УДК 517.988.63

©2014 р. В.Ю. Слюсарчук

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

ОБОРОТНІСТЬ ТЕОРЕМИ ПРО ОБЕРНЕНУ ФУНКЦІЮ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ (Invertibility the inverse function theorem for differentiable functions)

Нехай X і Y – банахові простори, $U \subset X$ – відкрита множина і $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Показано, що C^k-відображення $F : U \to Y$ є локальним C^k-дифеоморфізмом у точці $x_0 \in U$ тоді і тільки тоді, коли похідна $(DF)_{x_0} : X \to Y$ є лінійним ізоморфізмом.

Let X and Y be Banach spaces, $Y \subset X$ be an open set and $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. It is shown that a C^k-mapping $F : U \to Y$ is a local C^k-diffeomorphism at a point $x_0 \in U$ if and only if the derivative of $(DF)_{x_0} : X \to Y$ is a linear isomorphism.

У статті показано, що для теореми про обернену функцію для диференційовних функцій справджується обернене твердження.

1. Основні означення. Спочатку наведемо необхідні для подальшого означення, запозичені з [1]–[3].

Нехай X і Y – банахові простори з нормами $\|\cdot\|_X$ і $\|\cdot\|_Y$ відповідно. Позначимо через $L(X,Y)$ банаховий простір лінійних неперервних операторів A, що діють із простору X у простір Y, з нормою

$$\|A\|_{L(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y.$$

Через $L^k(X,Y)$, де $k \in \mathbb{N}$, позначимо банаховий простір неперервних k-лінійних відображень із X в Y. Зауважимо, що

$$L^{k+1}(X,Y) = L(X, L^k(X,Y))$$

і

$$L^1(X,Y) = L(X,Y).$$

Нехай $U \subset X$ і $V \subset Y$ – відкриті множини. Відображення $f : U \to V$ називається *диференційованим* (за Фреше) в точці $x \in U$, якщо існує таке лінійне відображення $(Df)_x \in L(X,Y)$, що

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - (Df)_x h\|_Y}{\|h\|_X} = 0. \quad (1)$$

Відображення $f : U \to V$ називається C^1-*відображенням*, якщо f диференційовне в кожній точці $x \in U$ і природне відображення $Df : U \to L(X,Y)$ неперервне. Аналогічно, відображення f називається C^{k+1}-*відображенням*, якщо $D^k f$ диференційовне в кожній точці $x \in U$ і відображення $D^{k+1} f : U \to L^{k+1}(X,Y)$ неперервне. C^{k+1}-відображення f ще називають *диференційовним відображенням* класу C^{k+1}. Нарешті, f – C^∞-відображення, якщо це відображення є C^k-відображенням для кожного $k \in \mathbb{N}$.

Відображення $f : U \to V$ називається C^k-*дифеоморфізмом* або *дифеоморфізмом* класу C^k, якщо f взаємно однозначно відображає U на V і обидва відображення f і f^{-1} є C^k-відображеннями.

Аналогічно, відображення $f : U \to V$ називається C^∞-*дифеоморфізмом* або *дифеоморфізмом* класу C^∞, якщо f взаємно однозначно відображає U на V і обидва відображення f і f^{-1} є C^∞-відображеннями.

Локальним C^k-дифеоморфізмом (C^∞-дифеоморфімом) у точці $x \in X$ називається відображення $f : X \to Y$, для якого існує такий окіл $U \subset X$ точки x, що звуження $f|_U$ відображення f на U встановлює C^k-дифеоморфізм (C^∞-дифеоморфізм) між U і відкритою підмножиною простору Y.

2. Теорема про обернену функцію. Важливою для теорії нелінійних відображень є наступна теорема про обернену функцію.

Теорема 1 ([1]). *Нехай X і Y – банахові простори, $U \subset X$ – відкрита множина, $F: U \to Y$ – C^k-відображення, $k \in \mathbb{N}$, і для деякої точки $x_0 \in U$ похідна $(DF)_{x_0}: X \to Y$ є лінійним ізоморфізмом.*

Тоді F – локальний C^k-дифеоморфізм у точці x_0.

