УДК 517.5

©2014 р. Т. І. Гіщак

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ДЕЯКИХ УМОВ ДЛЯ КЛАСУ ФУНКЦІЙ, АНАЛІТИЧНИХ У ПІВПЛОЩИНІ

Нехай $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$ є простір функцій, аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$, для яких

$$\sup_{z\in\mathbb{C}_+}\left\{|G(z)|e^{-\sigma|\mathrm{Im} z|}\right\} < +\infty.$$

Для даного простору встановлено еквівалентність швидкого спадання по додатній півосі модуля функції $G \in H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$ до швидкого зростання її модуля на межі.

Let $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$ be the space of functions analytic in the half-plane $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$, for which

$$\sup_{z\in\mathbb{C}_+}\left\{|G(z)|e^{-\sigma|\mathrm{Im} z|}\right\} < +\infty.$$

For this space we prove the equivalence of rapid decrease in the positive half-axis of the module of a function $G \in H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$ and the rapid growth of its module at the boundary.

Простір обмежених аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$ функцій G позначають через $H^\infty(\mathbb{C}_+)$, при цьому він є банаховим відносно норми

$$\|G\| = \sup_{z\in\mathbb{C}_+}|G(z)| < +\infty.$$

Властивості цих просторів детально розглянуті в монографії Дж. Гарнетта [1].

Простором Гарді $H^p(\mathbb{C}_+)$, $0 < p < +\infty$, називається клас аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+$ функцій G, для яких

$$\sup_{x>0}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} |\, G(x+iy)\, |^p\, dy\right\} < +\infty.$$

Позначення $H^\infty(\mathbb{C}_+)$ зумовлено близькістю їх властивостей [2] з властивостями просторів Гарді.

Б. Винницький і В. Шаран в [3] розглянули простір $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, що складається з аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій, для яких

$$\sup_{z\in\mathbb{C}_+}\left\{|G(z)|e^{-\sigma|\mathrm{Im} z|}\right\} < +\infty.$$

Вони, зокрема, показали, що функції з цих просторів мають майже скрізь на $i\mathbb{R}$ кутові граничні значення $G(it)$ і $G(it)e^{-\sigma|t|} \in L^\infty(\mathbb{R})$. Якщо для функції G існує $c_1 \in \mathbb{R}$, що виконується умова

$$|G(z)| \le c_1 e^{\sigma|z|},\ z \in \mathbb{C}_+, \tag{1}$$

то легко бачити, що $G(z)e^{-\sigma z} \in H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Тому теж для кожної функції G, що задовольняє умову (1) існують майже скрізь на $i\mathbb{R}$ кутові граничні значення і

$$G(it)e^{-\sigma|t|} \in L^\infty(\mathbb{R}). \tag{2}$$

Функції з даного простору мають [4], [5] сингулярну граничну функцію G , яка з точністю до адитивної сталої і значень в точках неперервності визначається рівністю $h(t_2) - h(t_1) = \lim\limits_{x\to 0+}\int\limits_{t_1}^{t_2}\ln|G(x+it)|dt - \int\limits_{t_1}^{t_2}\ln|G(it)|dt$. Функція h є незростаючою на $\mathbb{R}$ і $h'(t) = 0$ майже скрізь на $\mathbb{R}$.

Б. Винницький в [6] розглянув також клас $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+), 1 \le p < +\infty,\ 0 \le \sigma < +\infty$, функцій G аналітичних в $\mathbb{C}_+$, для яких

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{+\infty}|G(re^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|}dr\right\} < +\infty.$$

В. Дільний в [7] встановив для випадку $p \in [1; +\infty)$ еквівалентність швидкого спадання по додатній осі модуля функції

$G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ до швидкого зростання її модуля на межі. Такого типу результати використовуються для дослідження циклічності функцій [8].

