УДК 517.9

©2014 р. Л.М. Шегда, В.С. Кріштопа

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана

ВИРОДЖЕНА КРАЙОВА ЗАДАЧА З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ

Отримано умови біфуркації розв'язків та доведено оцінку збіжності ряду, який дає сімейство розв'язків виродженої лінійної неоднорідної крайової задачі.

Conditions of bifurcation of solutions are obtained and estimate of some series convergence is proved.These series are solutions of a degenerate linear nonhomogeneus boundary-value problem.

Розглядаються системи диференціальних рівнянь з виродженою матрицею при похідній. Вироджені системи звичайних диференціальних рівнянь, їх ще називають "диференціально-алгебраїчними рівняннями", "алгебро-диференціальними системами", "сингулярними системами", "дискрипторними системами", вивчалися багатьма авторами [1 – 8]. Так, в роботі [8] розглядали вироджену лінійну неоднорідну крайову задачу з малим параметром

$$B\,(t)\ \frac{dx}{dt} = A\,(t)\,x + \varepsilon A_1\,(t)\,x + f\,(t)\,, \qquad (1)$$

$$t\ \in [a, b]\,,$$

$$l\,x\,(\cdot)\ =\ \alpha + \varepsilon l_1 x, \qquad \alpha \in\ R^m, \qquad (2)$$

де $A\,(t)\,,\,B\,(t)\,,\,A_1\,(t)$ – $(n\times n)$-вимірні матриці, компоненти яких є дійсними, достатню кількість раз диференційовні на $[a,b]$ функціями: $A\,(t)\,,\,A_1\,(t)\,,\,B\,(t)\ \in C^{\,3q-2}\,[\,a;b]$; $det\,B\,(t)\ =\ 0\,\forall\,t\ \in\ [a;b]$; $f\,(t)$ – n-вимірний вектор-стовпець з простору $C^{\,q-1}\,[\,a;b\,]$ (значення величини q визначається згідно з теоремою 2.1 [5]); α – m-вимірний вектор-стовпець сталих; $l,\,l_1$ – лінійні векторні функціонали, визначені на просторі n-вимірних, неперервних на $[a;b]$ вектор-функцій: $l\ =\ col\,(l_1,...,l_m)\ :\ C\,[a,b]\ \to\ R^m,\,l_1\ =\ col\,(l_1^1,...,l_m^1)\ :\ C\,[a,b]\ \to\ R^m,\ l_i,\ l_i^1 : C\,[a,b]\ \to\ R.$

В роботі [8] отримано умови біфуркації розв'язків лінійних вироджених нетерових крайових задач з малим параметром за припущення, що незбурена вироджена диференціальна система зводиться до центральної канонічної форми. Використовуючи метод Вішика–Люстерника і апарат псевдообернених за Муром–Пенроузом матриць, запропонований алгоритм відшукання сімейства лінійно незалежних розв'язків таких крайових задач в загальному випадку, коли кількість крайових умов, які задані лінійним векторним функціоналом, не дорівнює кількості невідомих у виродженій диференціальній системі [9, 10].

Зокрема, доведено теорему, що крайова задача (1), (2) при умові

$$\operatorname{rank}\Bigg[B_0 := P_{Q_d^*}\Bigg(l_1 X_r\,(\cdot) -$$

$$-l\Bigg(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}\,(\cdot)\,Y_{n-s}^*\,(\tau)\,A_1(\tau)X_r(\tau)d\tau -$$

$$-\Phi\,(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1}\mathrm{I}^k\frac{d^k}{dt^k}\Bigg(\Big[\Psi^*\,(t)\,L\Phi\,(t)\Big]^{-1}\times$$

$$\times\Psi^*\,(t)\,A_1(t)X_r(t)\Bigg)\,(\cdot)\Bigg)\Bigg)\Bigg] = d, \qquad (3)$$

$$(d = m - rank\,Q)$$

має $\rho = (n-s-m)$-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків у вигляді частини ряду Лорана:

