УДК 517.929.7

©2014 р. М.П. Філіпчук, О.І. Філіпчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Буковинський державний фінансово-економічний університет, Чернівці

# ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ОДНІЄЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Для дослідження системи диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом та крайовими умовами вигляду $Ax(0)+Bx(T)+C\int\limits_0^T x(t)dt = d$ запропоновано модифікацію чисельно-аналітичного методу, в якому відсутнє визначальне рівняння. Отримано достатні умови існування єдиного розв'язку крайової задачі та оцінку похибки побудованих послідовних наближень.

We propose a modification of a numerical-analytic method without a determining equation for investigation of a system of differential equations with a transformed argument and boundary conditions in the form $Ax(0) + Bx(T) + C\int\limits_0^T x(t)dt = d$. Sufficient conditions for the existence of a unique solution of a boundary value problem and an error estimation of the constructed successive approximations are obtained.

У праці [1] за допомогою класичної схеми чисельно-аналітичного методу А.М. Самойленка [2, 3] досліджено питання існування та наближеної побудови розв'язку крайової задачі для системи диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом вигляду

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda(t))), \tag{1}$$

$$Ax(0) + Bx(T) + C\int\limits_0^T x(t)dt = d, \tag{2}$$

де $t \in [0,T]$, $T = const > 0$; $x, f \in R^n$; $\lambda : [0,T] \to [0,T]$ – довільне неперервне відображення; $A$, $B$, $C$ – сталі $n \times n$ матриці, $d$ – сталий $n$-вимірний вектор.

Виявляється, для крайової задачі (1), (2) можна запропонувати модифіковану схему чисельно-аналітичного методу, де не виникатиме так зване визначальне рівняння, тобто метод матиме лише аналітичну складову.

Як і раніше [1], функцію $f(t,x,y)$ вважатимемо неперервною по $t, x, y$ в області $G = [0,T] \times D \times D$, де $D$ – замкнена обмежена область в $R^n$.

Припускатимемо також, що функція $f(t,x,y)$ в області $G$ обмежена вектором $M \in R^n$, $M_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, та задовольняє умову Ліпшіца по $x, y$ з матрицею $K = \{k_{ij} \geq 0;\ i,j = \overline{1,n}\}$:

$$|f(t,x,y)| \leq M, \tag{3}$$

$$|f(t,\overline{x},\overline{y}) - f(t,\overline{\overline{x}},\overline{\overline{y}})| \leq K(|\overline{x}-\overline{\overline{x}}| + |\overline{y}-\overline{\overline{y}}|), \tag{4}$$

де

$$|f(t,x,y)| = (|f_1(t,x,y)|, \ldots, |f_n(t,x,y)|)$$

і нерівність між векторами розуміється покомпонентно.

Достатні умови розв'язності крайової задачі (1), (2) дає наступне твердження.

**Теорема.** *Нехай виконуються умови:*

*I) матриця $H = A + B + TC$ є невиродженою;*

*II) вектор $w_0 = H^{-1}d$ лежить в області $D$ разом зі своїм $\beta = TSM$-околом, де $S = |H^{-1}B| + \dfrac{T}{2}|H^{-1}C| + E$;*

*III) найбільше за модулем власне значення матриці $Q = 2TSK$ менше за одиницю.*

*Тоді крайова задача (1), (2) має в області $D$ єдиний розв'язок $x^*(t)$, який є рівномірною границею послідовних наближень*

$$x_0(t) = w_0, \quad x_m(t) = w_0 -$$

$$-H^{-1}B\int\limits_0^T f(s, x_{m-1}(s), x_{m-1}(\lambda(s)))ds -$$

$$-H^{-1}C\int_0^T\int_0^t f(s,x_{m-1}(s),x_{m-1}(\lambda(s)))dsdt+$$

$$+\int_0^t f(s,x_{m-1}(s),x_{m-1}(\lambda(s)))ds,$$

$$m=1,2,\ldots, \qquad (5)$$

*причому*

$$|x^*(t)-x_m(t)|\le Q^m(E-Q)^{-1}\beta \qquad (6)$$

*для всіх* $m=1,2,\ldots$ *і* $t\in[0,T]$.

Д о в е д е н н я. Покажемо, що в просторі неперервних вектор-функцій послідовність (5) є фундаментальною, а отже, і рівномірно збіжною.

Встановимо спочатку, що всі функції $x_m(t)$ містяться в області $D$. На підставі (5), враховуючи (3), маємо:

$$|x_1(t)-w_0|\le|H^{-1}B|MT+|H^{-1}C|M\frac{T^2}{2}+$$

$$+Mt\le T\left(|H^{-1}B|+\frac{T}{2}|H^{-1}C|+E\right)M=$$

$$=TSM=\beta. \qquad (7)$$

Тому, з врахуванням умови II), $x_1(t)\in D$. Індукцією легко показати, що для всіх $m=1,2,\ldots$ і $t\in[0,T]$ функції $x_m(t)$ вигляду (5) не виходять за межі області $D$.

Покладаючи $r_{m+1}(t)=|x_{m+1}(t)-x_m(t)|$, на підставі (5) із врахуванням (4) маємо:

$$r_{m+1}(t)\le|H^{-1}B|K\int_0^T\omega_m(s)ds+$$

$$+|H^{-1}C|K\int_0^T\int_0^t\omega_m(s)dsdt+$$

$$+K\int_0^t\omega_m(s)ds. \qquad (8)$$

де $\omega_m(s)=r_m(s)+r_m(\lambda(s))$.