Метою даної статті є встановлення аналогічного твердження для функцій з $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

Теорема *Нехай $G \in H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$ і $G(z) \neq 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}_+$, а також $h(t) = const$. Тоді наступні умови еквівалентні:*

$$\text{а) } \varliminf_{r\to+\infty} \left(\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\tfrac{1}{t^2} - \tfrac{1}{r^2}\right) \ln|G(it)|dt - 2\sigma \ln r\right) > -\infty;$$

$$\text{б) } \varlimsup_{r\to+\infty} \left(\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\tfrac{1}{t^2} - \tfrac{1}{r^2}\right) \ln|G(it)|dt - 2\sigma \ln r\right) > -\infty;$$

$$\text{в) } \varliminf_{x\to+\infty} \left(\tfrac{\ln|G(x)|}{x} + \tfrac{2\sigma}{\pi}\ln x\right) < +\infty;$$

$$\text{г) } \varlimsup_{x\to+\infty} \left(\tfrac{\ln|G(x)|}{x} + \tfrac{2\sigma}{\pi}\ln x\right) < +\infty;$$

$$\text{д) } (\exists c \in \mathbb{R}) : G(z)\exp\left\{\tfrac{2\sigma}{\pi} z\ln z - cz\right\} \in H^\infty(\mathbb{C}_+).$$

Нам буде потрібне наступне твердження, що випливає з результатів Н. Говорова [9] та формули Карлемана [6], яка в потрібній формі наведена в [3], [10].

Лема 1. *Нехай $G \in H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $h(t) \equiv const$, $G(z) \neq 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}_+$. Тоді справедливе зображення $G(z) = \exp\left(ia_0 + a_1 z + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(t,z)\ln|G(it)|dt\right)$, $a_0 \in \mathbb{R}, a_1 \in \mathbb{R}$, де*

$$Q(t,z) = \frac{(tz+i)^2}{i(1+t^2)^2(t+iz)}$$

і виконуються умови

$$\varliminf_{r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\ln|G(it)|dt > -\infty, \tag{3}$$

$\ln|G(it)| \in L^1[-1;1]$.

Лема 2. *Якщо $G \in H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$ і виконується умова б), то виконується умова а).*

Доведення. Легко бачити, що

$$\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\ln e^{-\sigma|t|}dt = -2\sigma\ln r + \frac{\sigma}{r^2}(r^2-1),$$

тому умова б) набуде вигляду

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\ln|G(it)e^{-\sigma|t|}|dt > -\infty.$$

Оскільки

$$\ln|G(it)e^{-\sigma|t|}| = \ln^+|G(it)e^{-\sigma|t|}| - \ln^+\frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|}, \tag{4}$$

то

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\ln|G(it)e^{-\sigma|t|}|dt = \varlimsup_{r\to+\infty}(\varphi_1(r) - \varphi_2(r)),$$

де

$$\varphi_1(r) = \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\ln^+\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|dt$$

і

$$\varphi_2(r) = \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\ln^+\frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|}dt.$$

Тоді умова б) запишеться у вигляді

$$\varlimsup_{r\to+\infty}(\varphi_1(r) - \varphi_2(r)) > -\infty. \tag{5}$$

Врахувавши, що $G(it)e^{-\sigma|t|} \in L^\infty(\mathbb{R})$, отримаємо

$$\varphi_1(r) \le c_2 \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)dt < c_3 < +\infty.$$

Припустимо, що $\varliminf\limits_{r\to+\infty}\varphi_2(r) = -\infty$, тоді існує така послідовність (r_k), що $\lim\limits_{r\to+\infty}\varphi_2(r_k) = +\infty$. Проте функція φ_2 є неспадною, тому для кожної зростаючої послідовності (n_k), такої, що $n_k \to +\infty$,при

$k \to \infty$, маємо $\lim\limits_{r\to+\infty} \varphi_2(n_k) = +\infty$. Але $\lim\limits_{r\to+\infty} \varphi_1(n_k) < +\infty$, тоді $\lim\limits_{r\to+\infty} (\varphi_1(r) - \varphi_2(r)) = -\infty$, що суперечить умові (5). Отже, виконується умова а). $\square$

Лема 3. *Якщо* $G \in H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$, $h(t) \equiv const$, $G(z) \neq 0$ *для всіх* $z \in \mathbb{C}_+$, *а також виконується умова в), то виконується умова б).*

Доведення. Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що $G \in H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$, $G(z) \not\equiv 0$ і не виконується умова б), тобто

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \left(\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln|G(it)|dt \right.$$
$$\left. -2\sigma \ln r\right) = -\infty. \tag{6}$$

Оскільки

$$\mathrm{Re}Q(t;x) = \frac{2t^2x + x - t^2x^3}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)},$$

то

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |t|\mathrm{Re}Q(t;x)dt = \frac{x}{\pi} - \frac{2x}{\pi}\ln x, \quad x > 0.$$

Тоді

$$\ln e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x} = \left(\frac{\sigma}{\pi}x - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re}Q(t,x)\sigma|t|dt\right).$$

