УДК 517.9

©2014 р. **В.Г. Самойленко[1], Т.В. Тищук[1], В.В.Федоренко[2]**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка[1],
Інститут математики НАН України[2]

СПІВІСНУВАННЯ ТИПІВ УНІМОДАЛЬНИХ ЦИКЛІВ НЕПЕРЕРВНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ ВІДРІЗКА В СЕБЕ

Розглянуто цикли спеціального класу неперервних відображень відрізка в себе, графік яких складається з двох гілок монотонності. Використовуючи запропоновану класифікацію циклів за різними ознаками: за періодом, за взаємним розташуванням точок циклу, за розташуванням точок циклу на різних інтервалах монотонності відображення, описано властивості циклів таких відображень та досліджено питання про їх співіснування.

We consider cycles of a special class of continuous maps generated by two monotonic continuous maps of an interval. Using a classification by different cycle features, namely, with period, mutual arrangement of cycle points, arrangement of cycle points on different branches of monotony, properties of cycles of maps mentioned above are described and the problem on cycles coexistence is studied.

1. Вступ. Питання про співіснування періодичних траєкторій одновимірних динамічних систем інтенсивно вивчається багатьма дослідниками протягом останніх 50-ти років, завдяки працям яких виник новий напрямок в теорії динамічних систем – комбінаторна динаміка.

Це питання виникало задовго до створення комбінаторної динаміки. Так, твердження про існування нерухомої точки неперервного відображення інтервалу, що має цикл періоду 2, яке є наслідком теореми про проміжне значення з математичного аналізу, було використане ще А.Пуанкаре для доведення твердження про існування точки рівноваги для звичайного диференціального рівняння другого порядку в області, що обмежена замкненим циклом. Наступним кроком в теорії одновимірних динамічних систем стало твердження про те, що з наявності циклу періоду $n > 2$ неперервного відображення відрізка випливає наявність циклу періоду 2 цього відображення. У статтях [1-4] доведено твердження про збіжність ітерацій неперервного відображення інтервалу, яке не має циклу періоду 2, а в [2-4] показано, що відображення, яке не має циклів періоду 2, не має також і циклів періоду $n > 2$. Ці результати стали теоретичним обґрунтуванням збіжності всіх розв'язків різницевих рівнянь першого порядку, які широко використовуються при моделюванні фізичних систем, і їх побудові за допомогою електронно-обчислювальних пристроїв. Ці результати є одними з перших тверджень, які можна віднести до комбінаторної динаміки.

Фактично зародження комбінаторної динаміки, як напрямку теорії динамічних систем, почалося з праць О.М. Шарковського, який запропонував розглядати тип взаємозв'язку між траєкторіями – їх співіснування. Зокрема, одним із результатів, отриманих у статті [4] був наслідок про те, що з існування у неперервного відображення відрізку циклу періоду більшого за 2 випливає існування у нього циклу періоду 2. В [5] було доведено, що неперервне відображення відрізка в себе, яке має цикл періоду, що не дорівнює степеню 2, має цикли будь-якого періоду 2^i, де $i \geq 0$. Ці результати стали складовою частиною теореми Шарковського про співіснування циклів різних періодів для неперервних відображень відрізка в себе [6]. Для формулювання цієї теореми, яка використовується у цій статті, визначимо необхідні для цього поняття.

Розглядається відображення вигляду f :

$I \to I$, де I – замкнений обмежений інтервал дійсної прямої R, функція $f(x)$ є неперервною, тобто $f \in C^0(I;I)$. При цьому для i-тої ітерації відображення f використовується позначення f^i, де $i \in \mathbb{N}$, та f^0 є тотожним відображенням.

Якщо для точки $x \in I$ існує таке натуральне число i, що $f^i(x) = x$, то точка x називається періодичною точкою відображення f, а число $n = \min\{i \in \mathbb{N} | f^i(x) = x\}$ – періодом точки x. У випадку $i = 1$ точка $x \in I$ називається нерухомою точкою відображення $f : I \to I$.

Множина всіх періодичних точок відображення f позначається за допомогою $Per(f)$.

Послідовність $(f^i(x), \quad i \geq 0)$, де $x \in Per(f)$ – періодична точка періоду n, називається періодичною траєкторією відображення f, а множина точок $\{f^i(x), \quad i \geq 0\}$, $x \in Per(f)$ – циклом періоду n відображення f.

Цикли неперервного відображення відрізка в себе можна впорядкувати певним чином. Має місце наступна теорема.

Теорема Шарковського [6]. *Якщо $f \in C^0(I;I)$ має цикл періоду n, то воно має також і цикл періоду m такого, що $m \lhd n$, де*

$$1 \lhd 2 \lhd 2^2 \lhd 2^3 \lhd \ \ldots \ \lhd 2^2 \cdot 7 \ \lhd 2^2 \cdot 5 \lhd$$
$$\lhd 2^2 \cdot 3 \lhd \ \ldots \ \lhd 2 \cdot 7 \ \lhd 2 \cdot 5 \lhd 2 \cdot 3 \lhd \ \ldots$$
$$\ldots \lhd 9 \lhd 7 \lhd 5 \lhd 3.$$

Більше того, для будь-якого n існує неперервне відображення $g : I \to I$, що має цикл періоду n і це відображення не має циклу періоду k, якщо $n \lhd k$.

З моменту опублікування цієї теореми у 1964 році, інтерес до неї не згасає, про що свідчать численні публікації, в яких запропоновано як нові варіанти її доведення, так і аналоги та узагальнення цієї теореми для різних класів динамічних систем. У теоремі Шарковського цикли неперервного відображення класифікуються лише за величиною (значенням) періоду. З іншого боку, задане відображення відрізка в себе може мати декілька циклів одного й того самого (фіксованого) періоду. Тому згаданої у даній теоремі класифікації циклів недостатньо, оскільки цикли одного й того самого періоду бажано якось розрізняти.

