

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ У ДВОВИМІРНІЙ ОБЛАСТІ

Досліджено нелокальну крайову задачу для диференціального рівняння з частинними похідними у випадку однієї просторової змінної. Доведено теорему єдиності та теорему існування розв'язку задачі у соболевських просторах. Встановлено умови бієктивності оператора нелокальних умов задачі. Показано коректність за Адамаром задачі у цих просторах. Аналогічна задача з багатьма просторовими змінними є некоректною за Адамаром, існування її розв'язку пов'язане з проблемою малих знаменників.

The paper is devoted to investigation of non-local boundary value problem with one spatial variable for a partial differential equation. The existence and uniqueness conditions of a solution of the problem in Sobolev spaces are established. Hadamard's well-posedness of this problem in that spaces are shown. The same problem with several spatial variables is not well posed in the Hadamard sense and the solvability of this problem depends on the small denominators.

1. Вступ. Останнім часом дослідженню нелокальних крайових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними приділяється велика увага. Це зумовлено різними причинами теоретичного і практичного характеру, що стосується теорії фізики плазми, вологопереносу, коливань різних систем, розв'язання обернених задач для рівняння теплопровідності та іншими. Загалом такі задачі є некоректні за Адамаром, а їх розв'язність залежить від оцінки малих знаменників, які виникають під час побудови розв'язку. Дослідженню задач з нелокальними крайовими умовами за часом та умовами періодичності за просторовими змінними для рівнянь з частинними похідними присвячено, зокрема, роботи [1], [3]-[5], [8], [11], [12] у яких для аналізу оцінок знизу малих знаменників було використано методи і результати метричної теорії чисел. Оцінки малих знаменників залежать від числа p — кількості просторових змінних x_1, x_2, \dots, x_p (при збільшенні p швидкість наближення нуля виразами, що містять малі знаменники може лише збільшуватися). У статті у соболевських просторах досліджено нелокальну крайову задачу для однорідного диференціального рівняння з частинними

похідними зі сталими коефіцієнтами у двовимірній області та показано, що у випадку однієї просторової змінної проблеми оцінювання малих знаменників не виникає, як за багатьох просторових змінних, а відповідні вирази знизу оцінюються константами. Подібна задача для диференціального рівняння з узагальненим оператором диференціювання $B = z \frac{\partial}{\partial z}$, що діє на функцію однієї комплексної змінної, розглянута у роботі [7].

2. Основні позначення. Постановка задачі. Позначимо $\Omega = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ — одновимірний тор, $\mathcal{D} = [0, T] \times \Omega$, де $T > 0$.

Нехай \mathbf{W} — лінійний простір тригонометричних многочленів (основних функцій) вигляду $P(x) = \sum_k P_k e^{ikx}$, де P_k — комплексні коефіцієнти, $x \in \Omega$, а k пробігають скінченну множину цілих чисел.

Введемо простір \mathbf{W}' — спряжений з простором \mathbf{W} . Це простір узагальнених 2π -періодичних функцій, які є формальними тригонометричними рядами $Q(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} Q_k e^{ikx}$, що діють на основну функцію $P \in \mathbf{W}$ за таким правилом $\langle Q, P \rangle = \sum_k Q_k \bar{P}_k$, де число \bar{P}_k є комплексно спряженим з числом P_k .

Введемо шкали просторів $\{\mathbf{H}_q(\Omega)\}_{q \in \mathbb{R}}$ і $\{\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})\}_{q \in \mathbb{R}}$, де $\mathbf{H}_q(\Omega)$ — гільбертовий простір функцій $\psi = \psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k e^{ikx}$ з нормою

$$\|\psi\|_{\mathbf{H}_q(\Omega)} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{k}^{2q} |\psi_k|^2 \right)^{1/2}, \quad \tilde{k} = \sqrt{1 + k^2},$$

а $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$, $n \in \mathbb{Z}_+$, — банахів простір таких функцій $u = u(t, x)$, похідні яких визначає формула $\frac{\partial^r u(t, x)}{\partial t^r} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k^{(r)}(t) e^{ikx}$, $r = 0, 1, \dots, n$, і для кожного $t \in [0, T]$ вони належать до просторів $\mathbf{H}_{q-r}(\Omega)$ відповідно та неперервні за змінною t у цих просторах. Квадрат норми функції u у просторі $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$ обчислюється за формулою

$$\|u\|_{\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})}^2 = \sum_{r=0}^{n-1} \max_{[0, T]} \left\| \frac{\partial^r u(t, \cdot)}{\partial t^r} \right\|_{\mathbf{H}_{q-r}(\Omega)}^2.$$

