екосистемі. Слід відмітити, що стан "спрощеної системи" є нестабільним, а поява представників вилучених асоціацій запускає механізм відновлення.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Белоусов Б. П.* Периодически действующая реакция и ее механизмы // Сборник рефератов по радиационной медицине за 1958 г. – М. : Медгиз, 1959. – С. 145-147.

2. *Жаботинский А. М.* Концентрационные автоколебания. – М. : Наука, 1974. – 179 с.

3. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах: От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации. – М. : Мир, 1979. – 512 с.

4. *Руденко А. П.* Теория саморазвития открытых каталитических систем. – М. : Изд–во МГУ, 1969. – 276 с.

5. *Рузич Р. В.* Стійкість особливих точок трьохвимірного випадку однієї моделі екологічної макросистеми // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. -– 2012. – **17**, вип. 3. -– С. 45-51.

6. *Самарский А. А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М. : Физматлит, 2001. – 320 с.

7. *Хакен Г.* Синергетика: Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. – М. : Мир, 1985. – 424 с.

8. *Чернышенко С. В.* Нелинейные методы динамики лесных биогеоценозов. – Днепропетровск: Изд-во ДНУ, 2005. – 500 с.

9. *Zaikin A. N., Zhabotinsky A. M.* Concentration wave propagation in two-dimensional liquid-phase self-oscillating system // Nature. – 1970. – **225**. – С. 535-537.

10. *Riitters, K.H., Wickham J.D., Wade T.G.* An indicator of forest dynamics using a shifting landscape mosaic // Ecological indicators. – 2009. – **9**, Is. 1. – С. 107-117.