УДК 517.9+517.95

©2014 р. М.М. Дрінь, Я.М. Дрінь

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Встановлена теорема про розв'язність нелокальної багатоточкової задачі для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами і з псевдодиференціальними нелокальними умовами.

We prove a theorem on the solvability of a nonlocal multipoint problem for parabolic pseudo-differential equations with nonsmooth symbols and pseudodifferential nonlocal conditions.

Дослідження інтегродиференціальних операторів Кельдерона і Зигмунда (що є лінійною комбінацією частинних похідних з коефіцієнтами – сингулярними інтегральними операторами) призвело до зміни теорії, в якій перетворення Фур'є витіснило сингулярні інтеграли, а самі оператори почали називатися псевдодиференціальними операторами (ПДО). Рівняння, що поряд з диференціюваннями по одній групі змінних містять ПДО по іншій групі змінних часто називають просто псевдодиференціальними рівняннями (ПДР), причому ПДО характеризуються своїм символом аналогічно тому, як диференціальні оператори характеризуються своєю характеристичною формою.

На сьогодні особливої уваги заслуговує теорія ПДР з негладкими символами, зародження якої пов'язують з дослідженням простіших рівнянь, що містять дробовий степінь оператора Лапласа $(-\Delta)^{\alpha/2}$ [1], ідея реалізації якого на функцію $f \in S$ особливо прозора в образах Фур'є: $(-\Delta)^{\alpha/2} f = F^{-1}[|\xi|^\alpha F[f]]$. Ця формула є мало придатною для $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, але завдяки формулі про дію перетворення Фур'є на згортку $F[f*\varphi] = F[f]\cdot F[\varphi]$ та появі теорії розподілів Шварца її можна формалізувати до більш зручної форми $(-\Delta)^{\alpha/2} f = F^{-1}[|\xi|^\alpha] * f$. Якщо операцію F^{-1} розуміти у сенсі узагальнених функцій, то $F^{-1}[|\xi|^2]$ описане в [2, 3]. При $\mathrm{Re}\alpha > 0$ ця функція є локально інтегровною. Згортку з цією функцією називають потенціалом Рісса, а саму функцію – ріссовим ядром. Оскільки при $\mathrm{Re}\alpha > 0$ потенціал Рісса має порядок особливості, більший ніж розмірність простору $\mathbb{R}^n$, то його називають гіперсингулярним інтегралом і він завжди потребує регуляризації шляхом віднімання ряду Тейлора функції f, або взяття її скінченної різниці.

Випадок однорідних символів має важливі застосування в теорії випадкових процесів. Наприклад, ПДО Рісса з символом $|\xi|^\gamma$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $0 < \gamma < 1$, є твірним оператором симетричного стійкого процесу [4, 5].

Теорія ПДО з негладкими символами має своє застосування і в сучасній теорії фракталів. У [6] та цитованих там працях Р.Р. Нігматуліна, М.М. Джрбашяна та А.Б. Нерсесяна йдеться про дослідження дифузійних процесів у фрактальних середовищах завдяки еволюційним рівнянням дробового порядку з негладкими символами.

Дослідження лінійних ППДР зі сталими однорідними негладкими в нулі символами було розпочате С.Д. Ейдельманом і Я.М. Дрінем в [7] і продовжене в [8–10]. Точну асимптотичну поведінку фундаментального розв'язку (ФР) в околі нескінченно віддалених точок було встановлено М.В. Федорюком [11] і з'ясовано, що вона не є експоненціальною, як у випадку параболічних диференціальних рівнянь з частинними похідними, а степеневою. Методика дослідження властивостей ФР, яка використовувалася в зазначених працях, своєю специфікою на-

кладає обмеження на порядок однорідності γ головного символу рівняння: $\gamma > 1$ при $n > 1$, $\gamma = 1$ при $n = 1$.

А.Н. Кочубей [4, 5] вперше одержав точні оцінки параметрикса задачі Коші для лінійних ППДР з символами певної гладкості поза початком координат, залежними від часу та просторової змінної у випадку, коли $n > 1$ та $\gamma \geq 1$. В.А. Літовченко у праці [12], розвиваючи ідею А.Н. Кочубея [4, 5] встановлює аналогічні оцінки для $\gamma > 0$ за умови нескінченної диференційовності символів поза початком координат, залежних від часової змінної. В [4, 5] доведено теорему про розв'язність задачі Коші в класах функцій з певним степеневим зростанням при $|x| \to \infty$, а також встановлено аналог принципу максимуму, завдяки якому доведено теорему про єдиність розв'язку задачі Коші в класах невід'ємних спадких функцій.