Природно крім класифікації циклів за періодами, розглянути їх класифікацію за типами, тобто за циклічними перестановками, які певним чином можна пов'язати з даним циклом. Дійсно, обмеження відображення на цикл є циклічною перестановкою, тобто f взаємно однозначно відображає на себе скінчену множину точок циклу, яка не містить власних інваріантних підмножин. Крім того, цикл відображення – це лінійно впорядкована підмножина інтервалу.

Це спостереження дає нам змогу, на відміну від звичайного поняття циклічної перестановки, розглядати циклічні перестановки лінійно впорядкованих множин в якості типу таких множин та зображати їх графічно в прямокутній декартовій системі координат. Далі природно виникає питання про співіснування циклів різних типів, тобто циклічних перестановок, які відповідають цим циклам. Для цього, на множині циклічних перестановок можна визначити відношення порядку "$\prec$" наступним чином: перестановки π і π' знаходяться у відношенні "$\prec$" (використовується позначення $\pi \prec \pi'$), якщо деяке відображення $f \in C^0(I;I)$, яке має цикл типу π, має також і цикл типу π'. Множина циклічних перестановок з так визначеним порядком є лише частково впорядкованою множиною [7,8].

Визначення типу циклу як циклічної перестановки є незручними для узагальнення поняття типу циклу багатовимірного відображення. У статті [9] запропоновано характеризувати цикл не за відповідною йому циклічною перестановкою, а за її циклічним зображенням. Крім того, класифікація циклів одновимірного відображення за циклічними перестановками ускладнена відсутністю лінійного порядку на всій множині циклічних перестановок. Проте в цій частково впорядкованій множині є лінійно впорядковані підмножини циклічних перестановок. Ці спеціальні підмножини були об'єктом дослідження в працях [10-12], але залишились нез'ясованими деякі важливі питання, зокрема, питання про знаходження класу відображень, типи всіх циклів якого є елементами цієї спеціальної підмножини.

Для повноти переліку існуючих класифікацій циклів неперервних відображень згадаємо також класифікацію циклів за числом обертання циклу, але використовувати її в цій статті не будемо. Ця класифікація циклів є більш детальною, ніж класифікація за періодами, але менш детальною, ніж класифікація за типами. Число обертання циклу визначається як відношення кількості точок циклу, координата образу яких менша за координату самої точки, до періоду циклу. Властивості циклів за такою класифікацією та їх співіснування розглядалися в [13–16].

У даній статті вивчаються цикли спеціального класу неперервних відображень відрізка в себе, графік яких схожий на символ "Λ". Строге визначення такого відображення дано в основній частині цієї роботи. Такі відображення мають лише 2 гілки монотонності і в певному сенсі є найпростішими неперервними відображеннями, хоча мають властивості, які притаманні "багатогілковим" відображенням (але не навпаки !). Цей клас відображень було обрано в якості найпростішого класу серед "багатогілкових" відображень ще й тому, що неперервні відображення з однією гілкою монотонності мають лише одну нерухому точку або ж цикл періоду 2.

Для цього класу відображень необхідно класифікувати цикли більш детально, ніж за типами, в сенсі циклічного зображення відповідної перестановки. Розглянемо приклад, який пояснює необхідність такого уточнення класифікації за типами. Відображення "тент" $f \in C^0(I;I)$, де

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1/2, \\ 2(1-x), & 1/2 < x \le 1, \end{cases} \tag{1}$$

володіє двома циклами періоду 3:

$$B_1 = \left\{ \frac{2}{9};\ \frac{4}{9};\ \frac{8}{9} \right\}, \quad B_2 = \left\{ \frac{2}{7};\ \frac{4}{7};\ \frac{6}{7} \right\}.$$

Хоча ці цикли мають однаковий тип $(1,\ 2,\ 3)$, але точки циклів B_1 і B_2 порізному розташовані на гілках монотонності відображення f.

Як зазначалося вище, на множині всіх типів циклів, тобто відповідних їм циклічних перестановок, існує лише частковий порядок, проте цикли, які, наприклад, має відображення "тент", є лінійно впорядкованими з точки зору їх співіснування, причому цей порядок співпадає з лінійним порядком вкладеності носіїв циклів відображення "тент", де під носієм циклу розуміємо замкнений обмежений інтервал, кінцями якого є найменша та найбільша точка циклу. Використовуючи циклічну перестановку, ми в подальшому визначаємо модель типу циклу, що дає нам змогу більш детально класифікувати цикли одного типу.

Запропонована модель типу циклу [17] будується з використанням лише циклічної перестановки, а не з властивостей відображення, тобто це суто комбінаторний алгоритм. Проте, якщо відображення є унімодальним, то запропоноване нами поняття моделі типу циклу співпадає з періодично повторюваною частиною символьного коду мінімальної точки циклу, яка побудована за стандартним алгоритмом кодування в символьній динаміці [10, 18, 19]. У цьому сенсі модель типу циклу є узагальненням символьного зображення періодичної точки для унімодального відображення.

Статтю організовано наступним чином: спочатку сформульовано низку означень ("типу циклу"; "опуклої вгору" і "опуклої вниз" циклічної перестановки). Зауважимо, що у частково впорядкованій множині всіх циклічних перестановок існують принаймні 2 лінійно впорядковані підмножини, одна з яких складається з усіх опуклих вгору циклічних перестановок, а інша – усіх опуклих вниз циклічних перестановок, але в силу топологічної спряженості відображень f та $1 - f(1-x)$ розглядаються лише опуклі вгору циклічні перестановки.

У подальшому дано означення моделі типу циклу та ваги опуклої циклічної перестановки. Саме модель типу циклу лежить в основі уточненої класифікації циклів неперервного відображення.

Згодом дано означення Λ-відображення. Поняття ваги опуклої циклічної перестановки разом з поняттям моделі типу циклу для Λ-відображення дає можливість встановити відношення лінійного порядку на множині опуклих циклічних перестановок. Використовуючи теорему з [17] про те, що всі опуклі циклічні перестановки є типами циклів Λ-відображення, у тому числі відображення "тент", і, навпаки, будь-яка циклічна перестановка, яка відповідає циклу Λ-відображення, є опуклою, нами доведено теорему про лінійний порядок циклічних перестановок для унімодальних циклів неперервного відображення.