$$x\,(t,\ c_\rho) = \sum_{i=-1}^{+\infty}\varepsilon^i\Big[\overline{x}_i\,(t, \overline{c}_i) + \overline{X}_i\,(t)\,P_\rho c_\rho\Big] \quad (4)$$

$$\forall\,c_\rho \in\ R^\rho,$$

де коефіцієнти $\overline{x}_i(t,\overline{c}_i)$, $\overline{c}_i$, $\overline{X}_i(t)$ визначаються за формулами:

$$\overline{x}_i(t,\ \overline{c}_i) = X_r(t)\overline{c}_i + F_{i-1}(t)\,, \tag{5}$$

$$\overline{c}_i = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Bigg(l_1 F_{i-1}(\cdot) -$$

$$-l\Bigg(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)\,Y_{n-s}^*(\tau)\,A_1(\tau)F_{i-1}(\tau)\,d\tau -$$

$$-\Phi(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Bigg(\Big[\Psi^*(t)\,L\Phi(t)\Big]^{-1}\times$$

$$\times\Psi^*(t)\,A_1(t)F_{i-1}(t)\Bigg)(\cdot)\Bigg)\Bigg), i=1,2,... \tag{6}$$

$$\overline{X}_i(t) = X_r(t)D_i + K_{i-1}(t)\,, \tag{7}$$

$$\overline{X}_{-1}(t) = X_r(t),$$

$$D_i = I_r - B_0^+ P_{Q_d^*}\Bigg[l_1 K_{i-1}(\cdot) -$$

$$-l\Bigg(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)\,Y_{n-s}^*(\tau)\,A_1(\tau)K_{i-1}(\tau)\,d\tau -$$

$$-\Phi(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Bigg(\Big[\Psi^*(t)\,L\Phi(t)\Big]^{-1}\times$$

$$\times\Psi^*(t)\,A_1(t)K_{i-1}(t)\Bigg)(\cdot)\Bigg)\Bigg], \tag{8}$$

$$F_{i-1}(t) = \Bigg(G\Big[A_1(\cdot)\,\overline{x}_{i-1}(\cdot,\overline{c}_{-1})\Big]\Bigg)(t) +$$

$$+X_{n-s}(t)\,Q^+ l_1 \overline{x}_{i-1}(\cdot,\overline{c}_{i-1})\,, \tag{9}$$

$$K_{i-1}(t) = \Bigg(G\Big[A_1(\cdot)\,X_{i-1}(\cdot)\Big]\Bigg)(t) +$$

$$+X_{n-s}(t)\,Q^+ l_1 X_{i-1}(\cdot)\,. \tag{10}$$

Матриця B_0 побудована з врахуванням збурюючого коефіцієнта $A_1(t)$ системи (1) і векторного функціонала l_1 в крайовій умові (2).

Поряд з задачею (1), (2) розглядали породжуючу вироджену крайову задачу

$$B(t)\,\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + f(t)\,,$$

$$l\,x(\cdot) \;=\; \alpha\,\in R^m, \qquad t\in[a;b]\,, \tag{11}$$

яка згідно доведеної теореми [6] розв'язна тоді і тільки тоді, коли неоднорідності $f(t) \in \in C^{\,q-1}[a,\ b]$ в диференціальній системі та $\alpha \in R^{\,m}$ в крайовій умові задовольняють d лінійно незалежні умови:

$$P_{Q_d^*}\Bigg(\alpha - l\Bigg(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)\,Y_{n-s}^*(\tau)\,f(\tau)\,d\tau -$$

$$-\Phi(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Bigg(\Big[\Psi^*(t)\,L\Phi(t)\Big]^{-1}\times$$

$$\times\Psi^*(t)\,f(t)\Bigg)(\cdot)\Bigg)\Bigg) = 0, \quad (d=m-n_1) \tag{12}$$

при цьому задача (11) має $r = (n-s-n_1)$-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$x(t,\ c_r) = X_r(t)c_r + X_{n-s}(t)\,Q^+\alpha +$$