У циліндрі \mathcal{D} розглянемо задачу з нелокальними умовами

$$Lu = \sum_{s_0 + s_1 \leq n} a_{s_0, s_1} \frac{\partial^{s_0 + s_1} u}{\partial t^{s_0} \partial x^{s_1}} = 0, \quad (1)$$

$$M_m u = \mu \frac{\partial^m u}{\partial t^m} \Big|_{t=0} - \frac{\partial^m u}{\partial t^m} \Big|_{t=T} = \varphi_m, \quad (2)$$

де $a_{s_0, s_1} \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a_{n, 0} = 1$, $n \in \mathbb{N}$, φ_m , $m = 0, 1, \dots, n-1$, — задані функції змінної x , а $u = u(t, x)$ — шукана функція.

Нехай q — довільне дійсне число.

Означення. Під розв'язком задачі (1), (2) розуміємо функцію $u \in \mathbf{C}^n([0, T]; \mathbf{W}')$, яка на відрізку $[0, T]$ задовольняє рівняння (1) і умови (2) у просторі \mathbf{W}' та належить до простору $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$.

Якщо виконується умова $u \in \mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$, то $Lu \in \mathbf{H}_{q-n}^0(\mathcal{D})$ і $M_m u \in \mathbf{H}_{q-m}(\Omega)$ для $m = 0, 1, \dots, n-1$, а тому для існування розв'язку задачі (1), (2) необхідно, щоб функції φ_m в нелокальних умовах (2) належали до просторів $\mathbf{H}_{q-m}(\Omega)$ відповідно.

3. Побудова формального розв'язку. Теорема існування та єдиності. Згідно з означенням розв'язку задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду:

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k(t) e^{ikx}, \quad (3)$$

де коефіцієнти $u_k = u_k(t)$ — невідомі функції з простору $\mathbf{C}^n[0, T]$, які треба визначити.

Підставляючи формулу (3) у рівняння (1) та умови (2), отримуємо, що функція $u_k(t)$ для кожного $k \in \mathbb{Z}$ є розв'язком відповідної задачі для звичайного диференціального рівняння, а саме задачі:

$$\sum_{j=0}^n b_j(k) \frac{d^{n-j} u_k(t)}{dt^{n-j}} = 0, \quad (4)$$

$$\mu u_k^{(m)} \Big|_{t=0} - u_k^{(m)} \Big|_{t=T} = \varphi_{mk}, \quad (5)$$

де $m=0, 1, \dots, n-1$, $b_j(k) = \sum_{s_1=0}^j a_{n-j, s_1} (ik)^{s_1}$, φ_{mk} — коефіцієнти Фур'є функції φ_m .

Єдиність розв'язку u_k задачі (4), (5) у просторі $\mathbf{C}^n[0, T]$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ є необхідною і достатньою умовою єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$ для довільного $q \in \mathbb{R}$. Саме тому, якщо хоча б для одного k існує нетривіальний розв'язок $\hat{u}_k = \hat{u}_k(t)$ однорідної задачі (4), (5), то однорідна задача (1), (2) також має нетривіальний розв'язок $u = \hat{u}(t, x)$, який визначається формулою $\hat{u}(t, x) = \hat{u}_k(t) e^{ikx}$ і розв'язок задачі (1), (2) не може бути єдиним.