Тому за лемою 1

$$\frac{\ln|G(x)e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}|}{x} = c_4 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{-t^2x^2 + 1 + 2t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)}$$
$$\times \ln|G(it)e^{-\sigma|t|}|dt.$$

З умови (4) отримаємо

$$\frac{\ln|G(x)e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}|}{x} = c_4 - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2x^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)}$$
$$\times \ln^+|G(it)e^{-\sigma|t|}|dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)} \ln^+|G(it)e^{-\sigma|t|}|dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2x^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)} \ln^+\frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|}dt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)} \ln^+\frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|}dt =$$

$$= c_4 - K_1(x) + K_2(x) + K_3(x) - K_4(x).$$

Оцінимо $K_1(x)$. З умови (1) випливає, що $|G(it)| \le c_1 e^{\sigma|t|}$, тому $|G(it)|e^{-\sigma|t|} \le c_1$. Отже,

$$K_1(x) \le \frac{c_5x^2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)}dt =$$

$$= \frac{c_5x^2}{2(1+x)^2} \le c_6,\ x > 0.$$

Оцінимо K_4:

$$K_4(x) \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2+2t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)}$$
$$\times \ln^+\frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|}dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(t^2+x^2)}\ \ln^+\frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|}dt.$$

Розглянемо випадок $x > 1$, тоді

$$K_4(x) \le \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+\frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|}dt.$$

Використавши нерівність $\ln^+\frac{1}{ab} \le \ln^+\frac{1}{a} + \ln^+\frac{1}{b}$, отримаємо

$$K_4(x) \le \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2}$$
$$\times \left(\ln^+\frac{1}{|G(it)|} + \ln^+\frac{1}{e^{-\sigma|t|}}\right)dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \sigma|t| dt =$$

$$= c_7 + \frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int\limits_{|t|\geq 1} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt \leq$$

$$\leq c_7 + \frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int\limits_{|t|\geq 1} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt.$$

За лемою 1 $\ln|G(it)| \in L^1[-1;1]$, тому

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt \leq \frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1} |\ln|G(it)|| dt \leq c_8.$$

Звідси

$$K_4(x) \leq c_9 + \frac{2}{\pi}\int\limits_{|t|\geq 1} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt.$$

Тоді

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt$$

$$\leq \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{t^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt$$

$$= \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2} d\int\limits_{1}^{t} \frac{1}{s^2} \ln^+ \frac{1}{|G(is)|} ds.$$

Проінтегрувавши за частинами, отримаємо

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{t^2}\int\limits_{1}^{t} \frac{1}{s^2} \ln^+ \frac{1}{|G(is)|} ds \Bigg|_{1}^{+\infty}$$

$$+2\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^3}\int_{1}^{t} \frac{1}{s^2} \ln^+ \frac{1}{|G(is)|} ds dt. \qquad (7)$$

Застосувавши нерівність $\frac{1}{t^2} \leq \frac{4}{3}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{4r^2}\right)$, якщо $|t| \leq |r|$ одержимо

$$\int\limits_{1}^{t} \frac{1}{s^2} \ln^+ \frac{1}{|G(is)|} ds$$

$$\leq \frac{4}{3}\int_{1}^{2t} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{2t^2}\right) \ln^+ \frac{1}{|G(is)|} ds.$$

За лемою 1 виконується умова (3), тобто

$$\int\limits_{1<|t|\leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln|G(it)| dt > -c_{10},$$

для деякої сталої $c_{10} \in \mathbb{R}$. Тоді $\int\limits_{1<|t|\leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\left(\ln^+|G(it)| - \ln^+\frac{1}{|G(it)|}\right) dt > -c_{10}$. Звідси отримаємо

$$\int\limits_{1<|t|\leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt <$$

$$< c_{10} + \int\limits_{1<|t|\leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln^+ |G(it)| dt \leq$$

$$\leq c_{10} + \int\limits_{1<|t|\leq r} \frac{1}{t^2} \ln^+ |G(it)| \leq c_{11} + c_{12}\ln r.$$

Отже,

$$\int\limits_{1}^{t} \frac{1}{s^2} \ln^+ \frac{1}{|G(is)|} ds \leq c_{11} + c_{12}\ln t.$$

Підставивши останню оцінку в нерівність (7), отримаємо

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt \leq c_{13}.$$

Аналогічно

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt \le c_{13},$$

тому $K_4(x) \le c_{14}$, якщо $x \ge 1$.