2. Визначення опуклої циклічної перестановки. Нехай $I = [0;1]$. У подальшому використовуються наступні означення [9, 17, 20].

Означення 1. *Нехай* $B = \{\beta,\ f(\beta),\ ...,\ f^{n-1}(\beta)\}$ *– цикл періоду* n *відображення* $f \in C^0(I;I)$*, де* $\beta = \min\limits_{1\le i\le n} f^{i-1}(\beta)$ *та* $f^n(\beta) = \beta$*. Впорядкований набір чисел* $r = (r_1,\ ...,\ r_i,\ ...,\ r_n)$*, кожен елемент якого визначається за формулою* $r_i = \#\{k|\ 1 \le k \le n,\ f^{k-1}(\beta) \le f^{i-1}(\beta)\}$*, де "*$\#A$*", означає кількість елементів множини* A*, називається типом циклу* B*.*

З означення 1 випливає, що $r_1 = 1$ та для будь-яких різних номерів $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$ виконується нерівність: $r_i \ne r_j$.

Будь-якому циклу B одновимірного відображення можна поставити у відповідність деяку циклічну перестановку. Дійсно, якщо точки циклу B позначимо так: $\beta_1,\ ...,\beta_i,\ \beta_{i+1},\ ...,\ \beta_n$, де $\beta_1 < ... < \beta_i < \beta_{i+1} < ... < \beta_n$ і при цьому $f(\beta_i) = \beta_{j_i}$, $1 \le j_i \le n$, $1 \le i \le n$, то відповідну циклу B циклічну перестановку можна записати наступним чином

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ j_1 & j_2 & ... & j_n \end{pmatrix}.$$

Циклічне зображення перестановки π має вигляд $(1,\ \pi(1),\ ...,\ \pi^{i-1}(1),\ ...,\ \pi^{n-1}(1))$. Оскільки $B = \{\beta,\ f(\beta),\ ...,\ f^{n-1}(\beta)\}$, то для всіх $1 \le i \le n$ маємо $r_i = \pi^{i-1}(1)$. Тобто означення типу циклу через відповідну циклічну перестановку та впорядкований набір $(r_1,\ ...,\ r_i,\ ...,\ r_n)$ еквівалентні. Таким чином, цей впорядкований набір співпадає із циклічним зображенням перестановки π циклу B. Враховуючи еквівалентність понять циклічної перестановки π, що відповідає циклу B, і типу циклу B як рядка $(r_1,\ ...,\ r_i,\ ...,\ r_n)$, надалі під типом циклу ми будемо розуміти один з цих об'єктів, залежно від контексту.

Означення 2. *Циклічна перестановка* $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ j_1 & j_2 & ... & j_n \end{pmatrix}$ *називається опуклою вгору [10, 12, 17], якщо виконуються нерівності* $j_i < j_{i+1}$ *при* $1 \le i < \hat{i}$ *та* $j_i > j_{i+1}$ *при* $\hat{i} \le i < n$*, де* $2 \le \hat{i} \le n-1$ *та* $\pi(\hat{i}) = n$*.*

Аналогічно, циклічна перестановка $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ j_1 & j_2 & ... & j_n \end{pmatrix}$ *називається опуклою вниз, якщо виконуються нерівності* $j_i > j_{i+1}$ *при* $1 \le i < \check{i}$ *і* $j_i < j_{i+1}$ *при* $\check{i} \le i < n$*, де* $2 \le \check{i} \le n-1$ *і* $\pi(\check{i}) = 1$*.*

Означення 3. *Унімодальним циклом називається цикл, тип якого є опуклою вгору або опуклою вниз перестановкою.*

Нехай відображення $f \in C^0(I;I)$ топологічно спряжене відображенню $g \in C^0(I;I)$, яке визначається рівністю $g = h^{-1} \circ f \circ h$, де $h(x) = 1 - x$. Якщо відображення f має цикл, якому відповідає опукла вгору циклічна перестановка $\hat{\pi}$, то відображення g має цикл, якому відповідає опукла вниз циклічна перестановка $\check{\pi}$. При цьому $\check{\pi}(i) = n+1-\hat{\pi}(n+1-i)$ для всіх $1 \le i \le n$. Отже, достатньо розглядати властивості лише опуклих вгору циклічних перестановок, адже властивості опуклих вниз циклічних перестановок встановлюються автоматично, використовуючи їх зв'язок з опуклими вгору циклічними перестановками. Тому у подальшому достатньо розглядати лише відображення, що мають унімодальні цикли, яким відповідають опуклі вгору циклічні перестановки. Такі перестановки називатимемо опуклими циклічними перестановками.

Множину всіх опуклих циклічних перестановок порядку n позначимо Π_n.

3. Модель типу циклу, що заданий опуклою циклічною перестановкою. З опуклими циклічними перестановками тісно пов'язані цикли унімодальних неперервних відображень. Сформулюємо означення унімодального відображення.

Означення 4. *Відображення $f \in C^0(I;I)$ називається унімодальним, якщо існує таке значення $c \in (0;1)$, що f монотонно не спадає (монотонно не зростає) на відрізку $[0;c]$ і монотонно не зростає (монотонно не спадає) на відрізку $[c;1]$.*

Тобто унімодальне відображення має лише дві гілки монотонності.

У подальшому розглядається унімодальне відображення f, яке є опуклим вгору. Міркування для випадку, коли f – унімодальне опукле вниз відображення, аналогічні міркуванням для випадку унімодального опуклого вгору відображення.

Оскільки обмеження неперервного відображення на цикл є циклічною перестановкою, то всі цикли унімодального відображення є унімодальними. Але можливий випадок, коли двом різним унімодальним циклам одного періоду унімодального опуклого вгору відображення відповідає одна й та сама опукла циклічна перестановка. Для того, аби розрізняти унімодальні цикли у такому випадку скористаємося результатами статей [17, 20].