Для побудови розв'язку задачі (4), (5) проноормуємо коефіцієнти $b_j(k)$, $j = 0, \dots, n$ рівняння (4) і подамо їх у вигляді добутку $b_j(k) = (i\tilde{k})^j \tilde{b}_j(k)$. Функції $\tilde{b}_j(k)$, як і коефіцієнти $b_j(k)$, лінійно залежать від параметрів $a_{n-j, 0}, a_{n-j, 1}, \dots, a_{n-j, j}$ і рівномірно обмежені за k . Очевидно, справджується нерівність

$$\begin{aligned} |\tilde{b}_j(k)| &\leq \sum_{s_1=0}^j |a_{n-j, s_1}| \frac{|k|^{s_1}}{\tilde{k}^j} \leq \\ &\leq \max_{s_1=0, 1, \dots, j} |a_{n-j, s_1}| \sum_{s_1=0}^j \frac{|k|^{s_1}}{\tilde{k}^j}. \end{aligned}$$

Якщо коефіцієнти a_{s_0, s_1} рівняння (1) розглядати у крузі деякого радіуса A з центром у початку координат комплексної площини, то отримаємо оцінки

$$|\tilde{b}_j(0)| = |a_{n-j, 0}| \leq A,$$

$$|\tilde{b}_j(\pm 1)| \leq (j+1) 2^{-j/2} A \leq 3A/2,$$

$$|\tilde{b}_j(k)| \leq \frac{A}{\tilde{k}^j} \frac{|k|^{j+1}}{|k|-1} < \frac{A|k|}{|k|-1}, \quad k \notin \{-1, 0, 1\},$$

тобто $|\tilde{b}_j(k)| < 2A$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Звідси випливає, що для всіх (з врахуванням кратності) коренів $\lambda_1(k), \dots, \lambda_n(k)$ многочлена

$$P_k(\lambda) = \prod_{j=1}^n (\lambda - \lambda_j(k)) = \lambda^n + \sum_{j=1}^n \tilde{b}_j(k) \lambda^{n-j}$$

виконуються нерівності [10, с. 10]:

$$|\lambda_j(k)| \leq 1 + \max\{|\tilde{b}_1|, \dots, |\tilde{b}_n|\} \leq 1 + 2A. \quad (6)$$

Очевидно, що числа $\gamma_j = i\tilde{k}\lambda_j(k)$ є коренями відповідного характеристичного рівняння $\gamma^n + b_1(k)\gamma^{n-1} + \dots + b_n(k) = 0$ для диференціального рівняння (4).

Позначимо через K множину тих цілих чисел k , для яких многочлен P_k має кратний корінь.

Для різних коренів $\lambda_1(k), \dots, \lambda_n(k)$, загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$u_k(t) = \sum_{l=1}^n C_{kl} e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)t}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus K, \quad (7)$$

де C_{kl} — довільні комплексні сталі і належить до простору $\mathbf{C}^n[0, T]$.

Якщо $u_k(t)$ — розв'язок задачі (4), (5), то числа $\tilde{C}_{kl} = (\mu - e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)T}) C_{kl}$, $l = 1, 2, \dots, n$, утворюють розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{l=1}^n \lambda_l^m(k) \tilde{C}_{kl} = \frac{\varphi_{mk}}{(i\tilde{k})^m}, \quad (8)$$

з матрицею Вандермонда $(\lambda_l^{m-1}(k))_{m,l=1}^n$. Навпаки, якщо числа \tilde{C}_{kl} , де $l = 1, \dots, n$, утворюють розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь (8), то функція $u_k(t)$, що визначена формулою (7), в якій $C_{kl} =$

$\frac{\tilde{C}_{kl}}{\mu - e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)T}}$, є розв'язком задачі (4), (5).

Розв'язуючи систему (8) за правилом Крамера, одержуємо рівності

$$\tilde{C}_{kl} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_{jl}(k)}{\Delta(k)} (i\tilde{k})^{-j} \varphi_{jk}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus K,$$

де $\Delta(k) = \prod_{1 \leq r < q \leq n} (\lambda_q(k) - \lambda_r(k))$ — визначник Вандермонда, а $\Delta_{jl}(k)$ — його відповідні алгебричні доповнення, $j = 0, 1, \dots, n-1$, $l = 1, \dots, n$.

Для того, щоб для кожного $k \in \mathbb{Z} \setminus K$ задача (4), (5) мала єдиний класичний розв'язок необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $\mu \neq e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)T}$ для $l = 1, \dots, n$. З цієї умови випливає, що $\ln \mu \neq i\tilde{k}\lambda_l(k)T + i2\pi m$, або $\lambda_l(k) \neq \frac{\ln \mu - i2\pi m}{i\tilde{k}T}$ для довільних $m \in \mathbb{Z}$ та $l = 1, \dots, n$, де $\ln \mu$ — головне значення логарифма μ .

