УДК 517.929

©2014 р. І.А. Бондар

Інститут математики НАН України

ІМПУЛЬСНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Використовуючи ефективні, конструктивні методи дослідження крайових задач та розглядаючи імпульсну задачу як внутрішню крайову задачу (”interface BVP’s”), встановлено критерій розв’язності імпульсної крайової задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь та знайдено загальний вигляд розв’язку таких задач у відповідних просторах.

Using effective and constructive methods of the research of boundary value problems and considering the impulsive problem as ”interface boundary value problems”, we obtain necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of an impulsive boundary value problem for systems of integro-differential equations in the appropriate spaces.

При математичному моделюванні еволюції реальних процесів з короткочасовими збуреннями часто їх тривалістю можна знехтувати і вважати, що ці збурення носять "миттєвий" характер. Така ідеалізація приводить до необхідності дослідження динамічних систем з розривними траєкторіями або, як їх часто називають, диференціальних систем з імпульсним впливом.

М.М. Крилов та М.М. Боголюбов показали, що при дослідженні систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом можна успішно застосовувати асимптотичні методи нелінійної механіки. Систематичне вивчення математичних проблем теорії диференціальних систем з імпульсним впливом почалося у роботах А.Д. Мишкіса, А.М. Самойленка, М.О. Перестюка [1, 2], А. Халаная, Д. Векслера [3]. У подальшому, ідеї, закладені у цих роботах, отримали свій розвиток та узагальнення у багаточисленних публікаціях [4–10]. Стало зрозуміло, що теорію диференціальних систем з імпульсним впливом можна розвивати і для дослідження розв’язності систем інтегро-диференціальних рівнянь [11–13]. Такий напрям у теорії інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсним впливом і буде предметом дослідження даної роботи.

Використовуючи результати, отримані у роботах [2, 14–16], з’ясуємо умови розв’язності та загальний вигляд розв’язку крайової задачі для системи інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсним впливом у фіксований момент часу, а саме

$$\dot{x}(t) - \Phi(t)\int_a^b \Big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\Big]ds = f(t), \quad (1)$$

$$\Delta E_i x|_{t=\tau_i} := S_i x(\tau_i - 0) + \gamma_i, \quad (2)$$

$$t \neq \tau_i, t \in [a,b], \tau_i \in (a,b), i = 1,2,...,p,$$

$$\ell x(\cdot) = \alpha. \quad (3)$$

Будемо використовувати припущення і позначення з [17–19], де: $A(t), B(t), \Phi(t)$ — $(m\times n)$, $(m\times n)$, $(n\times m)$-вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a,b]$; вектор-стовпці матриці $\Phi(t)$ — лінійно-незалежні на $[a,b]$, $f(t)$ — n-вимірна вектор-функція з $L_2[a,b]$; E_i, S_i — $(k_i \times n)$-вимірні матриці, γ_i — k_i-вимірний вектор стовпець сталих, $\operatorname{rank}(E_i + S_i) = k_i$ $(i = 1,2,...,p)$, тобто розв’язок імпульсної системи (1), (2), визначається однозначним продовженням через точки розриву:

$$\Delta E_i x|_{t=\tau_i} = E_i\big(x(\tau_i + 0) - x(\tau_i - 0)\big); \quad (4)$$

$\ell = col(\ell_1, \ell_2, ..., \ell_q)$ — лінійний обмежаний q-вимірний векторний функціонал, $\alpha = col(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_q) \in R^q$.

Розв'язок $x(t)$ крайової задачі (1)–(3) шукаємо у просторі $D_2([a,b]\setminus\{\tau_i\}_I)$ — простір n-вимірних функцій, які допускають розриви першого роду в точках $\tau_1,\tau_2,...,\tau_p\in(a,b)$ і які абсолютно неперервні на кожному із проміжків $[a,\tau_1),[\tau_1,\tau_2),...,[\tau_p,b]$. Такі функції $x(t)\in D_2([a,b]\setminus\{\tau_i\}_I)$ допускають зображення:

$$x(t)=\int_a^t\dot{x}(s)ds+x(a)+$$

$$+\sum_{i=1}^{p}\chi_{[\tau_i,b]}(t)\Delta x(\tau_i),\quad(5)$$

де $\Delta x(\tau_i)=x(\tau_i)-x(\tau_i-0)$, $\chi_{[\tau_i,b]}(t)$ — характеристична функція проміжка $[\tau_i,b]$ [20]. Норми у відповідних просторах задаються наступним чином:

$$\|x\|_{D_2([a,b]\setminus\{\tau_i\}_I)}=\|\dot{x}\|_{L_2[a,b]}+|x(a)|_{R^n}+$$

$$+\|\sum_{i=1}^{p}\chi_{[\tau_i,b]}(t)\Delta x(\tau_i)\|_{R^n},$$

$$\|x\|_{L_2[a,b]}=\left(\int_a^b\sum_{i=1}^{n}|\,x_i(t)\,|^2\,dt\right)^{1/2},t\in[a,b].$$

Отже, розв'язок імпульсної крайової задачі (1)–(3) шукаємо у наступному класі вектор-функцій:

$$x(t)\in D_2([a,b]\setminus\{\tau_i\}_I),\ \dot{x}(t)\in L_2[a,b],$$

$$t\in[a,b],\ \tau_i\in(a,b),\quad i=1,...,p.$$

Розглядаючи імпульс у вигляді (2), ми припускаємо, що він задається не по всіх компонентах вектор-функції $x(t)=col(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$, а тільки по її частинах. Таким чином, можна розглядати випадок, коли перший імпульс задається лише по першій компоненті, другий — лише по другій і т.д., n імпульс — по n компоненті вектор-функції $x(t)$. Або, наприклад, у точках $\tau_j\in(a,b)$ вектор-функція $x(t)$ може взагалі не мати імпульсу, а у точках $\tau_i\in(a,b)$, $i\neq j$, може мати імпульси по z-тих $(z=1,2,...,n)$ компонентах вектор-функції $x(t)$.

Загальний метод дослідження поставленої таким чином задачі використовує ідеї, запропоновані О.А. Бойчуком [2, 4, 14], з використанням псевдообернених (за Муром–Пенроузом) матриць.

Існування розв'язку системи (1) залежить від побудованої $m\times(m+n)$-вимірної матриці D [14]:

$$D=\Big[I_m-\int_a^b[A(s)\Psi(s)+$$

$$+B(s)\Phi(s)]ds,-\int_a^b A(s)ds\Big]$$

і згідно критерія розв'язності [14] системи (1), якщо виконується умова:

$$P_{D^*_{d_1}}\tilde{b}=0,\qquad(6)$$

$$d_1=m-n_1,\quad n_1=rankD,$$

то лінійна неоднорідна система інтегро-диференціальних рівнянь (1) має r_1-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків:

$$x(t)=\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}c+F(t),\quad c\in R^{r_1},\qquad(7)$$

$$r_1=m+n-n_1.$$

Тут

$$F(t)=\tilde{f}(t)+\Psi_0(t)D^+\tilde{b},$$

$$\tilde{b}=\int_a^b\Big[A(s)\tilde{f}(s)+B(s)f(s)\Big]ds,$$

$$\tilde{f}(t)=\int_a^t f(s)ds,$$

$$\Psi(t)=\int_a^t\Phi(s)ds,\quad\Psi_0(t)=\Big[\Psi(t),I_n\Big],$$

$\Psi(t),\ \Psi_0(t)$ — $(n\times n)$- і $n\times(m+n)$-вимірні матриці, I_n — одинична матриця порядку n, D^+ — псевдообернена за Муром-Пенроузом до D матриця; P_D,P_{D^*} — $(m+n)\times(m+n)$- і $(m\times m)$-вимірні матриці, ортопроектори, які діють з R^{m+n} і R^m у ядро та коядро матриці

D, відповідно. Матриця $P_{D_{r_1}}$ ($P_{D^*_{d_1}}$) складається із повної системи r_1 (d_1) лінійно незалежних стовпців (рядків) матриці $P_D(P_{D^*})$.

Для того, щоб розв'язок $x(t)$ (7) інтегро-диференціальної системи (1) був розв'язком імпульсної крайової задачі (1)–(3), необхідно і достатньо, щоб він задовольняв імпульсну (2) та крайову (3) умови. Як буде показано нижче, імпульсну крайову задачу типу (1)–(3) можна розглядати як внутрішню крайову задачу ("interface boundary-value problem") [21].