В.В. Городецьким в [13] будується спеціальний простір Φ основних функцій, що породжується властивостями ФР відповідного рівняння, який належить Φ при кожному $t > 0$. Для задачі Коші з початковими даними із простору Φ' встановлюється її коректна розв'язність у просторі Φ', доводиться принцип локалізації та властивість слабкої стабілізації розв'язку задачі Коші. Зазначена схема дослідження задачі Коші та одержані результати поширюються в [14] на випадок рівняння поліноміального вигляду.

Дослідженню нелокальних задач для рівнянь із частинними похідними приділяється велика увага, адже багато задач теорії фізики плазми, вологопереносу, коливання різних систем, поширення електромагнітних хвиль та ін. моделюються такими задачами. Переважно випадки коректно поставлених задач вивчали в різних аспектах О.О. Дезін, В.К. Романко, А.В. Біцадзе, О.А. Самарський, О.Л. Скубачевський, М.І. Матійчук. Задачі з нелокальними умовами взагалі є умовно коректними, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників. Саме такі задачі вивчалися у школі Б.Й. Пташника і результати підсумовані у монографії [15].

Нелокальні багатоточкові задачі для еволюційних ПДР вивчалися В.В. Городецьким, Я.М. Дрінем, М.М. Дрінь у працях [16–23].

Зауважимо, що нелокальні задачі для рівняння дифузії з оператором дробового диференціювання вивчені у праці [24], а перші результати про розв'язки нелокальних крайових задач для ППДР анонсовані у [25].

Даною працею ми продовжуємо вивчати задачу із [23], де ПДО вперше запроваджуємо у нелокальні умові.

1. Постановка задачі та формула для розв'язку

Нехай $T > 0$, $\mu > 1$, $\gamma_1 < \dots < \gamma_m < \gamma_0$, $\beta_1 < \dots < \beta_m$, $0 < \nu_1 < \dots < \nu_m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i < \mu$, $0 < t_1 < \dots < t_m = T$ – числові параметри, $\Pi \equiv \{(t, x) \,|\, 0 < t < T, x \in \mathbb{R}^n\}$.

Припустимо, що однорідна порядку $\gamma_k > 0$ функція a_{γ_k}: $\mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ задовольняє умови:

1) нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;

2) $\forall \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ і $\forall k \in \mathbb{Z}_+^n$ $\exists c_k > 0$: $|D_\sigma^\chi a_{\gamma_k}(\sigma)| \leq c_k |\sigma|^{\gamma_k - |\chi|}$;

3) $\forall \sigma \in \mathbb{R}^n$ $\exists a_0 > 0$: $a_{\gamma_0}(\sigma) \geq a_0 |\sigma|^{\gamma_0}$.

Через A позначимо ПДО з символом $a(\sigma) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_{\gamma_k}(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, де a_{γ_k} задовольняють умови 1) – 3), а через B_k – ПДО з символами $b_k(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, однорідними порядків β_k, $1 \leq k \leq m$, які задовольняють умови 1), 2).

Нехай $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\exists C > 0$, $\exists \beta$, $0 < \beta \leq \gamma_0 - \varepsilon$ і $\exists \varphi$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$: $|\varphi(x)| \leq C(1 + |x|)^\beta$; та $\forall \varepsilon > 0$, $\forall (t, x) \in \Pi$ $\exists C > 0$, $\exists \beta \leq \gamma_0 - \varepsilon$, $\exists f$: $\Pi \to \mathbb{R}$, $f \in C(\Pi)$:

$$|f(t, x)| \leq C(1 + |x|)^\beta, |f(t, x) - f(t, y)| \leq$$
$$\leq C|x - y|^\lambda, 0 < \lambda < 1.$$

Позначимо через u: $\Pi \to \mathbb{R}$ функцію із $C_t^1 \times S(\mathbb{R}^n)$, а через $F_{x \to \sigma}[u(t, x)](t, \sigma) \equiv \tilde{u}(t, \sigma)$, $F_{\sigma \to x}^{-1}[\tilde{u}(t, \sigma)](t, x)$ відповідно пряме і обернене перетворення Фур'є функції u. Тоді

$$Au(t, x) \equiv F_{\sigma \to x}^{-1}[a(\sigma)\tilde{u}(t, \sigma)], (t, x) \in \Pi,$$

є ПДО з символом a: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Для гладких і обмежених функцій ПДО A визначена

в $[4,5]$ і трактується як гіперсингулярна інтегральна операція (ГСІО).