У протилежному випадку ($\mu = e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)T}$ для деякого l) існує таке число $m \in \mathbb{Z}$, що корінь $\lambda_l(k)$ визначається формулою: $\lambda_l(k) = \frac{\ln \mu - i2\pi m}{i\tilde{k}T}$. Тому виконується рівність

$$P_k \left(\frac{\ln \mu - i2\pi m}{i\tilde{k}T} \right) = \frac{(\ln \mu - i2\pi m)^n}{i^n T^n \tilde{k}^n} + \sum_{j=1}^n \tilde{b}_j(k) \frac{(\ln \mu - i2\pi m)^{n-j}}{i^{n-j} T^{n-j} \tilde{k}^{n-j}} = 0$$

або еквівалентна їй рівність

$$(\ln \mu - i2\pi m)^n + \sum_{j=1}^n b_j(k) (iT)^j (\ln \mu - i2\pi m)^{n-j} = 0. \quad (9)$$

Для кратних коренів ($k \in K$) загальний розв'язок рівняння (4) також буде мати вигляд (7) з меншою кількістю доданків, в якому, залежно від кратності коренів $\lambda_l(k)$, замість числових коефіцієнтів C_{kl} будуть многочленні коефіцієнти $C_{kl}(t)$. Можна показати [6, 9], що у цьому разі умова (9) також буде необхідною і достатньою умовою єдності розв'язку задачі (4), (5).

Теорема 1. Для існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{C}^n([0, T]; \mathbf{W}')$ необхідно і достатньо, щоб рівняння (9) не мало розв'язків у цілих числах m і k .

Доведення. Необхідність. Нехай однорідна задача (1), (2) у просторі

$\mathbf{C}^n([0, T]; \mathbf{W}')$ має єдиний розв'язок. Тоді всі функції $u_k(t)$ знаходяться однозначно, тобто однорідна задача (4), (5) у просторі $\mathbf{C}^n[0, T]$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ має єдиний розв'язок, який при $k \in \mathbb{Z} \setminus K$ має вигляд

$$u_k(t) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_{jl}(k)}{\prod_{1 \leq r < q \leq n} (\lambda_q(k) - \lambda_r(k))} \times \frac{e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)T}} (i\tilde{k})^{-j} \varphi_{jk}. \quad (10)$$

Тоді за формулою (3) формальний розв'язок задачі (1), (2) подається у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{k \in K} u_k(t) e^{ikx} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus K} \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_{jl}(k)}{\Delta(k)} \times \frac{e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)T}}{\mu - e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)T}} (i\tilde{k})^{-j} \varphi_{jk} e^{ikx}. \quad (11)$$

Отже, $\Delta(k) \cdot \prod_{l=1}^n (\mu - e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)T}) \neq 0$, якщо $k \in \mathbb{Z} \setminus K$, тобто $\mu \neq e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)T}$ для $l = 1, \dots, n$. Таким чином, рівняння (9) не має розв'язків у цілих числах m і k . Аналогічні нерівності отримуємо при $k \in K$.

Достатність. Доведемо від супротивного. Нехай рівняння (9) має розв'язок для k^*, m^* . Тоді можна вважати, що $\lambda_1(k^*) = \frac{\ln \mu - i2\pi m^*}{i\tilde{k}^*T}$, а однорідна задача (4), (5)

має розв'язок $e^{i\tilde{k}^*\lambda_1(k^*)t} = e^{(\ln \mu - i2\pi m^*)t/T}$. Звідси випливає, що задача (1), (2) у просторі $\mathbf{C}^n([0, T]; \mathbf{W}')$ має або безліч розв'язків, оскільки $u^*(t, x) = Ce^{(\ln \mu - i2\pi m^*)t/T + i\tilde{k}^*x}$, де C — довільна комплексна стала, є розв'язками відповідної однорідної задачі, або жодного.

Теорему доведено.

4. Оцінювання розв'язку та достатні умови існування.