$$+(Gf)(t) \qquad \forall\, c_r \in R^{\,r}, \tag{13}$$

де $(Gf)(t)$ – узагальнений оператор Гріна, який діє на довільну вектор-функцію $f(t)$ з $C^{\,q-1}\,[a,\ b]$ таким чином

$$(Gf)(t) = -X_{n-s}(t)Q^+\times$$

$$\times l\Bigg(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)f(\tau)d\tau -$$

$$-\Phi(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Bigg(\Big[\Psi^*(t)L\Phi(t)\Big]^{-1}\times$$

$$\times\Psi^*(t)f(t)\Bigg)(\cdot)\Bigg) + \int\limits_a^t X_{n-s}(t)Y_{n-s}^*(\tau)f(\tau)d\tau -$$

$$-\Phi(t)\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Bigg(\Big[\Psi^*(t)L\Phi(t)\Big]^{-1}\Psi^*(t)f(t)\Bigg).$$

При цьому припускали, що породжуюча вироджена крайова задача (11), яка отримана з (1), (2) при $\varepsilon = 0$, має розв'язки не при всіх неоднорідностях $f(t) \in C^{\,q-1}\,[a,b]$ і $\alpha \in R^{\,m}$.

Вважали, що диференціальна система крайової задачі (11) така, що невиродженим лінійним перетворенням зводиться до центральної канонічної форми [5]. Поставлену задачу розв'язували використовуючи метод Вішика–Люстерника [11], тобто розв'язок крайової задачі (1), (2) шукали в вигляді частини ряду Лорана за степенями малого параметру ε :

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{i=-1}^{+\infty}\varepsilon^{i}x_i(t)=\frac{x_{-1}(t)}{\varepsilon}+x_0(t)+$$

$$+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2 x_2(t)+...$$

В даній роботі покажемо, що при достатньо малих фіксованих $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$ ряд (4) з коефіцієнтами, визначеними згідно з формул (5) – (10) буде збігатися при $\forall\, t\in[a,b]$.

Ряд (4) можна розглядати як суму двох рядів $\sum\limits_{i=-1}^{+\infty}\varepsilon^{i}\overline{x}_i(t,\overline{c}_i)$ і $\sum\limits_{i=-1}^{+\infty}\varepsilon^{i}\overline{X}_i(t)P_\rho c_\rho$. Оскільки сумою двох збіжних рядів є збіжний ряд, то доведемо збіжність кожного з рядів окремо.

Перше доведемо на збіжність ряд

$$\sum_{i=-1}^{+\infty}\varepsilon^{i}\overline{x}_i(t,\overline{c}_i) \tag{14}$$

з коефіцієнтами визначеними згідно з формул (5), (6), (9):

$$\overline{x}_i(t,\ \overline{c}_i)=X_r(t)\overline{c}_i+F_{i-1}(t),$$

$$\overline{c}_i=-B_0^{+}P_{Q_d^*}\Bigg(l_1F_{i-1}(\cdot)-$$

$$-l\Bigg(\int\limits_a^{\cdot}X_{n-s}(\cdot)\,Y_{n-s}^{*}(\tau)\,A_1(\tau)F_{i-1}(\tau)\,d\tau-$$

$$-\Phi(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1}\mathrm{I}^k\frac{d^k}{dt^k}\Bigg(\Big[\Psi^*(t)\,L\Phi(t)\Big]^{-1}\times$$

$$\times\Psi^*(t)\,A_1(t)F_{i-1}(t)\Bigg)(\cdot)\Bigg)\Bigg),\quad (i=1,2,..)$$

$$F_{i-1}(t)=\Bigg(G\Big[A_1(\cdot)\,\overline{x}_{i-1}(\cdot,\overline{c}_{i-1})\Big]\Bigg)(t)+$$

$$+X_{n-s}(t)\,Q^{+}l_1\overline{x}_{i-1}(\cdot,\overline{c}_{i-1}).$$

Зробимо оцінки коефіцієнтів $\overline{x}_i(t,\overline{c}_i)$, $\overline{c}_i$. Для будь-якого $t\in[a,b]$ маємо:

$$\|\int\limits_a^t X_{n-s}(t)\,Y_{n-s}^{*}(\tau)\,f(\tau)\,d\tau-$$

$$-\Phi(t)\sum_{k=0}^{q-1}\mathrm{I}^k\frac{d^k}{dt^k}\Bigg(\Big[\Psi^*(t)\,L\Phi(t)\Big]^{-1}\Psi^*(t)\,f(t)\Bigg)\|\le$$

$$\le\vartheta_n\|f(t)\|=\vartheta\|f(t)\|,$$

де $\vartheta=max\ \vartheta_n,\quad n=\overline{0,\,q-1}$.

Для узагальненого оператора Гріна $(Gf)(t)$ маємо наступну оцінку:

$$\|(Gf)(t)\|\le a_1b_1h\vartheta\|f(t)\|+\vartheta\|f(t)\|=$$

$$=\le\vartheta(a_1b_1h+1)\|f(t)\|=H\|f(t)\|,$$

де $\|Q^{+}\|=b_1,\quad \|l\|=h,$
$\|X_{n-s}(t)\|:=\sup\limits_{t\in[a,b]}\|X_{n-s}(t)\|=a_1.$

Через норму $\|\cdot\|$ будемо позначати стандартну sup норму відповідного оператора. Через H позначимо вираз $H=\vartheta(a_1b_1h+1)$.

Для коефіцієнта $F_0(t)$ (9) маємо оцінку:

$$\|F_0(t)\|\le H\|A_1(t)\,\overline{x}_0(t,\overline{c}_0)\|+$$

$$+a_1b_1h_1\|\overline{x}_0(t,\overline{c}_0)\|=$$

$$=Hd_1\|\overline{x}_0(t,\overline{c}_0)\|+a_1b_1h_1\|\overline{x}_0(t,\overline{c}_0)\|=$$

$$=(Hd_1+a_1b_1h_1)\|\overline{x}_0(t,\overline{c}_0)\|=P_1\|\overline{x}_0(t,\overline{c}_0)\|,$$

де $\|l_1(t)\|=h_1,\quad \|A_1(t)\|=d_1$, а через P_1 позначимо вираз $P_1=Hd_1++a_1b_1h_1$.

Для коефіцієнта $\overline{c}_1$ (6) маємо оцінку:

$$\|\overline{c}_1\|\le pg(h_1P_1\|\overline{x}_0(t,\overline{c}_0)\|+h\vartheta\|A_1(t)\,F_0(t)\|)=$$

$$=pg(h_1P_1\|\overline{x}_0(t,\overline{c}_0)\|+h\vartheta d_1P_1\|\overline{x}_0(t,\overline{c}_0)\|)=$$

$$=pgP_1(h_1+h\vartheta d_1)\|\overline{x}_0(t,\overline{c}_0)\|=\gamma\|\overline{x}_0(t,\overline{c}_0)\|,$$

де $\|B_0^{+}\|=p,\quad \|P_{Q_d^*}\|=g$, а через γ позначимо вираз $\gamma=pgP_1(h_1+h\vartheta d_1)$.

Для коефіцієнта $\overline{x}_1(t,\overline{c}_1)$ (5) маємо оцінку:

$$\|\overline{x}_1(t,\overline{c}_1)\|\le f_1\gamma\|\overline{x}_0(t,\overline{c}_0)\|+P_1\|\overline{x}_0(t,\overline{c}_0)\|=$$

$$=(f_1\gamma+P_1)\|\overline{x}_0(t,\overline{c}_0)\|,$$

де $\|X_r(t)\|=f_1$.