Оскільки $r_n = n$ – максимальне число серед чисел $1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n$, що утворюють тип $(1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n)$ циклу, якому відповідає опукла циклічна перестановка π, а число r_{n-1} є прообразом елемента r_n, то послідовно порівняємо кожне число $1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n$ з числом r_{n-1} і розіб'ємо цей тип $(1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n)$ на блоки (упорядковані ланцюжки чисел, з дотриманням уже встановленого в типові порядку) за наступним правилом: кожен блок містить елементи, які або всі менші за число r_{n-1}, або ж всі не менші за r_{n-1}. Очевидно, що блоки з непарними номерами містять лише числа, що менші за r_{n-1}, а блоки з парними номерами – лише ті числа, що не менші за r_{n-1}. Тоді тип $(1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n)$ перестановки π можна записати наступним чином:

$$(|\, 1,\ \ldots,\ r_{m_1}\,|\, r_{m_1+1},\ \ldots,\ r_{m_1+l_1}\,|\ldots$$
$$|\, r_{m_1+l_1+\ldots+l_{s-1}+1}, \ldots,\ r_{m_1+l_1+\ldots+m_s}\,| \qquad (2)$$
$$r_{m_1+l_1+\ldots+m_s+1}, \ldots,\ r_{m_1+l_1+\ldots+m_s+l_s}\,|),$$

де символ $|$ розділяє сусідні блоки.

Числа $m_i,\ l_i,\ 1 \leq i \leq s$, визначаються так: нехай β – найменша точка циклу типу r унімодального відображення f. Тоді m_1 – це кількість точок в послідовності $(\beta,\ f(\beta),\ \ldots,\ f^{n-1}(\beta))$, що належать інтервалу $[0;c)$, тобто $f^{i-1}(\beta) \in [0;c)$, де $1 \leq i \leq m_1$; l_1 – це кількість точок в послідовності $(\beta,\ f(\beta),\ \ldots,\ f^{n-1}(\beta))$, починаючи з $f^{m_1}(\beta)$, що належать інтервалу $[c;1]$, тобто $f^{i-1}(\beta) \in [c;1]$, де $m_1{+}1 \leq i \leq m_1{+}l_1$; m_2 – це кількість точок в послідовності $(\beta,\ f(\beta),\ \ldots,\ f^{n-1}(\beta))$, починаючи з $f^{m_1+l_1}(\beta)$, що належать $[0;c)$, тобто $f^{i-1}(\beta) \in [0;c)$, де $m_1 + l_1 + 1 \leq i \leq m_1 + l_1 + m_2$, і т.д.

Аналогічно, тип $(1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n)$ перестановки π можна записати так:

$$(|\, 1,\ \ldots,\ r_{m_1'}\,|\, r_{m_1'+1},\ \ldots,\ r_{m_1'+l_1'}\,|\ldots$$
$$|\, r_{m_1'+l_1'+\ldots+l_{s'-1}'+1}, \ldots,\ r_{m_1'+l_1'+\ldots+m_{s'}'}\,| \qquad (3)$$
$$r_{m_1'+l_1'+\ldots+m_{s'}'+1}, \ldots,\ r_{m_1'+l_1'+\ldots+m_{s'}'+l_{s'}'}\,|),$$

де блоки з непарними номерами містять лише числа, що не більші за r_{n-1}, а блоки з парними номерами – лише ті числа, що більші за r_{n-1}. Зв'язок чисел $m_i',\ l_i',\ 1 \leq i \leq s'$, з розташуванням точок циклу унімодального відображення f на його гілках монотонності, такий самий як і чисел $m_i,\ l_i$, де $1 \leq i \leq s$.

Кількість блоків у рядках (2) та (3) є парною, адже $r_n = n > r_{n-1}$, тобто кожен з рядків в (2), (3) закінчується блоком з парним номером $2s$ та $2s'$ відповідно. При цьому виконуються наступні рівності:

$$\sum_{i=1}^{s}(m_i + l_i) = n, \qquad \sum_{i=1}^{s'}(m_i' + l_i') = n.$$

З чисел m_1, m_2, …, m_s, l_1, l_2, …, l_s, m_1', m_2', …, $m_{s'}'$, l_1', l_2', …, $l_{s'}'$, які фігурують в (2) і (3), утворимо числові набори вигляду:

$$(m_1,\, l_1,\, m_2,\, l_2,\, ...,\, m_{s-1},\, l_{s-1},\, m_s,\, l_s), \quad (4)$$

$$(m_1',\, l_1',\, m_2',\, l_2',\, ...,\, m_{s'-1}',\, l_{s'-1}',\, m_{s'}',\, 1), \quad (5)$$

де (4) відповідає рядку (2), а (5) – рядку (3).

Вважатимемо, що числовий набір складається лише з повторюваних блоків, якщо його можна записати у вигляді

$$(m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots, m_k, l_k, m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots,$$
$$m_k, l_k, \ \ldots \ , m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots, m_k, l_k),$$

де $(m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots, m_k, l_k)$ – повторюваний блок (k – довільний (фіксований) дільник числа s).

Означення 5. *Якщо числовий набір (4), що побудований за опуклою циклічною перестановкою π, не складається лише з повторюваних блоків, що його утворюють, то набір (4) називається м - моделлю типу циклу, якому відповідає опукла циклічна перестановка π. Аналогічно, якщо числовий набір (5), що побудований за опуклою циклічною перестановкою π, не складається лише з повторюваних блоків, що його утворюють, то набір (5) називається р - моделлю типу циклу, якому відповідає опукла циклічна перестановка π.*

Означення 6. *Вагою моделі типу циклу, яка зображується числовим набором $(m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots, m_s, l_s)$, називається число σ, що визначається з рівності:*

$$\frac{3}{2}\,\sigma = \frac{\sum\limits_{i=1}^{s}\left((-2)^{\sum\limits_{j=i+1}^{s} l_j}\; 2^{\sum\limits_{j=i+1}^{s} m_j}(1-(-2)^{l_i})\right)}{1-(-2)^{\sum\limits_{i=1}^{s} l_i}\; 2^{\sum\limits_{i=1}^{s} m_i}}. \quad (6)$$

Означення 7. *Якщо опукла циклічна перестановка $\pi \in \Pi$ має одну модель типу циклу, то її вагою називається вага цієї моделі типу циклу. Якщо опукла циклічна перестановка $\pi \in \Pi$ має дві моделі типу циклу, то її вагою називається більша з ваг цих моделей типу циклу. Вага опуклої циклічної перестановки π позначається σ_π.*

Геометричний зміст ваги пояснює наступна лема [12, 17].