Доведемо належність розв'язку (11) задачі (1), (2) до простору $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$. Враховуючи, що K — скінченна множина (буде показано далі), оцінимо абсолютну величину функцій u_k та їх похідних до порядку n лише

для $k \in \mathbb{Z} \setminus K$, зокрема

$$|u_k^{(r)}(t)| \leq \frac{\tilde{k}^r}{|\Delta(k)|} \max_{j,l} |\Delta_{jl}(k)| \times \sum_{l=1}^n \frac{|\lambda_l^r(k) e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)t}|}{|\mu - e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)T}|} \sum_{j=0}^{n-1} |\tilde{k}^{-j} \varphi_{jk}|, \quad t \in [0, T].$$

Піднесемо обидві частини нерівності до квадрату і перетворимо до вигляду

$$|u_k^{(r)}(t)|^2 \leq n^3 (1 + 2A)^{2r} \frac{\tilde{k}^{2r}}{|\Delta(k)|^2} \times \max_{j,l} |\Delta_{jl}(k)|^2 \max_l \left| \frac{e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)T}} \right|^2 \times \sum_{j=0}^{n-1} |\tilde{k}^{-j} \varphi_{jk}|^2. \quad (12)$$

Оскільки $\Delta_{jl}(k)$ — визначники порядку $n - 1$, що мають обмежені елементи, які є степенями чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то з (6) маємо

$$|\Delta_{jl}(k)| \leq (n - 1)! (1 + 2A)^{(n-1)n/2}. \quad (13)$$

Для подальшої оцінки $|u_k|$ розглянемо вираз

$$\Delta^2(k) = \prod_{1 \leq r < q \leq n} (\lambda_q(k) - \lambda_r(k))^2,$$

який є дискримінантом $D(k)$ полінома P_k і визначається за коефіцієнтами цього полінома [2, с. 124]:

$$D(k) = (-1)^{n(n-1)/2} \det \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix},$$

де $\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$ — квадратна матриця, яка складається з блоків $V_1 = (v_{j-i}^1(k))$ і $V_2 = (v_{j-i}^2(k))$ з $n - 1$ і n рядками відповідно, де можливі ненульові значення дають формули

$$v_j^1(k) = \begin{cases} \tilde{b}_j(k), & 1 \leq j \leq n; \\ 1, & j = 0; \end{cases}$$

$$v_j^2(k) = \begin{cases} (n - j) \tilde{b}_j(k), & 1 \leq j \leq n; \\ n, & j = 0. \end{cases}$$

Дискримінант $D(k)$, що є многочленом степеня $n(n - 1)$ за змінною k , $k \neq 0$, подамо у такому вигляді:

$$D(k) = \left(\frac{k}{\tilde{k}}\right)^{n(n-1)} \left(D_0 - \frac{iD_1}{k} - \frac{D_2}{k^2} + \frac{iD_3}{k^3} + \dots + \frac{i^{-n(n-1)}D_{n(n-1)}}{k^{n(n-1)}}\right), \quad (14)$$

де $D_0, D_1, \dots, D_{n(n-1)}$ — комплексні числа, які є многочленами від a_{s_0, s_1} , причому D_0 — дискримінант многочлена $\lambda^n + \sum_{j=1}^n a_{n-j, j} \lambda^{n-j}$ — характеристичного многочлена головної частини рівняння (1).

Нехай $D_0 \neq 0$, тоді для $k \neq 0$ з факторизації

$$D(k) = \frac{D_0}{2} \left(\frac{k}{\tilde{k}}\right)^{n(n-1)} \left(2 + \frac{2}{kD_0} \left(-iD_1 - \frac{D_2}{k} + \frac{iD_3}{k^2} + \dots + \frac{i^{-n(n-1)}D_{n(n-1)}}{k^{n(n-1)-1}}\right)\right)$$

впливає нерівність $|D(k)| \geq \frac{|D_0|}{2} \left(\frac{|k|}{\tilde{k}}\right)^{n(n-1)}$

при $|k| \geq \frac{\tilde{D}_0}{|D_0|}$, де

$$\tilde{D}_0 = 2(|D_1| + |D_2| + \dots + |D_{n(n-1)}|).$$

Для дробу $|k|/\tilde{k}$ справедливою є оцінка

$$\frac{|k|}{\tilde{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (15)$$

Врахувавши нерівність (15), оцінимо модуль $D(k)$ знизу

$$|D(k)| \geq \frac{|D_0|}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n(n-1)} = (\sqrt{2})^{-n(n-1)-2} |D_0|, \quad |k| \geq \frac{\tilde{D}_0}{|D_0|}. \quad (16)$$

Із факторизованого зображення дискримінанта маємо на множині $\{k: |k| \geq \frac{\tilde{D}_0}{|D_0|}\}$ також нерівність $|D(k)| \leq 3|D_0|/2$.