Для коефіцієнтів $\overline{c}_2$, $\overline{x}_2\left(t,\overline{c}_2\right)$ маємо такі оцінки:

$$\|\overline{c}_2\| \leq \gamma\|\overline{x}_1\left(t,\overline{c}_1\right)\|,$$

$$\|\overline{x}_2\left(t,\overline{c}_2\right)\| \leq (f_1\gamma + P_1)\|\overline{x}_1\left(t,\overline{c}_1\right)\|.$$

Підставимо з попередньої оцінки вираз для $\|\overline{x}_1\left(t,\overline{c}_1\right)\|$ й будемо мати:

$$\|\overline{c}_2\| \leq \gamma\|\overline{x}_1\left(t,\overline{c}_1\right)\| \leq \gamma(f_1\gamma + P_1)\|\overline{x}_0\left(t,\overline{c}_0\right)\|,$$

$$\|\overline{x}_2\left(t,\overline{c}_2\right)\| \leq (f_1\gamma + P_1)\|\overline{x}_1\left(t,\overline{c}_1\right)\| \leq$$

$$\leq (f_1\gamma + P_1)^2\|\overline{x}_0\left(t,\overline{c}_0\right)\|.$$

Для коефіцієнтів $\overline{c}_3$, $\overline{x}_3\left(t,\overline{c}_3\right)$ маємо такі оцінки:

$$\|\overline{c}_3\| \leq \gamma\|\overline{x}_2\left(t,\overline{c}_2\right)\|,$$

$$\|\overline{x}_3\left(t,\overline{c}_3\right)\| \leq (f_1\gamma + P_1)\|\overline{x}_2\left(t,\overline{c}_2\right)\|.$$

Підставимо з попередньої оцінки вираз для $\|\overline{x}_2\left(t,\overline{c}_2\right)\|$ й будемо мати:

$$\|\overline{c}_3\| \leq \gamma\|\overline{x}_2\left(t,\overline{c}_2\right)\| \leq (f_1\gamma + P_1)^2\|\overline{x}_0\left(t,\overline{c}_0\right)\|,$$

$$\|\overline{x}_3\left(t,\overline{c}_3\right)\| \leq (f_1\gamma + P_1)\|\overline{x}_2\left(t,\overline{c}_2\right)\| \leq$$

$$\leq (f_1\gamma + P_1)^3\|\overline{x}_0\left(t,\overline{c}_0\right)\|.$$

Продовжуючи цей процес, легко переконатися, що для коефіцієнтів $\overline{c}_i \in R^r$, $\overline{x}_i\left(t,\overline{c}_i\right)$ ряду (14) мають місце оцінки:

$$\|\overline{c}_i\| \leq \gamma(f_1\gamma + P_1)^{i-1}\|\overline{x}_0\left(t,\overline{c}_0\right)\|,$$

$$\|\overline{x}_i\left(t,\overline{c}_i\right)\| \leq (f_1\gamma + P_1)^{i}\|\overline{x}_0\left(t,\overline{c}_0\right)\|,$$

$$(i = 1, 2, \ldots).$$

Таким чином для всіх $t \in [a,b]$ ряд (14) мажорується рядом

$$\varepsilon^{-1}\|x_{-1}(t,c_{-1})\| + \sum_{i=0}^{+\infty}[\varepsilon(f_1\gamma + P_1)]^i\|x_0(t,c_0)\|.$$

Коефіцієнти $\|x_{-1}(t,c_{-1})\|$ і $\|x_0(t,c_0)\|$ обмежені. Тому при всіх $t \in [a,b]$ та фіксованих $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, ряд (14) збігається, де $\varepsilon_0 < [f_1\gamma + P_1]^{-1}$, що й треба було довести.