Лема 1. *Координата мінімальної точка x циклу типу $\pi \in \Pi_n$ періоду n з моделлю типу циклу $(m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots, m_s, l_s)$ відображення "тент" дорівнює:*

$$x = \frac{2}{3}\;\frac{\sum\limits_{i=1}^{s}\left((-2)^{\sum\limits_{j=i+1}^{s} l_j}\; 2^{\sum\limits_{j=i+1}^{s} m_j}(1-(-2)^{l_i})\right)}{1-(-2)^{\sum\limits_{i=1}^{s} l_i}\; 2^{\sum\limits_{i=1}^{s} m_i}}. \quad (7)$$

Враховуючи, що кожна опукла циклічна перестановка має принаймні одну модель типу циклу, поняття ваги опуклої циклічної перестановки визначено коректно [17].

Означення 8. *Відображення $g \in C^0(I;I)$ називається Λ-відображенням, якщо виконуються наступні умови:*

1. $g(0) = g(1) = 0$.

2. Існує точка $a \in (0;1)$, для якої виконується рівність $g(a) = 1$.

3. Функція $g(x)$ монотонно не спадає на відрізку $[0;a]$ і монотонно не зростає на відрізку $[a;1]$.

Λ-відображення – це частковий випадок унімодального відображення. Прикладом Λ-відображення є відображення "тент", яке задано за допомогою функції (1). Λ-відображення мають L-схему, яка запропонована в [6].

Означення 9. *Нехай $f \in C^0(I;I)$. Точки x_1, x_2, x_3 задають L-схему відображення f, якщо виконується одне зі співвідношень: $f(x_3) \le x_1 = f(x_1) < x_2 < x_3 \le f(x_2)$ або $f(x_2) \le x_3 < x_2 < x_1 = f(x_1) \le f(x_3)$.*

L-схема дозволяє отримати важливу інформацію про особливості динаміки відображення. Наприклад, відображення з L-схемою мають цикли будь-якого періоду.

З означення L-схеми випливає, що опукле вниз унімодальне відображення $h \in C^0(I;I)$, яке топологічно спряжене відображенню "тент" і визначено наступним чином

$$h(x) = \begin{cases} 1-2x, & 0 \le x \le 1/2, \\ -1+2x, & 1/2 < x \le 1, \end{cases} \qquad (8)$$

також має L-схему.

З невеликими змінами попередні міркування можна повторити і для унімодальних циклів опуклих вниз унімодальних відображень, ввівши поняття ваги моделі типу циклу, використовуючи координату мінімальної точки циклу відображення (8).

Має місце наступна теорема [17].

Теорема 1. *Наступні твердження еквівалентні:*

1. π є типом деякого циклу Λ-відображення.

2. π є типом деякого циклу відображення "тент" вигляду (1).

3. π – довільна опукла циклічна перестановка.

Ця теорема, як і теорема 2 (при відповідних змінах) має місце і для опуклих вниз унімодальних відображень та їх унімодальних циклів з типами, що задаються опуклими вниз циклічними перестановками.

4. Відношення лінійного порядку на множині опуклих циклічних перестановок. На множині опуклих циклічних перестановок Π введемо відношення порядку $\dashv$ наступним чином: дві довільні опуклі циклічні перестановки $\pi^{'}$ і $\pi^{''}$ знаходяться у відношенні $\dashv$, тобто $\pi^{'} \dashv \pi^{''}$, якщо $\sigma_{\pi'} \le \sigma_{\pi''}$.

Із визначення відношення порядку $\dashv$ випливає, що $\dashv$ є відношенням лінійного порядку на множині опуклих циклічних перестановок Π.

Теорема 2. *Якщо неперервне відображення $g \in C^0(I;I)$ має цикл типу $\pi_1 \in \Pi$, то це відображення має також цикл типу $\pi_2 \in \Pi$, де $\pi_1 \dashv \pi_2$.*

Доведення теореми 2. Нехай $\pi_1 \in \Pi$ – опукла циклічна перестановка періоду n, що є типом циклу $B = \{\beta,\ g(\beta),\ ...,\ g^{n-1}(\beta)\}$ неперервного відображення $g \in C^0(I;I)$. Оскільки $\pi_1 \in \Pi$, то згідно теореми 1 опукла циклічна перестановка π_1 є типом циклу відображення "тент" вигляду (1), тобто існує деякий цикл $A = \{\alpha,\ f(\alpha),\ ...,\ f^{n-1}(\alpha)\}$ періоду n відображення "тент", що π_1 є його типом.

За функцією f побудуємо функцію $\overline{f}$, що не спадає на інтервалі $[0;\ f^{n-2}(\alpha)]$ та не зростає на інтервалі $[f^{n-2}(\alpha);\ 1]$. Нехай $a = \min\{f^{n-2}(\alpha),\ 1-f^{n-2}(\alpha)\}$, $b = 1-a$, $c = \alpha$, $d = f^{n-1}(\alpha)$. Визначимо функцію $\overline{f}$ наступним чином:

$$\overline{f}(x) \;=\; \begin{cases} f(\alpha), & 0 \le x < c, \\ 2x, & c \le x < a, \\ f^{n-1}(\alpha), & a \le x < b, \\ 2(1-x), & b \le x < d, \\ \alpha, & d \le x \le 1. \end{cases} \qquad (9)$$

За побудовою відображення $\overline{f}$ має цикл A типу π_1. Покажемо, що $\pi_2 \in \Pi$ також є типом деякого циклу відображення $\overline{f}$. За умовою теореми 2 для опуклих циклічних перестановок π_1 і π_2 виконується співвідношення $\pi_1 \dashv \pi_2$, що еквівалентно лінійній вкладеності носіїв відповідних циклів, тобто носій циклу типу π_2 лежить у носії циклу типу π_1.