Розглянемо крайову задачу

$$u_t(t,x)+Au(t,x)=f(t,x),(t,x)\in\Pi, \quad (1)$$

$$\mu u(t,x)|_{t=0}=\sum_{k=1}^{m}\nu_k B_k u(t,x)|_{t=t_k}+$$
$$+\varphi(x),x\in\mathbb{R}^n, \quad (2)$$

де A – ПДО з символом $a(\sigma)$, а B_k – ПДО з символами $b_k(\sigma)$, $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, однорідними порядку β_k, $1\le k\le m$.

Розв'язок задачі (1), (2) формально шукаємо за допомогою перетворення Фур'є по просторових змінних, додатково припускаючи, що функції u, f, φ допускають це перетворення і при цьому $F_{x\to\sigma}[f(t,x)](t,\sigma)\equiv\tilde f(t,\sigma)$, $F_{x\to\sigma}[\varphi(x)](\sigma)\equiv\tilde\varphi(\sigma)$,

$$u(t,x)\equiv F_{\sigma\to x}[v(t,\sigma)](t,x),(t,x)\in\Pi. \quad (3)$$

Тоді для функції v: $\Pi\to\mathbb{R}^1$ отримаємо таку задачу

$$v'_t(t,\sigma)+a(\sigma)v(t,\sigma)=\tilde f(t,\sigma),(t,\sigma)\in\Pi, \quad (4)$$

$$\mu v(t,\sigma)|_{t=0}=\sum_{k=1}^{m}\nu_k b_k(\sigma)v(t,\sigma)|_{t=t_k}+$$
$$+\tilde\varphi(\sigma),\sigma\in\mathbb{R}^n. \quad (5)$$

Загальний розв'язок рівняння (4) набуває вигляду

$$v(t,\sigma)=ce^{-a(\sigma)t}+\int_0^t e^{-a(\sigma)(t-\tau)}\tilde f(\tau,\sigma)d\tau,$$
$$(t,\sigma)\in\Pi,$$

і безпосередньою підстановкою перевіряється, що ця функція задовольняє рівняння (4). Задовольнивши умову (5) отримаємо, що розв'язок задачі (4), (5) набуває вигляду

$$v(t,\sigma)=M(\sigma)\Big\{\sum_{k=1}^{m}\nu_k b_k(\sigma)\times$$
$$\times\int_t^{t_k}\exp\{-a(\sigma)(t+t_k-\tau)\}\tilde f(\tau,\sigma)d\tau+$$
$$+\mu\int_0^t\exp\{-a(\sigma)(t-\tau)\}\tilde f(\tau,\sigma)+$$
$$+\exp\{-a(\sigma)t\}\tilde\varphi(\sigma)\Big\},(t,\sigma)\in\Pi,$$

$$M(\sigma)=\Big(\mu-\sum_{k=1}^{m}\nu_k b_k(\sigma)\exp\{-a(\sigma)t_k\}\Big)^{-1}, \quad (6)$$

$\sigma\in\mathbb{R}^n$.

Запишемо розв'язок задачі (1), (2) у вигляді

$$u(t,x)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\{i(x,\sigma)\}v(t,\sigma)d\sigma\equiv$$
$$\equiv I_1+\mu I_2+I_3,(t,x)\in\Pi, \quad (7)$$

де

$$I_1=\sum_{k=1}^{m}\int_t^{t_k}d\tau\int_{\mathbb{R}^n}G^1_k(t+t_k-\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi, \quad (8)$$

$(t,x)\in\Pi$,

$$I_2=\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n}G^2(t-\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi, \quad (9)$$

$(t,x)\in\Pi$,

$$I_3=\int_{\mathbb{R}^n}G^3(t,x-\xi)\varphi(\xi)d\xi,t>0,x\in\mathbb{R}^n, \quad (10)$$

$$G^1_k(t+t_k-\tau,x-\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}M(\sigma)(2\pi)^{-n}\nu_k b_k(\sigma)\times$$
$$\times\exp\{i(x-\xi,\sigma)-a(\sigma)(t+t_k-\tau)\}d\sigma, \quad (11)$$
$$t+t_k-\tau>0,(t,x)\in\Pi,t>\tau,\xi\in\mathbb{R}^n,$$

$$G^2(t-\tau,x-\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}M(\sigma)(2\pi)^{-n}\times$$
$$\times\exp\{i(x-\xi,\sigma)-a(\sigma)(t-\tau)\}d\sigma, \quad (12)$$
$$(t,x)\in\Pi,t>\tau,\xi\in\mathbb{R}^n,$$

$$G^3(t,x-\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}M(\sigma)\exp\{i(x-\xi,\sigma)-$$
$$-a(\sigma)(t)\}d\sigma,(t,x)\in\Pi,\xi\in\mathbb{R}^n, \quad (13)$$

а функція $M(\sigma)$ визначена виразом (6).