Покажимо, що й друга частина ряду (4), тобто ряд

$$\sum_{i=-1}^{+\infty}\varepsilon^i\overline{X}_i\left(t\right)P_\rho c_\rho \qquad (15)$$

з коефіцієнтами визначеними згідно з формул (7), (8), (10):

$$\overline{X}_i\left(t\right) = X_r(t)D_i + K_{i-1}\left(t\right), \quad \overline{X}_{-1}(t) = X_r(t),$$

$$D_i = I_r - B_0^+P_{Q_d^*}\Bigg(l_1K_{i-1}\left(\cdot\right) -$$

$$-l\Bigg(\int_a^{\cdot} X_{n-s}\left(\cdot\right)Y^*_{n-s}\left(\tau\right)A_1(\tau)K_{i-1}\left(\tau\right)d\tau -$$

$$-\Phi\left(\cdot\right)\sum_{k=0}^{q-1}\mathrm{I}^k\frac{d^k}{dt^k}\Bigg(\Big[\Psi^*\left(t\right)L\Phi\left(t\right)\Big]^{-1}\times$$

$$\times\Psi^*\left(t\right)A_1(t)K_{i-1}\left(t\right)\Bigg)\left(\cdot\right)\Bigg)\Bigg),$$

$$K_{i-1}\left(t\right) = \Bigg(G\Big[A_1\left(\cdot\right)\overline{X}_{i-1}\left(\cdot\right)\Big]\Bigg)(t) +$$

$$+X_{n-s}\left(t\right)Q^+l_1\overline{X}_{i-1}\left(\cdot\right)$$

також буде при $t \in [a,b]$ та $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ збігатися та знайдемо оцінку для ε_0.

Знайдемо оцінки коефіцієнтів $\overline{X_i}(t)$. Для будь-якого $t \in [a,b]$ знайдемо оцінку для коефіцієнта $K_{-1}\left(t\right)$ (10), використавши вище отримані оцінки:

$$\|K_{-1}\left(t\right)\| \leq H\|A_1\left(t\right)\overline{X}_{-1}\left(t\right)\| +$$

$$+a_1b_1h_1\|\overline{X}_{-1}\left(t\right)\| =$$

$$= Hd_1\|\overline{X}_{-1}\left(t\right)\| + a_1b_1h_1\|\overline{X}_{-1}\left(t\right)\| =$$

$$= (Hd_1 + a_1b_1h_1)\|\overline{X}_{-1}\left(t\right)\| = P_1\|\overline{X}_{-1}\left(t\right)\|.$$

Для коефіцієнта D_0 (8) маємо оцінку:

$$\|D_0\| \leq 1 + pg(h_1P_1\|\overline{X}_{-1}\left(t\right)\| +$$

$$+h\vartheta\|A_1\left(t\right)K_{-1}\left(t\right)\|) =$$

$$= 1 + pg(h_1P_1\|\overline{X}_{-1}\left(t\right)\| + h\vartheta d_1P_1\|\overline{X}_{-1}\left(t\right)\| =$$

$$= 1 + pgP_1(h_1 + h\vartheta d_1)\|\overline{X}_{-1}\left(t\right)\| =$$

$$= 1 + \gamma\|\overline{X}_{-1}\left(t\right)\|.$$

Для коефіцієнта $\overline{X}_0\left(t\right)$ (7) маємо наступну оцінку:

$$\|\overline{X}_0\left(t\right)\| \leq f_1(1+\gamma\|\overline{X}_{-1}\left(t\right)\|) + P_1\|\overline{X}_{-1}\left(t\right)\| =$$

$$= f_1 + (f_1\gamma + P_1)\|\overline{X}_{-1}\left(t\right)\|.$$

Для коефіцієнтів $K_0(t)$, D_1, $\overline{X}_1(t)$ маємо такі оцінки:

$$\|K_0(t)\| \leq P_1\|\overline{X}_0(t)\|,$$

$$\|D_1\| \leq 1+\gamma\|\overline{X}_0(t)\|,$$

$$\|\overline{X}_1(t)\| \leq f_1+(f_1\gamma+P_1)\|\overline{X}_0(t)\|.$$

Підставимо в $\|\overline{X}_1(t)\|$ вираз для $\|\overline{X}_0(t)\|$, отримаємо