Нехай $C = \{\gamma,\ \overline{f}(\gamma),\ ...,\ \overline{f}^{\,m-1}(\gamma)\}$ – цикл типу π_2 відображення $\overline{f}$. Використовуючи зв'язок між вагою опуклої циклічної перестановки та мінімальною точкою циклу, типом якого вона є, отримаємо, що мінімальна точка циклу типу π_1 менша мінімальної точки циклу типу π_2, тобто виконується нерівність $\alpha \le \gamma$. Це співвідношення виконується тоді і лише тоді, коли максимальна точка циклу типу π_1 більша максимальної точки циклу типу π_2, тобто виконується нерівність $\overline{f}^{\,n-1}(\alpha) \ge \overline{f}^{\,m-1}(\gamma)$.

Доведемо останню нерівність. Припустимо, що це не так і має місце співвідношення $\overline{f}^{\,n-1}(\alpha) < \overline{f}^{\,m-1}(\gamma)$. Оскільки α – мінімальна точка циклу періоду n, то $\overline{f}^{\,n}(\alpha) = \alpha$. Аналогічно, оскільки γ – мінімальна точка циклу періоду m, то $\overline{f}^{\,m}(\gamma) = \gamma$. Образи точок α і γ належать монотонно не спадній гілці відображення $\overline{f}$, а образи точок $\overline{f}^{\,n-1}(\alpha)$ і $\overline{f}^{\,m-1}(\gamma)$ – монотонно не зростаючій гілці, тому має місце нерівність $\alpha > \gamma$. Таким чином ми прийшли до суперечності, тобто з того, що мінімальна точка циклу типу π_1 менша мінімальної точки циклу типу π_2 випливає, що максимальна точка циклу типу π_1 більша максимальної точки циклу типу π_2.

Твердження, якщо *максимальна точка циклу типу* π_1 *більша максимальної точки циклу типу* π_2, то *мінімальна точка циклу типу* π_1 *менша мінімальної точки циклу типу* π_2 доводиться аналогічно.

Отже, C – це цикл типу π_2 відображення $\overline{f}$, для точок якого виконуються нерівності $\alpha \le \overline{f}^{\,i}(\gamma) \le \overline{f}^{\,n-1}(\alpha)$, де $0 \le i \le m-1$.

Побудуємо орієнтований граф накриття, шо відповідає циклу A відображення $\overline{f}$. Для цього позначимо точки циклу A символами $\alpha_1,\ \ldots,\alpha_i,\ \alpha_{i+1},\ \ldots,\ \alpha_n$, де $\alpha_1 < \ldots < \alpha_i < \alpha_{i+1} < \ldots < \alpha_n$. Нехай $f(\alpha_i) = \alpha_{s_i}$, де $1 \le s_i \le n,\ 1 \le i \le n$. Тоді циклічну перестановку π_1 можна записати наступним чином: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \end{pmatrix}$.

Оскільки відображення $\overline{f}$ є неперервним, то на інтервалах $J_i = [\alpha_i,\ \alpha_{i+1}]$, $1 \le i \le n-1$, відображення $\overline{f}$, володіє властивістю

$$\overline{f}(J_i) \supseteq \begin{cases} J_{s_i} \cup \ldots \cup J_{s_{i+1}-1}, s_i < s_{i+1}, \\ J_{s_{i+1}} \cup \ldots \cup J_{s_i-1}, s_i > s_{i+1}. \end{cases} \tag{10}$$

Поставимо у відповідність циклу типу π_1 відображення $\overline{f}$ орієнтований граф накриття $G^{\overline{f}}_{\pi_1}$ з вершинами $J_1,\ J_2,\ \ldots,\ J_{n-1}$ і орієнтованими ребрами, що з'єднують вершини J_i та J_s, якщо $\overline{f}(J_i) \supset J_s$. Позначимо множину вершин графа $J = \{J_1,\ J_2,\ \ldots,\ J_{n-1}\}$.

Використовуючи орієнтований граф накриття $G^{\overline{f}}_{\pi_1}$ циклу типу π_1 відображення $\overline{f}$, побудуємо орієнтований граф накриття циклу типу π_2 відображення $\overline{f}$. Оскільки носій циклу C вкладений у носій циклу A, то серед інтервалів $J_i \in J$, $1 \le i \le n-1$, існує такий інтервал $J_{i_1^*} \in J$, $1 \le i_1^* \le m-1$, що $\sigma_{\pi_2} \in J_{i_1^*}$, тобто мінімальна точка γ циклу C належить інтервалу $J_{i_1^*}$.

Аналогічно, для довільної точки $f^k(\gamma)$ циклу C, $1 \le k \le m-1$, існує інтервал $J_{i_k^*} \in J$, якому вона належить. Отже орієнтованим графом накриття $G^{\overline{f}}_{\pi_2}$ циклу C типу π_2 є граф з вершинами $J_{i_1^*},\ J_{i_2^*},\ \ldots,\ J_{i_{m-1}^*}$ і орієнтованими ребрами $J_i \to J_s$, які з'єднують вершини J_i і J_s, $i,\ s \in \{i_1^*,\ i_2^*,\ \ldots,\ i_{m-1}^*\}$, якщо $\pi_2(i) = s$.

Таким чином побудований граф $J_{i_1^*} \to J_{i_2^*} \to \ldots \to J_{i_{m-1}^*}$ є орієнтованим графом накриття $G^{\overline{f}}_{\pi_2}$ циклу C типу π_2.