Для того, щоб знайти цей зв'язок, введемо k-вимірний лінійний обмежений векторний функціонал $\varphi x(\cdot)$ вигляду:

$$\varphi := col(\varphi_1, ..., \varphi_p) : D_2([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I) \to R^k,$$

$$\varphi_i : D_2([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I) \to R^{k_i}, \quad i = 1, ..., p,$$

$$k := k_1 + k_2 + ... + k_p.$$

Використовуючи наступну систему означень

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 x := E_1 x(\tau_1+) - (E_1 + S_1)x(\tau_1-) \\ \varphi_2 x := E_2 x(\tau_2+) - (E_2 + S_2)x(\tau_2-) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_p x := E_p x(\tau_p+) - (E_p + S_p)x(\tau_p-) \end{array} \right. \tag{8}$$

запишемо імпульсну дію (2) як крайову умову

$$\varphi x(\cdot) = \gamma \in R^k, \tag{9}$$

де $\gamma = col(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_p) \in R^k, \quad \gamma_i \in R^{k_i}$.

Об'єднаємо таким чином отриману внутрішню крайову умову (9) із заданою крайовою умовою (3) і отримаємо $(k + q)$ умов на невідому n-вимірну вектор-функцію $x(t)$:

$$\mathfrak{L}x(\cdot) = \delta \in R^{k+q}, \tag{10}$$

де

$$\mathfrak{L} := \left[\begin{array}{c} \varphi \\ \ell \end{array} \right]$$

$$\mathfrak{L} : D_2\big([a, b]\setminus_{\tau_i}\big) \to R^{k+q},$$

$$\delta := \left[\begin{array}{c} \gamma \\ \alpha \end{array} \right], \quad \delta \in R^{k+q}.$$

Тепер імпульсну крайову задачу (1)–(3) можна розглядати як крайову задачу (1), (10). Аналогічно, як у роботах [14, 19], можна встановити умови розв'язності та вигляд загального розв'язку отриманої таким чином лінійної крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь (1), (10).

Для того, щоб крайова задача (1), (10) була розв'язною, необхідно та достатньо, щоб розв'язок $x(t)$ інтегро-диференціальної системи (1), який визначений згідно (7), задовольняв крайову умову (10). Таким чином, виконавши необхідну підстановку, отримаємо алгебраїчну систему рівнянь відносно невідомого вектора $c \in R^{r_1}$:

$$Qc = \delta - \mathfrak{L}F(\cdot), \tag{11}$$

де $(k + q) \times r_1$-вимірна стала матриця

$$Q := \left[\begin{array}{c} Q_1 \\ Q_2 \end{array} \right],$$

$Q_1 := col(-S_1 X_{r_1}(\tau_1), ..., -S_p X_{r_1}(\tau_p))$ — $(k \times r_1)$-вимірна стала матриця, $Q_2 := \ell X_{r_1}(\cdot)$ — $(q \times r_1)$-вимірна стала матриця, $X_{r_1}(t) = \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}$ — $(n \times r_1)$-вимірна матриця, яка є фундаментальною матрицею відповідної однорідної інтегро-диференціальної системи (1).

Алгебраїчна система (11) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконується умова:

$$P_{Q^*}\Big\{\delta - \mathfrak{L}F(\cdot)\Big\} = 0. \tag{12}$$

Тут P_{Q^*} — $(k \times k)$-вимірна матриця (ортопроектор, $P^2_{Q^*} = P_{Q^*} = P^*_{Q^*}$), $P_{Q^*} : R^k \to N(Q^*)$.

Нехай $rankQ = n_2 \le \min(k, r_1)$. Оскільки вимірність нуль-простору $N(Q)$ дорівнює дефекту матриці Q, то

$$dimN(Q) = r_1 - rankQ = r_1 - n_2 = r.$$

Умова (12) складається із $(k+q)$ скалярних умов, серед яких $(k + q - n_2)$ умов є лінійно незалежними, тобто

$$rankP_{Q^*} = d = k + q - n_2.$$

Введемо $d \times (k + q)$-вимірну матрицю $P_{Q^*_d}$, яка складається із d лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора P_{Q^*} [2, 3, 16]. Матриця $P_{Q_d^*}$ дозволяє записати необхідну та достатню умову розв'язності системи (11), яка складається тільки із d лінійно незалежних рядків:

$$P_{Q_d^*}\Big\{\delta - \mathfrak{L}F\,(\cdot)\Big\} = 0. \tag{13}$$

Якщо умова (13) виконується, то система (11) має r лінійно незалежних розв'язків

$$c = Q^+\Big\{\delta - \mathfrak{L}F\,(\cdot)\Big\} + P_{Q_r}c_r, \tag{14}$$
$$\forall c_r \in R^r,$$