$$\|\overline{X}_1(t)\| \leq f_1+(f_1\gamma+P_1)\times$$

$$\times(f_1+(f_1\gamma+P_1)\|\overline{X}_{-1}(t)\|)=$$

$$=f_1+f_1(f_1\gamma+P_1)+(f_1\gamma+P_1)^2\|\overline{X}_{-1}(t)\|.$$

Позначимо через N вираз $N=f_1\gamma+P_1$, тоді

$$\|\overline{X}_1(t)\| \leq f_1+f_1N+N^2\|\overline{X}_{-1}(t)\|=$$

$$=f_1(1+N)+N^2\|\overline{X}_{-1}(t)\|.$$

Для коефіцієнта $\overline{X}_2(t)$ маємо:

$$\|\overline{X}_2(t)\| \leq f_1+(f_1\gamma+P_1)\|\overline{X}_1(t)\|=$$

$$=f_1+N\|\overline{X}_1(t)\|.$$

Підставивши вираз для $\|\overline{X}_1(t)\|$ в $\|\overline{X}_2(t)\|$ отримаємо:

$$\|\overline{X}_2(t)\| \leq f_1+N\|\overline{X}_1(t)\| \leq$$

$$\leq f_1+N\Big(f_1(1+N)+N^2\|\overline{X}_{-1}(t)\|\Big)=$$

$$=f_1(1+N+N^2)+N^3\|\overline{X}_{-1}(t)\|.$$

Продовжуючи цей процес, застосовуючи метод математичної індукції легко переконатися, що для коефіцієнта $\overline{X}_i(t)$ ряду (15) має місце оцінка:

$$\|\overline{X}_i(t)\| \leq f_1(1+N+N^2+\cdots+N^i)+$$

$$+N^{i+1}\|\overline{X}_{-1}(t)\|.$$

Нехай для коефіцієнта $\overline{X}_{i-1}(t)$ ряду (15) має місце оцінка

$$\|\overline{X}_{i-1}(t)\| \leq f_1(1+N+N^2+\cdots+N^{i-1})+$$

$$+N^i\|\overline{X}_{-1}(t)\|.$$

Тоді для коефіцієнта $\overline{X}_i(t)$ ряду (15) має місце наступна оцінка

$$\|\overline{X}_i(t)\| \leq f_1+(f_1\gamma+P_1)\|\overline{X}_{i-1}(t)\|=$$

$$=f_1+N\|\overline{X}_{i-1}(t)\| \leq$$

$$\leq f_1+N\Big(f_1(1+N+N^2+\cdots+N^{i-1})+N^i\|\overline{X}_{-1}(t)\|\Big)=$$

$$=f_1(1+N+N^2+\cdots+N^i)+N^{i+1}\|\bar{X}_{-1}(t)\|.$$

Оскільки $\|\overline{X}_{-1}(t)\|=\|\overline{X}_r(t)\| \leq f_1$, тоді

$$\|\overline{X}_i(t)\| \leq f_1(1+N+N^2+\cdots+N^i+N^{i+1}).$$

Отже, для ряду (15) має місце оцінка

$$\|\sum_{i=-1}^{+\infty}\varepsilon^i\overline{X}_i(t)P_{B_\rho}c_\rho\| \leq \sum_{i=-1}^{+\infty}\varepsilon^i\|\overline{X}_i(t)P_{B_\rho}c_\rho\| \leq$$

$$\leq \|P_{B_\rho}c_\rho\|\sum_{i=-1}^{+\infty}\varepsilon^i\|\overline{X}_i(t)\| \leq$$

$$\leq \|P_{B_\rho}c_\rho\|\sum_{i=-1}^{+\infty}\varepsilon^i f_1(1+N+N^2+\cdots+N^i+N^{i+1}).$$

Ряд

$$\sum_{i=-1}^{+\infty}\varepsilon^i(1+N+N^2+\cdots+N^i+N^{i+1})$$

буде збігатись при будь яких $t\in[a,b]$ та кожному достатньо малому фіксованому ε з проміжку $(0,\varepsilon_0]$.

При $N\geq 1$ маємо ряд

$$\sum_{i=-1}^{+\infty}\varepsilon^i(1+N+N^2+\cdots+N^i+N^{i+1}) \leq$$

$$\leq N\sum_{i=-1}^{+\infty}(i+2)(\varepsilon N)^i,$$

який збігається при всіх $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0<N^{-1}$.