Позначимо тепер точки циклу B так: $\beta_1,\ \ldots,\beta_i,\ \beta_{i+1},\ \ldots,\ \beta_n$, де $\beta_1 < \ldots < \beta_i < \beta_{i+1} < \ldots < \beta_n$. Нехай $\hat{i}$, де $1 \le \hat{i} \le n-1$, таке, що має місце рівність $g(\beta_{\hat{i}}) = \beta_n$.

За функцією g побудуємо неперервну функцію $\overline{g}$, що не спадає на інтервалі $[0;\ \beta_{\hat{i}}]$ і не зростає на інтервалі $[\beta_{\hat{i}};\ 1]$. Покладемо $\overline{g}(x) = g(\beta_1)$, якщо $x \in [0;\ \beta_1]$,

$$\overline{g}(x) = \begin{cases} \min\{g(\beta_{i+1}), \max\limits_{\beta_i \le y \le x} g(y)\}, 1 \le i < \hat{i}, \\ \max\{g(\beta_{i+1}), \min\limits_{\beta_i \le y \le x} g(y)\}, \hat{i} \le i < n, \end{cases} \tag{11}$$

якщо $x \in [\beta_i;\ \beta_{i+1}]$, і $\overline{g}(x) = \beta_1$, якщо $x \in [\beta_n;\ 1]$.

За побудовою відображення $\overline{g}$ має цикл B типу π_1. Аналогічно як для циклу A відображення $\overline{f}$, побудуємо орієнтований граф накриття $G^{\overline{g}}_{\pi_1}$, що відповідає циклу B типу π_1 відображення $\overline{g}$. Поставимо у відповідність циклу B типу π_1 відображення $\overline{g}$ орієнтований граф накриття $G^{\overline{g}}_{\pi_1}$ з вершинами $I_1,\ I_2,\ \ldots,\ I_{n-1}$ і орієнтованими ребрами, що з'єднують вершини I_j та I_s, якщо $\overline{g}(I_j) \supset I_s$. Позначимо множину вершин графа $I = \{I_1,\ I_2,\ \ldots,\ I_{n-1}\}$. Використовуючи співвідношення вигляду (10) для відображення $\overline{g}$, отримаємо, що вкладення $\overline{g}(I_j) \supset I_s$ має місце для всіх s таких, що $\pi_1(i) \le s \le \pi_1(i+1)-1$, якщо $\pi_1(i) < \pi_1(i+1)$, і для всіх s таких, що $\pi_1(i+1) \le s \le \pi_1(i)-1$, якщо $\pi_1(i) > \pi_1(i+1)$.

Оскільки аналогічні співвідношення мають місце і для орієнтованих ребер відображення $\overline{f}$, то графи $G^{\overline{f}}_{\pi_1}$ і $G^{\overline{g}}_{\pi_1}$ співпадають як орієнтовані графи накриття, що побудовані для циклів одного типу π_1 унімодальних відображень.

З останньої властивості випливає, що орієнтованому графу накриття $G^{\overline{f}}_{\pi_2}$ циклу типу π_2 відображення $\overline{f}$ відповідає орієнтований граф накриття $G^{\overline{g}}_{\pi_2}$, вершинами якого є інтервали з множини I, а ребра відповідають ребрам $G^{\overline{f}}_{\pi_2}$.

Для того, щоб довести, що відображення $\overline{g}$ має цикл типу π_2, за графами $G^{\overline{f}}_{\pi_2}$ і $G^{\overline{g}}_{\pi_2}$ побудуємо графи $\overline{G}^{\overline{f}}_{\pi_2}$ і $\overline{G}^{\overline{g}}_{\pi_2}$ і встановимо взаємно однозначну відповідність між ними. Нехай $J_{i^*} \in J$, $1 \leq i^* \leq n-1$, – інтервал, якому належить мінімальна точка циклу C, тобто $\sigma(\pi_2) \in J_{i^*}$. Побудуємо m послідовних прообразів цього інтервалу на різних гілках монотонності відображення $\overline{f}$ керуючись наступним алгоритмом. Якщо a з (9) таке, що $a = f^{n-2}(\alpha)$, то інтервал з J лівим кінцем якого є точка a, вважатимемо таким, що відповідає монотонно не зростаючій гілці відображення $\overline{f}$, а якщо $a = 1 - f^{n-2}(\alpha)$, то інтервал, лівим кінцем якого є точка a, вважатимемо таким, що відповідає монотонно не спадаючій гілці відображення $\overline{f}$. Решта інтервалів відповідають тій гілці відображення $\overline{f}$, якій належить їх образ. Будуватимемо m послідовних прообразів інтервалу J_{i^*} наступним чином: першим прообразом інтервалу J_{i^*} оберемо інтервал $\overline{J}_{m-1}$, образ якого належить тій гілці відображення $\overline{f}$, якій відповідає інтервал $J_{i^*_{m-1}}$. Прообразом інтервалу $\overline{J}_{m-1}$ оберемо інтервал $\overline{J}_{m-2}$ такий, що його образ належить тій же гілці відображення $\overline{f}$, якій відповідає інтервал $J_{i^*_{m-2}}$. Повторивши цю процедуру $m-2$ рази, на останньому кроці оберемо прообразом інтервалу $\overline{J}_2$ інтервал $\overline{J}_1$, образ якого належить тій же гілці відображення $\overline{f}$, якій відповідає інтервал $J_{i^*_1}$. В результаті отримали $m-1$ попарно неперетинних інтервалів $\overline{J}_1$, $\overline{J}_2$, ..., $\overline{J}_{m-1}$, які оберемо вершинами графа $\overline{G}^{\overline{f}}_{\pi_2}$, орієнтовані ребра якого утворені за правилом виду (10). Таким чином побудований граф накриває цикл C типу π_2 відображення $\overline{f}$, причому так, що в кожному з інтервалів $\overline{J}_1$, $\overline{J}_2$, ..., $\overline{J}_{m-1}$ міститься по одній точці циклу C.