Нагадаємо, що лінійний неперервний оператор $T : X \to Y$ є лінійним ізомофізмом, якщо цей оператор має обернений неперервний оператор $T^{-1} : Y \to X$.

Покажемо, що для теореми 1 правильною є обернена теорема.

3. Обернена теорема до теореми 1.

Теорема 2. *Нехай X і Y – банахові простори, $U \subset X$ – відкрита множина, $k \in \mathbb{N}$ і відображення $F : U \to Y$ є локальним C^k-дифеоморфізмом у точці $x_0 \in U$.*

Тоді похідна $(DF)_{x_0} : X \to Y$ є лінійним ізоморфізмом.

Доведення. Завдяки умовам теореми існують такі відкриті множини $U_1 \subset X$ і $V_1 \subset Y$, що містять точки x_0 і $y_0 = F(x_0)$ відповідно, і звуження $F|_{U_1}$ відображення F на U_1 встановлює C^k-дифеоморфізм між U_1 і V_1. Тому C^k-відображення $F : U_1 \to V_1$ має обернене C^k-відображення $F^{-1} : V_1 \to U_1$. Оскільки

$$F^{-1}(F(x)) = x$$

і

$$F\left(F^{-1}(y)\right) = y$$

для всіх $x \in U_1$ і $y \in V_1$, то на підставі теореми про диференційовність композиції відображень [1] для всіх $x \in U_1$ і $y \in V_1$

$$\left(DF^{-1}F\right)_x = \left(DF^{-1}\right)_{F(x)} (DF)_x = I_X, \quad (2)$$

$$\left(DFF^{-1}\right)_y = (DF)_{F^{-1}(y)} \left(DF^{-1}\right)_y = I_Y, \quad (3)$$

де I_X і I_Y – одиничні оператори, що діють у просторах X і Y відповідно. Замінюючи в (2) і (3) x і y на x_0 і y_0 відповідно і враховуючи, що $y_0 = F(x_0)$, отримаємо

$$\left(DF^{-1}\right)_{y_0} (DF)_{x_0} = I_X,$$

$$(DF)_{x_0} \left(DF^{-1}\right)_{y_0} = I_Y.$$

Таким чином, оператор $(DF)_{x_0}$ має обернений неперервний $\left((DF)_{x_0}\right)^{-1}$ і

$$\left((DF)_{x_0}\right)^{-1} = \left(DF^{-1}\right)_{y_0}.$$

Отже, якщо відображення $F : U \to Y$ є локальним C^k-дифеоморфізмом у точці $x_0 \in U$, то похідна $(DF)_{x_0} : X \to Y$ є лінійним ізоморфізмом.

Теорема 2 доведена.

4. Основні твердження про обернену функцію.

Об'єднуючи теореми 1 і 2, приходимо до наступного твердження.

Теорема 3. *Нехай X і Y – банахові простори, $U \subset X$ – відкрита множина і $k \in \mathbb{N}$.*

C^k-відображення $F: U \to Y$ є локальним C^k-дифеоморфізмом у точці $x_0 \in U$ тоді і тільки тоді, коли похідна $(DF)_{x_0} : X \to Y$ є лінійним ізоморфізмом.

Аналогічне твердження справджується і для відображень класу C^∞.

Теорема 4. *Нехай X і Y – банахові простори і $U \subset X$ – відкрита множина.*

C^∞-відображення $F: U \to Y$ є локальним C^∞-дифеоморфізмом у точці $x_0 \in U$ тоді і тільки тоді, коли похідна $(DF)_{x_0} : X \to Y$ є лінійним ізоморфізмом.

Очевидно, що теорема 4 – наслідок теореми 3.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий. – М: Мир, 1967. – 203 с.
2. *Милнор Дж., Уоллес А.* Дифференциальная топология. – М: Мир, 1972. – 279 с.
3. *Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Шерман П.Б.* Топологические методы в теории нелинейных фредгольмовых операторов, Учебное пособие. Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 1978. – 79 с.