З умови $k \in K$ випливає $|k| < \frac{\tilde{D}_0}{|D_0|}$, тому оцінка (16) вказує на скінченність множини K .

У формулі (12) оцінимо зверху дроб $\frac{e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)T}}$. Для цього використаємо такі дві формули:

$$|e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)t}| = e^{-\tilde{k}\text{Im}\lambda_l(k)t} \leq \max\{e^{-\tilde{k}\text{Im}\lambda_l(k)T}, 1\},$$

$$\tilde{k}|\text{Im}\lambda_j| \rightarrow \infty, \text{ при } |k| \rightarrow \infty.$$

Очевидно, що треба довести лише другу формулу.

З рівності $2\text{Im}\lambda_j(k) = \lambda_j(k) - \bar{\lambda}_j(k)$ і того, що $-\bar{\lambda}_1(k), \dots, -\bar{\lambda}_n(k)$ є коренями многочлена

$$P_{1k}(\lambda) = \prod_{j=1}^n (\lambda - \bar{\lambda}_j(k)) = \lambda^n + \sum_{j=1}^n \tilde{b}_j(k) \lambda^{n-j},$$

отримаємо, що числа $2\text{Im}\lambda_j(k)$ є множниками результанта [2, с. 128]

$$R(k) = \prod_{j=1}^n \prod_{l=1}^n (\lambda_j(k) - \bar{\lambda}_l(k))$$

многочленів P_k та P_{1k} .

Для довільного $j = 1, \dots, n$ оцінимо модуль даного результанта зверху

$$|R(k)| \leq 2^{n^2} (1 + 2A)^{n^2-1} |\text{Im}\lambda_j|.$$

Для оцінки знизу подамо результат, як і дискримінант $D(k)$, у вигляді

$$R(k) = \left(\frac{k}{\tilde{k}}\right)^{n^2} \left(R_0 - \frac{iR_1}{k} - \frac{R_2}{k^2} + \frac{iR_3}{k^3} + \dots + \frac{i^{-n^2}R_{n^2}}{k^{n^2}}\right), \quad k \neq 0, \quad (17)$$

де R_0 дорівнює результанту головних частин (за k і λ) многочленів P_k та P_{1k} . У разі $R_0 \neq 0$ маємо добуток

$$R(k) = \frac{R_0}{2} \left(\frac{k}{\tilde{k}}\right)^{n^2} \left(2 + \frac{2}{kR_0} \left(-iR_1 - \frac{R_2}{k} + \frac{iR_3}{k^2} + \dots + \frac{i^{-n^2}R_{n^2}}{k^{n^2-1}}\right)\right).$$

Якщо $k \in \mathbb{Z}$ і $|k| \geq \frac{\tilde{R}_0}{|R_0|}$, де

$$\tilde{R}_0 = 2(|R_1| + |R_2| + \dots + |R_{n^2}|),$$

то справджується нерівність

$$|R(k)| \geq \frac{|R_0|}{2} \left(\frac{|k|}{\tilde{k}} \right)^{n^2} \geq (\sqrt{2})^{-n^2-2} |R_0|.$$

Оскільки $\tilde{k} \rightarrow \infty$, коли $|k| \rightarrow \infty$, то з цієї оцінки випливає друга формула, тобто

$$\begin{aligned} \tilde{k} |\operatorname{Im} \lambda_j(k)| &\geq \tilde{k} \cdot 2^{-n^2} (1 + 2A)^{1-n^2} |R(k)| \geq \\ &\geq \tilde{k} \cdot (\sqrt{2})^{-3n^2-2} (1 + 2A)^{1-n^2} |R_0| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Для шуканої оцінки дробів враховуємо знак уявної частини кореня $\lambda_j(k)$. Якщо $\operatorname{Im} \lambda_j(k) < 0$, то справджується рівномірна на $[0, T]$ оцінка

$$\left| \frac{e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)T}} \right| \leq \frac{1}{|\mu e^{-i\tilde{k}\lambda_l(k)T} - 1|} \leq 2$$