де Q^+ — псевдообернена до Q матриця, P_Q — $(r_1 \times r_1)$-вимірна матриця (ортопроектор, $P_Q^2 = P_Q = P_Q^*$), яка переводить простір R^{r_1} у ядро матриці Q ($P_Q : R^{r_1} \to N(Q)$). Матриця P_{Q_r} складається із повної системи r ($r = r_1 - rankQ$) лінійно незалежних стовпців матриці P_Q.

Отриманий вектор $c \in R^r$ (14) визначає r-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків $x(t)$ крайової задачі (1), (10):

$$x(t) = \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}P_{Q_r}c_r + \\ + \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+(\delta - \mathfrak{L}F(\cdot)) + F(t). \tag{15}$$

Таким чином для лінійної імпульсної задачі (1)–(3), яку розглядаємо як внутрішню крайову задачу (1), (10), правильне наступне твердження.

Теорема. *Нехай* $rankD = n_1$, $rankQ = n_2 \le \min(k+q, r_1)$. *Тоді однорідна* ($f = 0$, $\delta = 0$) *імпульсна крайова задача* (1), (10) *має* r *лінійно незалежних розв'язків*

$$x(t) = \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}P_{Q_r}c_r,\ c_r \in R^r,$$
$$r_1 = m + n - n_1, \quad r = r_1 - n_2,$$

Неоднорідна імпульсна крайова задача для системи інтегро-диференціальних рівнянь (1), (10) *у фіксований момент часу є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови*:

$$P_{D_{d_1}^*}\tilde{b} = 0, \quad P_{Q_d^*}\Big\{\delta - \mathfrak{L}F\,(\cdot)\Big\} = 0, \tag{16}$$
$$d_1 = m - n_1, \quad d = k + q - n_2.$$

При виконанні цих умов імпульсна задача (1), (10) *має* r*-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків*

$$x(t) = \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}P_{Q_r}c_r + \\ + \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\Big(\delta - \mathfrak{L}F\,(\cdot)\Big) + F(t),$$

визначених у класі вектор-функцій

$$x(t) \in D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I),\ \dot{x}(t) \in L_2[a,b],$$
$$t \in [a,b],\ \tau_i \in (a,b), \quad i = 1, ..., p.$$

Наслідок 1. *Якщо* $rankQ = k + q = n_2 \iff P_{Q^*} = 0$, *то неоднорідна імпульсна крайова задача для системи інтегро-диференціальних рівнянь* (1), (10) *є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується умова:* $P_{D_{d_1}^*}\tilde{b} = 0$ ($d_1 = m - rankD$), *і має* r*-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків* (15), *визначених у відповідному класі вектор-функцій.*

Наслідок 2. *Якщо*

$$rankQ = n_2 = r_1 < k + q \iff P_Q = 0,$$

то неоднорідна імпульсна крайова задача для системи інтегро-диференціальних рівнянь (1), (10) *є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови* (16), *де* $d = k + q - rankQ$, *і має єдиний розв'язок*

$$x(t) = \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\Big(\delta - \mathfrak{L}F\,(\cdot)\Big) + F(t), \tag{17}$$

який визначений у відповідному класі вектор-функцій.

Зауваження. Якщо розглянути імпульсну крайову задачу (1)–(3), де в імпульсній умові (2) задано $E_i := E$ — $(n \times n)$-вимірні одиничні матриці та S_i — $(n \times n)$-вимірні матриці, $\gamma_i \in R^n$, $i = 1, ..., p$, то отримаємо:

1) раніше відому [1, 7, 10] стандартну імпульсну умову:

$$\Delta x\Big|_{t=\tau_i} := x(\tau_i + 0) - x(\tau_i - 0) = \\ = S_i x(\tau_i - 0) + \gamma_i, \tag{18}$$

яка задається по всіх компонентах невідомої вектор-функції $x(t) = col(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$;

2) $(np+q) \times r_1$-вимірну матрицю Q, від властивостей якої залежить існування розв'язку заданої таким чином імпульсної крайової задачі.