Легко бачити, що

$$K_3(x) \ge \frac{1}{\pi} \int\limits_{1<|t|\le x} \frac{t^2x^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)}$$

$$\times \ln^+ \frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|} dt \ge$$

$$\ge \frac{1}{8\pi} \int\limits_{1<|t|\le x} \frac{1}{t^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|} dt \ge$$

$$\ge -\frac{1}{8\pi} \int\limits_{1<|t|\le x} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2}\right) \ln|G(it)e^{-\sigma|t|}| dt.$$

Тому за умовою (6) маємо, що $\varliminf\limits_{x\to+\infty} K_3(x) = +\infty$. Оскільки $K_2(x) > 0$, то

$$\varliminf_{x\to+\infty} \frac{\ln|G(x)e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}|}{x} = +\infty.$$

А це суперечить умові в) $\square$

Лема 4. *Якщо $G \in H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $h(t) \equiv const$ і виконується умова д), то виконується й умова г).*

Доведення. Оскільки виконується умова д), то з означення простору $H^\infty(\mathbb{C}_+)$ маємо :

$$\left| G(z) \exp\left\{ \frac{2\sigma}{\pi} z \ln z - cz \right\} \right| \le c_{15}.$$

Звідси

$$\ln|G(x)| + \frac{2\sigma}{\pi} x \ln x \le c_{15} x.$$

Оскільки,

$$\frac{\ln|G(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi} \ln x \le c_{15},$$

то виконується умова г) $\square$

Лема 5. *Якщо $G \in H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $h(t) \equiv const$, $G(z) \ne 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}_+$, і виконується умова а), то виконується умова д).*

Доведення. З умови леми маємо, що виконується умова а), тому

$$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall r > 1):$$

$$\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln|G(it)e^{-\sigma|t|}| dt > c.$$

Оскільки $G \in H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, то виконується умова (2). Тому

$$\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln|G(it)e^{-\sigma|t|}| dt \le$$

$$\le \ln c_{16} \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) dt \le c_{17}.$$

Врахувавши, що за лемою 1 $\ln|G(it)| \in L^1[-1;1]$ і $G \in H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, отримаємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln|G(it)e^{-\sigma|t|}|}{1+t^2} dt =$$

$$= c_{18} + \varlimsup_{r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\le r} \frac{\ln|G(it)e^{-\sigma|t|}|}{1+t^2} dt \le$$

$$\le c_{18} + \frac{4}{3} \varlimsup_{r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{2r^2}\right)$$

$$\times \ln|G(it)e^{-\sigma|t|}| dt < +\infty.$$

Тоді з [1, с. 81-82],[11, с.25] і [12, с. 189-190], оскільки $G(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}$ не має нулів в $\mathbb{C}_+$ і її сингулярна гранична функція є тотожною сталою, отримаємо, що виконується д). $\square$

Доведення теореми випливає з лем 2-5 і тривіальної імплікації умов в) і г). Теорема залишається справедливою і для функцій, що задовольняють умову (1).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984 р. – 470 с.

2. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p.– М.: Наука,1984.– 368 с.

3. *Vynnytsyi B., Sharan V.* On the factorization of one class of functions analytic in the half-plane // Matematychni Studii – 2000. –**14**, N1. –C. 41–48.
4. *Винницький Б. В., Дільний В. М.* Про необхідні умови існування розв'язків одного рівняння типу згортки // Матем. студії – 2001. – **16**, N1. – C. 61–70.

5. *Fedorov M. A., Grishin A. F.* Some questions of the Nevanlinna theory for the Complex Half-Plane // Math. Physics, Anal. and Geom. –1998. –**1**, N3. – C. 223–271.

6. *Винницький Б. В.* О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент //Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, N5. – C. 484 – 500.

7. *Дільний В. М.* Про еквівалентність деяких умов для вагових просторів Гарді // Укр. мат. журн. –2006. –**58**, N9. –C. 1257–1263.

8. *Dilnyi V.* On Cyclic Functions In Weighted Hardy Spaces // Journ. of Math. Phys., Anal. Geom. – 2011. – **7**, N 1. – C. 19-33.

9. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. –М.:Наука, 1986. –240с.

10. *Винницький Б. В., Дільний В. М.* Про необхідні умови існування розв'язків одного рівняння типу згортки // Матем. студії – 2001. – **16**, № 1. –C. 61–70.

11. *Duren O.* Theory of H^p space. – N. Y., 1970.– 251pp.

12. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. –М.: ИЛ., 1963. –306 с.