при $\tilde{k} \geq \frac{M_1}{|R_0|}$ і $|k| \geq \frac{\tilde{R}_0}{|R_0|}$, де

$$M_1 = \frac{\ln(2|\mu|)}{T} (\sqrt{2})^{3n^2+2} (1 + 2A)^{n^2-1}.$$

Якщо ж $\operatorname{Im} \lambda_j(k) > 0$, то аналогічно

$$\left| \frac{e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)T}} \right| \leq \frac{1}{|\mu - e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)T}|} \leq \frac{2}{|\mu|}$$

при $\tilde{k} \geq \frac{M_2}{|R_0|}$ і $|k| \geq \frac{\tilde{R}_0}{|R_0|}$, де

$$M_2 = \frac{\ln(2/|\mu|)}{T} (\sqrt{2})^{3n^2+2} (1 + 2A)^{n^2-1}.$$

Отже, при $\tilde{k} \geq \max \frac{(M_1, M_2)}{|R_0|}$ і $|k| \geq \frac{\tilde{R}_0}{|R_0|}$

для виразу $\frac{e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)T}}$ справджується така нерівність:

$$\left| \frac{e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{i\tilde{k}\lambda_l(k)T}} \right| \leq 2 \max \left(1, \frac{1}{|\mu|} \right). \quad (18)$$

Із формул (12), (13), (16) і (18) для всіх $t \in [0, T]$ та $k \in \mathbb{Z} \setminus K_0$ отримаємо оцінку розв'язку задачі (4), (5) та його похідних до n -го порядку

$$|u_k^{(r)}(t)|^2 \leq \frac{\tilde{C}_0}{|D_0|} \sum_{j=0}^{n-1} |\tilde{k}|^{2(r-j)} |\varphi_{jk}|^2, \quad (19)$$

де $\tilde{C}_0 = \tilde{C}_0(A, n, \mu) > 0$, K_0 — скінченна множина цілих чисел k , для яких справедлива нерівність $|k| \leq \max \left(\frac{\tilde{D}_0}{|D_0|}, \frac{\tilde{R}_0}{|R_0|} \right)$ або нерівність $\tilde{k} \leq \max \frac{(M_1, M_2)}{|R_0|}$.

Теорема 2. Нехай $D_0 R_0 \neq 0$, рівняння (9) для всіх $k \in K_0$ не має розв'язків у цілих числах m . Тоді існує лише один розв'язок задачі (1), (2) для довільних $\varphi_0 \in \mathbf{H}_q(\Omega)$, $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{q-1}(\Omega), \dots, \varphi_{n-1} \in \mathbf{H}_{q-n+1}(\Omega)$. Цей розв'язок неперервно залежить від правих частин $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ умов (2), зокрема

$$\|u\|_{\mathbf{H}_q^*(\mathcal{D})}^2 \leq \frac{C_0}{|D_0|} \sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi_j\|_{\mathbf{H}_{q-j}(\Omega)}^2, \quad (20)$$

де додатна величина C_0 залежить від коефіцієнтів a_{s_0, s_1} рівняння (1) і параметра μ , а також від чисел A та n .

Доведення. З умови $D_0 R_0 \neq 0$ випливає оцінка (19) розв'язку u_k задачі (4), (5) для $k \in \mathbb{Z} \setminus K_0$. Якщо ж $k \in K_0$, то розв'язок u_k існує та належить до простору $\mathbf{C}^n[0, T]$.

Враховуючи формулу (11) та нерівність (19), оцінимо зверху квадрат норми розв'язку задачі (1), (2):

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathbf{H}_q^*(\mathcal{D})}^2 &\leq \sum_{r=0}^n \max_{[0, T]} \sum_{k \in K_0} |u_k^{(r)}(t)|^2 \tilde{k}^{2(q-r)} + \\ &+ \frac{\tilde{C}_0}{|D_0|} \sum_{r=0}^n \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus K_0} \tilde{k}^{2(q-r)} \sum_{j=0}^{n-1} |\tilde{k}|^{2(r-j)} |\varphi_{jk}|^2 \leq \\ &\leq \frac{C_0}{|D_0|} \sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi_j\|_{\mathbf{H}_{q-j}(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Остання нерівність випливає зі скінченності множини K_0 , а \tilde{C}_0 взято з нерівності (19).