Для такого випадку справедливе наступне твердження.

Наслідок 3. *Якщо*

$$rankQ = n_2 = r_1 < np + q \Longleftrightarrow P_Q = 0,$$

то імпульсна крайова задача для систем інтегро-диференціальних рівнянь (1), (3), (18) *є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови* (16), *де* $d = np + q - rankQ$, *і має єдиний розв'язок* $x(t)$ *заданий рівністю* (17), *який визначений у відповідному класі вектор-функцій.*

Отже, використовуючи ефективні, конструктивні методи дослідження крайових задач, розроблені О.А. Бойчуком [4, 15], та розглядаючи імпульсну задачу як внутрішню крайову задачу ("interface BVP's") [21], встановлено критерій розв'язності імпульсної крайової задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь та знайдено загальний вигляд розв'язку таких задач у відповідних просторах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Перестюк М.О.* Диференціальні рівняння з імпульсною дією. — Київ: Вища школа, 1987.

2. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — VSP, Utrecht–Boston, 2004. — 323 p.

3. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971. — 307 с.

4. *Boichuk A.* Boundary value problems for impulse differential systems // Universitatis Jagellonicae Acta Mathematica. — 1998. — Vol. XXXVI. — P. 187 -– 192.

5. *Boichuk A., Langerova M., Skorikova J.*Bounded Solutions of Impulsive Differential Systems // Functional Differential Equations. — 2011. — Vol. 18, №. 1-2. — P. 89 -– 99.

6. *Бойчук А.А., Перестюк Н.А., Самойленко А.М.* Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях // Дифференц. уравнения. — 1991. — Т. 27, № 9. — С. 1516 — 1521.

7. *Бойчук А.А., Самойленко А.М.* Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. — 1992. — Т. 44, № 4. — С. 564 — 568.

8. *Бойчук А.А., Самойленко А.М.* Краевые задачи и дифференциальные уравнения с импульсным воздействием // Успехи мат. наук. — 1995. — Т. 50, № 4. — С. 94 – 95.

9. *Бойчук А.А., Журавлёв В.Ф., Самойленко А.М.* Слабонелинейные краевые задачи для операторных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. — 1997. — Т. 49, № 2. — С. 272 - – 281.

10. *A.A. Boichuk and A.A. Pokutnyi.* Bounded solutions of linear perturbed differential equations in a Banach space // Tatra Mountains Mathematical Publications. — 2007. — Vol. 38. — P. 29 – 40.

11. *Akhmet M.U., Tleubergenova M.A., Yilmaz O.* Asymptotic behavior of linear impulsive integro-differential equations // Computers and Mathematics with Applications. — 2008. — Vol. 56. — P. 1071 – 1081.

12. *Akhmet M.U., Seilova R.D.* Control of a boundary value problem for a linear impulsive integro-differential system // Integral and integro-differential equations. — 2000. — Vol. 36, № 10. — P. 1369 – 1376.

13. *Черевко И.М., Якимов И.В.* Численный метод решения краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. — 1989. — Т. 41, № 6. — С. 854 – 860.

14. *Самойленко А.М., Бойчук О.А., Кривошея С.А.* Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром // Укр. мат. журн. — 1996. — Т. 48, № 11 — С. 1576 – 1579.

15. *Бойчук А.А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. — К.: Наук. думка, 1990. — 96 с.

16. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев:Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 319 с.

17. *Головацька І.А.* Слабкозбурені системи інтегро-диференціальних рівнянь// Нелінійні коливання. — 2012. — Т. 15, № 2. — С. 151 – 164.

18. *Бойчук О. А., Головацька І.А.* Слабконелінійні системи інтегро-диференціальних рівнянь// Нелінійні коливання. — 2013. — Т. 16, № 3. — С. 314 – 321.

19. *Бойчук О. А., Головацька І.А.* Крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь// Нелінійні коливання. — 2013. — Т. 16, № 4. — С. 460 – 474.

20. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. — Моска: Институт компьютерных исследований, 2002. — 384 с.

21. *Zettl A.* Adjoint and Self-Adjoint BVP's with Interface Conditions // SIAM J. Appl. Math. — 1968. — Vol. 16, № 4 (July).