Згідно з (7),

$$r_1(t)=|x_1(t)-w_0|\le\beta,$$

тому із (8) при $m=1$ знаходимо:

$$r_2(t)\le|H^{-1}B|K\cdot 2\beta T+$$

$$+|H^{-1}C|K\cdot 2\beta\frac{T^2}{2}+K\cdot 2\beta T=$$

$$=2T\left(|H^{-1}B|+\frac{T}{2}|H^{-1}C|+E\right)K\beta=$$

$$=2TSK\beta=Q\beta.$$

Індукцією можна довести, що для всіх $t\in[0,T]$

$$r_{m+1}(t)\le Q^m\beta,\quad m=0,1,\ldots.$$

Тому для $j\ge 1$ маємо нерівність:

$$|x_{m+j}(t)-x_m(t)|\le\sum_{i=1}^{j}r_{m+i}(t)\le$$

$$\le\left(\sum_{i=0}^{j-1}Q^{m+i}\right)\beta=Q^m\left(\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\right)\beta. \qquad (9)$$

Умова III) гарантує виконання співвідношень

$$\lim_{m\to\infty}Q^m=0,\quad \sum_{i=0}^{j-1}Q^i\le(E-Q)^{-1}. \qquad (10)$$

Тоді із (9) та (10) на підставі критерію Коші випливає, що послідовність $x_m(t)$ вигляду (5) рівномірно збігається при $m\to\infty$ для всіх $t\in[0,T]$ і

$$\lim_{m\to\infty}x_m(t)=x^*(t). \qquad (11)$$

Оскільки, в чому легко переконатися безпосередньою перевіркою, всі послідовні наближення $x_m(t)$ задовольняють крайові умови (2), то й гранична функція $x^*(t)$ також їх задовольняє.

При $j\to\infty$ із (9), враховуючи (11) та (10), для всіх $m=1,2,\ldots$ і $t\in[0,T]$ отримуємо оцінку (6).

Крім цього, переходячи із врахуванням (11) у (5) до границі при $m\to\infty$, бачимо, що функція $x^*(t)$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t)=w_0-H^{-1}B\int_0^T f(s,x(s),x(\lambda(s)))ds-$$

$$-H^{-1}C\int\limits_0^T\int\limits_0^t f(s,x(s),x(\lambda(s)))dsdt+$$

$$+\int\limits_0^t f(s,x(s),x(\lambda(s)))ds.$$

Отже, гранична функція $x^*(t)$ справді є розв'язком крайової задачі (1), (2). Доведемо тепер єдиність цього розв'язку.

Нехай $y(t)$ – довільний розв'язок крайової задачі (1), (2). Тоді, як легко перевірити, він є розв'язком інтегрального рівняння

$$y(t)=w_0-H^{-1}B\int\limits_0^T f(s,y(s),y(\lambda(s)))ds-$$

$$-H^{-1}C\int\limits_0^T\int\limits_0^t f(s,y(s),y(\lambda(s)))dsdt+$$

$$+\int\limits_0^t f(s,y(s),y(\lambda(s)))ds.$$

Аналогічно, як і вище, нескладно встановити, що для всіх $t\in[0,T]$

$$|y(t)-x_0(t)|=|y(t)-w_0|\le TSM=\beta,$$

$$|y(t)-x_1(t)|\le 2TSK\beta=Q\beta,$$

і, за індукцією,

$$|y(t)-x_m(t)|\le Q^m\beta,\quad m=0,1,\ldots.$$

Таким чином, $x_m(t)\to y(t)$ при $m\to\infty$ рівномірно на $[0,T]$. З єдиності границі послідовності випливає, що $y(t)=x^*(t)$ для всіх $t\in[0,T]$. Єдиність розв'язку $x^*(t)$ доведено. Теорему доведено.

Розглянемо часткові випадки крайових умов (2).

1) Нехай $C=0$, тобто маємо лінійні двоточкові крайові умови вигляду

$$Ax(0)+Bx(T)=d.$$

В цьому випадку

$$H=A+B,\ w_0=(A+B)^{-1}d,$$

$$S=|(A+B)^{-1}B|+E,$$

$$\beta=TSM,\ Q=2TSK$$

і отримуємо результати, раніше наведені в праці [4].

2) Нехай $A=0$, $B=0$, $C=E$, тобто маємо інтегральні крайові умови вигляду

$$\int\limits_0^T x(t)dt=d.$$

В цьому випадку

$$H=TE,\ w_0=\frac{1}{T}d,\ S=\frac{3}{2}E,$$

$$\beta=\frac{3}{2}TM,\ Q=3TK$$

і отримуємо результати, раніше наведені в працях [4, 5].

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Філіпчук М.П., Філіпчук О.І.* Одна крайова задача для системи диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом // Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту імені Юрія Федьковича. Серія "Математика". — 2011. — Т. 1, № 4. — С. 123-127.
2. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. — К.: Наук. думка, 1985. — 224 с.
3. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — К.: Наук. думка, 1992. — 280 с.
4. *Філіпчук М.П.* Метод усереднення в крайових задачах для диференціальних рівнянь з відхиленим аргументом: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. — Чернівці, 1999. — 142 с.
5. *Філіпчук М.П.* Задача з інтегральними крайовими умовами для системи диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. — Чернівці: Прут, 2001. — Вип. 7. — С. 243-250.