Теорему доведено.

Із теореми 2 існування розв'язку отримуємо важливий наслідок про бієктивну властивість оператора задачі (1), (2).

Наслідок. За умов теореми 2 оператор нелокальних умов (2) є бієктивним відображенням $u \mapsto (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ з простору розв'язків u рівняння (1), які належать до $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$, на простір $\mathbf{H}_q(\Omega) \times \mathbf{H}_{q-1}(\Omega) \times \dots \times$

$\mathbf{H}_{q+1-n}(\Omega)$. Враховуючи нерівність (20) він є гомеоморфізмом.

Рівняння $D_0 = 0$ і $R_0 = 0$ у просторі $\mathbf{C}^{(n+1)(n+2)/2}$ коефіцієнтів a_{s_0, s_1} диференціального рівняння (1) визначають алгебричні гіперповерхні, а рівняння (9) — гіперплощину для фіксованих k і m . Тому умови теореми 2 можуть не виконуватися лише на множині коефіцієнтів нульової міри Лебега.

Якщо умови теореми 2 не виконуються, то розв'язок задачі (1), (2) або не існує для всіх $\varphi_0 \in \mathbf{H}_q(\Omega)$, $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{q-1}(\Omega), \dots, \varphi_{n-1} \in \mathbf{H}_{q-n+1}(\Omega)$, або існує, але не єдиний, або не належить до простору $\mathbf{H}_q^{\mathbf{n}}(\mathcal{D})$.

5. Висновки. У роботі досліджено коректність нелокальної крайової задачі для безтипного рівняння з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами у двовимірній області. Встановлено умови однозначної розв'язності цієї задачі у просторі $\mathbf{H}_q^{\mathbf{n}}(\mathcal{D})$ при належності правих частин φ_m , де $m = 0, 1, \dots, n-1$, нелокальних умов (2) до шкали просторів $\{\mathbf{H}_l(\Omega)\}_{l \in \mathbb{R}}$. Проведено аналіз розв'язку задачі та показано, що на відміну від задачі з багатьма просторовими змінними, у разі однієї дійсної змінної проблеми малих знаменників не виникає. Знаменники оцінюються знизу додатними сталими, що вказує на коректність за Адамаром розглядуваної задачі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Борок В.М., Фардигола Л.В. Нелокальные корректные краевые задачи в слое // Матем. заметки. — 1990. — **48**, №1. — С. 20 – 25.
2. Ван-дер-Варден Б.Л. Алгебра. — М.: Мир, 1976. — 648 с.
3. Гой Т.П., Пташник Б.Й. Задача з нелокальними умовами для слабконелінійних гіперболічних рівнянь // Укр. мат. журн. — 1997. — **49**, №2. — С. 186 – 195.
4. Городецький В.В., Мартинюк О.В. Нелокальні за часом задачі для еволюційних рівнянь з псевдобесселевими операторами нескінченного порядку // Доп. НАН України. — 2013. — №4. — С. 7 – 13.
5. Задорожна Н.М., Пташник Б.Й. Нелокальна крайова задача для параболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. — 1995. — **47**, №7. — С. 913 – 919.
6. Ільків В.С., Пташник Б.Й. Задача з нелокальними умовами для рівнянь з частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих зна-

менників // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, №12. — С. 72 – 85.

7. Ільків В.С., Страп Н.І., Волянська І.І. Нелокальна крайова задача для рівняння з оператором диференціювання $z\partial/\partial z$ у комплексній області // Прикладні проблеми механіки і математики. — 2012. — **10**. — С. 15 – 26.

8. Матійчук М.І. Про нелокальну параболічну крайову задачу // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, №3. — С. 362 – 367.

9. Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. — К.: Наукова думка, 2002. — 416 с.

10. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — 655 с.

11. Vange D.V. Periodic solutions of a quasilinear parabolic differential equation // Journ. Differ. Equat. — 1975. — **17**, №1. — Р. 61 – 72.

12. Nakao M. Periodic solution of the dissipative wave equations in a time-dependent domain // J. different. equat. — 1979. — **34**, №3. — Р. 393 – 404.