Аналогічно побудуємо граф $\overline{G}^{\overline{g}}_{\pi_2}$. Вершинами цього графа є взаємно неперетинні інтервали $\overline{I}_1$, $\overline{I}_2$, ..., $\overline{I}_{m-1}$, а ребра утворені за правилом виду(10). Алгоритм побудови інтервалів $\overline{I}_1$, $\overline{I}_2$, ..., $\overline{I}_{m-1}$ такий самий, як і алгоритм побудови інтервалів $\overline{J}_1$, $\overline{J}_2$, ..., $\overline{J}_{m-1}$, відмінним є лише спосіб визначення гілки монотонності відображення $\overline{g}$, що відповідає інтервалу, одним з кінців якого є точка $\overline{g}^{n-2}(\gamma)$. Якщо точка $\overline{g}^{n-2}(\gamma)$ є одним із кінців інтервалу і цей інтервал такий, що йому належить точка x, для якої виконується рівність $g(x) = \max\limits_{x \in [0;\,1]} g(x)$, то цей інтервал вважатимемо таким, що відповідає монотонно не спадаючій гілці відображення $\overline{g}$, якщо $x < \overline{g}^{n-2}(\gamma)$, і таким, що відповідає монотонно не зростаючій гілці відображення $\overline{g}$, якщо $x > \overline{g}^{n-2}(\gamma)$. За побудовою порядок розташування інтервалів $\overline{I}_1$, $\overline{I}_2$, ..., $\overline{I}_{m-1}$ такий самий, як порядок розташування інтервалів $\overline{J}_1$, $\overline{J}_2$, ..., $\overline{J}_{m-1}$. Оскільки $\overline{G}^{\overline{f}}_{\pi_2}$ є графом накриття циклу типу π_2 відображення $\overline{f}$, то $\overline{G}^{\overline{g}}_{\pi_2}$ є графом накриття циклу типу π_2 відображення $\overline{g}$. Отже, відображення $\overline{g}$ має цикл типу π_2. З останнього випливає, що початкове відображення g має цикл типу π_2.

Теорему 2 доведено.

5. Висновки. У статті запропоновано класифікацію циклів одновимірних неперервних відображень відрізка в себе за моделлю типу циклу. Дано означення моделі типу циклу та ваги опуклої циклічної перестановки, які використовуються для опису циклів унімодального опуклого вгору відображення. На просторі опуклих циклічних перестановок описано відношення лінійного порядку, що індукується вагою опуклої циклічної перестановки. Основний результат статті про лінійний порядок (співіснування) циклічних перестановок як типів унімодальних циклів неперервного відображення сформульовано у теоремі 2.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Coppel W.A.* The solution of equations by iteration // Proc. Camb. Phil. Soc. – 1955. – **51**, №1. – P. 41 – 43.

2. *Лейбензон З. Л.* Исследование некоторых свойств непрерывного точечного преобразования отрезка на самого себя, имеющих применение в теории нелинейных колебаний // Прикл. мат. и мех. – 1953. – **17**, №3. – C. 351 – 360.

3. *Мышкис А. Д., Лепин А. Я.* Существование инвариантного множества, состоящего из двух точек, при некоторых непрерывных отображениях отрезка в себя // Учен. зап. Белорус. ун-та. Сер.

фіз.-мат. – 1957. – **32**. – С. 29 – 32.

4. *Шарковский А.Н.* Необходимые и достаточные условия сходимости одномерных итерационных процессов // Укр. мат. журн. – 1960. – **12**, №4. – С. 484 – 489.

5. *Шарковский А.Н.* О приводимости непрерывной функции действительного переменного и структуре неподвижных точек соответствующего итерационного процесса // Док. АН СССР. – 1961. – **139**, №5. – С. 1067 – 1070.

6. *Шарковский А.Н.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. мат. журн. – 1964. – **16**, №8. – С. 61 – 71.

7. *Baldwin S.* Generalizations of a theorem of Sharkovskii on orbits of continuous real-valued functions // Discrete Mathematics. – 1987. – **67**, №2. – P. 111–127.

8. *Федоренко В.В.* Частично-упорядоченное множество типов периодических траекторий одномерных динамических систем // Динамические системы и дифференциально-разностные уравнения. Сборник научных трудов. – К: Институт математики АН УССР, 1986. – С. 90 – 97.

9. *Fedorenko V. V., Sharkovsky A. N.* Homoclinic trajectories in one-dimensional dynamics // Journal of Difference Equations and Applications. – 2012. – **18**, №4. – P. 579–588.

10. *Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В.* Динамика одномерных отображений. – К.: Наукова думка, 1989. – 216 с.

11. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – К.: Наукова думка, 1986. – 278 с.

12. *Федоренко В.В.* Канонические периодические траектории одномерных динамических систем // Приближенные и качественные методы теории дифференциально-функциональных уравнений. – К: Институт математики АН УССР, 1983. – С. 106 – 109.

13. *Bobok J., Kuchta M.* X-minimal patterns and a generalization of Sharkovskii's theorem // Fund. Math. – 1998. – **156**, №1. – P. 33–66.

14. *Blokh A., Misiurewicz* M. New order for periodic orbits of interval maps // Ergodic Theory Dynam. Systems. – 1997. – **17**, №3. – P. 565–574.

15. *Blokh A., Misiurewicz M.* Rotating an interval and a circle // Trans. Amer. Math. Soc. – 1999. – **351**, №1. – P. 63–78.

16. *Elizalde S.* The number of permutations realized by a shift // SIAM J. Discrete Math. – 2009. – **23**, №2. – P. 765–786.

17. *Самойленко В.Г., Тищук Т.В., Федоренко В.В.* Унімодальні цикли неперервних відображень інтервалу // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2014. – **11**, №2. – С. 126–145.

18. *Milnor J., Thurston W.* On iterated maps of the interval dynamical systems (College Park, MD, 1986-87). Lecture Notes in Math. – Berlin: Springer, 1988. – P. 465 – 563.

19. *Devaney R. L.* A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment. – Westview Press, 1992. – 320 p.

20. *Тищук Т.В.* Класифікація періодичних траєкторій неперервних унімодальних опуклих вгору відображень відрізка в себе // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2014. – **31**, №1. – С. 41–44.