Якщо ж $N\leq 1$ маємо ряд

$$\sum_{i=-1}^{+\infty}\varepsilon^i(1+N+N^2+\cdots+N^i+N^{i+1}) \leq$$

$$\leq \sum_{i=-1}^{+\infty}(i+2)(\varepsilon)^{i+1},$$

який збігається при всіх $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0<1$.

Отже, при всіх $t\in[a,b]$ та будь-яких фіксованих $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, ряд (15) збігається, де

$$\varepsilon_0<min\{1,N^{-1}\}=min\{1,(f_1\gamma+P_1)^{-1}\}. \tag{16}$$

Отже, справедливе наступне твердження.

Теорема. *Нехай вироджена породжуюча крайова задача при довільних неоднорідностях $f(t) \in C^{q-1}[a,b]$ і $\alpha \in R^m$ не має розв'язків. Тоді крайова задача (1), (2) при умові (3):*

$$rank\Bigg[B_0 := P_{Q_d^*}\Bigg(l_1 X_r(\cdot) -$$

$$-l\Bigg(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)\, Y_{n-s}^*(\tau)\, A_1(\tau) X_r(\tau) d\tau -$$

$$-\Phi(\cdot) \sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Bigg(\Big[\Psi^*(t)\, L\Phi(t)\Big]^{-1} \times$$

$$\times \Psi^*(t)\, A_1(t) X_r(t)\Bigg)(\cdot)\Bigg)\Bigg)\Bigg] = d,$$

$$(d = m - rank\, Q)$$

має $\rho = (n-s-m)$ -параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків у вигляді частини ряду Лорана (4):

$$x(t,\ c_\rho) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i \Big[\overline{x}_i(t, \overline{c}_i) + \overline{X}_i(t)\, P_\rho c_\rho\Big]$$

$$\forall\, c_\rho \in\ R^\rho,$$

який є збіжним при будь-яких $t \in [a,b]$ і при кожному фіксованому достатньо малому $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$, де згідно формули (16)

$$\varepsilon_0 < min\{1, (f_1\gamma + P_1)^{-1}\},$$

f_1, γ, P_1 – константи, а коефіцієнти $\overline{x}_i(t,\overline{c}_i)$, $\overline{c}_i$, $\overline{X}_i(t)$ визначаються за формулами (5) – (10).

Таким чином, формула (16) дає оцінку збіжності побудованого ряду (4) відповідної крайової задачі (1), (2).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Campbell S.L., Petzold L.R.* Canonical forms and solvable singular systems of differential equations // SIAM J. Alg. Discrete Methods. – 1983. – N4. – P. 517 – 521.

2. *Rheinboldt W.C.* Differential-algebraic systems as differential equations on manifolds // Math. Comp. – 1984. – Vol. 43, N 168. – P. 473 – 482.

3. *Бояринцев Ю.Е., Данилов В.А., Логинов А.А., Чистяков В.Ф.* Численные методы решения сингулярных систем. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. – 223 с.

4. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. – Новосибирск: Наука, 2003. – 317 с.

5. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – Київ: Вища школа, 2000. – 294 с.

6. *Бойчук А.А., Шегда Л.М.* Вироджені нетерові крайові задачі // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, № 3. – С. 303 – 312.

7. *Бойчук А.А., Покутный А.А., Чистяков В.Ф.* О применении теории возмущений к исследованию разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – **53**, № 6. – С. 958 – 969.

8. *Бойчук А. А., Шегда Л.М.* Бифуркация решений вырожденных нетёровых краевых задач // Дифференциальные уравнения. – 2011. – **47**, № 4. – С. 459 – 467.

9. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary Value Problems. – *VSP, Utrecht-Boston*, 2004. – 317 p.

10. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 318 с.

11. *Вишик В.И., Люстерник Л.А.* Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1960. –**15**, вып. 3. – С. 3 – 80 .