Якщо рівняння (1) однорідне, то розв'язок задачі (1), (2) $u(t,x) = I_3$, $(t,x) \in \Pi$, є згорткою (10) функції G^3, визначеною формулою (13), і початкової функції φ.

2. Оцінка функцій G_k^1, $1 \le k \le m$, G^2, G^3 та їх похідних

Розглянемо функцію G^3, $(t,x) \in \Pi$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, визначену формулою (13). Використовуючи поліноміальну формулу для функції $M(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, із (6), формально отримаємо вираз

$$M(\sigma) = \frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{\mu^r}\Big(\sum_{k=1}^{m}\nu_k b_k(\sigma)\exp\{-a(\sigma)t_k\}\Big)^r =$$

$$= \frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{\mu^r}\sum_{r_1+\dots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\cdot\dots\cdot r_m!}\nu_1^{r_1}\cdot\dots\cdot\nu_m^{r_m}\times$$

$$\times(b_1(\sigma))^{r_1}\cdot\dots\cdot(b_m(\sigma))^{r_m}\exp\{-a(\sigma)(\vec{t},\vec{r})\},$$

де $(\vec{t},\vec{r}) = t_1r_1+\dots+t_mr_m$, $\sum\limits_{i=1}^{m}\nu_i < \mu$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$; а кожен доданок має порядок однорідності $\beta_1r_1 + \dots + \beta_mr_m \equiv (\vec{\beta},\vec{r})$. Тоді із формули (13) отримаємо, що $G^3 \equiv G^3(\hat{t}, x-\xi)$ і

$$G^3(\hat{t},x-\xi) = \sum_{r=0}^{\infty}(2\pi)^{-n}\frac{1}{\mu^{r+1}}\times$$

$$\times\sum_{r_1+\dots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\dots r_m!}\nu_1^{r_1}\dots\nu_m^{r_m}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}(b_1(\sigma))^{r_1}\dots(b_m(\sigma))^{r_m}\times$$

$$\times\exp\{i(x-\xi,\sigma)-a(\sigma)\hat{t}\}d\sigma, \qquad (14)$$

$$\hat{t} = t + (\vec{t},\vec{r}), \hat{t} > 0, x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Використовуючи [4, лема 2, стор. 917], [5, 12] отримаємо, що G^3 із (14) задовольняє такі оцінки:

$$|G^3(\hat{t},x-\xi)| \le$$

$$\le C\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{\mu^{r+1}}\sum_{r_1+\dots+r_m=r}\frac{r!\nu_1^{r_1}\dots\nu_m^{r_m}}{r_1!\dots r_m!}\times$$

$$\times\hat{t}(\hat{t}^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{-n-\gamma-(\vec{\beta},\vec{r})}, \hat{t} > 0, \qquad (15)$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{m}\nu_i < \mu,$$

$$|D_x^{\chi}G^3(\hat{t},x-\xi)| \le$$

$$\le C\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{\mu^{r+1}}\sum_{r_1+\dots+r_m=r}\frac{r!\nu_1^{r_1}\dots\nu_m^{r_m}}{r_1!\dots r_m!}\times$$

$$\times\hat{t}(\hat{t}^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{-n-\gamma-(\vec{\beta},\vec{r})}, \hat{t} > 0, \qquad (16)$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$|D_tG^3(\hat{t},x-\xi)| \le$$

$$\le C\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{\mu^{r+1}}\sum_{r_1+\dots+r_m=r}\frac{r!\nu_1^{r_1}\dots\nu_m^{r_m}}{r_1!\dots r_m!}\times$$

$$\times(\hat{t}^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{-n-\gamma-(\vec{\beta},\vec{r})}, \hat{t} > 0, \qquad (17)$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Отже, вірною є така теорема.

Теорема 1. *Припустимо, що для символів $a(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, ПДО A і B_k відповідно і $b_k(\sigma)$, $1 \le k \le m$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, і параметрів виконуються умови п. 1.*

Тоді існують функції G_k^1, $1 \le k \le m$, G^2 і G^3, визначені рівностями (11) – (13) відповідно. Для функції G^3 та її похідних вірними є оцінки (15) – (17). Аналогічні оцінки вірні для функції G^2 із (12) та її похідних, де в (15) – (17) замість $\hat{t}$ треба покласти $\hat{t}-\tau$, $\hat{t}-\tau > 0$. Якщо у нерівностях (15) – (17) замість $\hat{t}$ покласти $\hat{t}+t_k-\tau$, а замість $(\vec{\beta},\vec{r})$ покласти $(\vec{\beta},\vec{r})+\beta_k$ і врахувати множник ν_k із (11), то отримаємо оцінки для функції $G_k^1(t+t_k-\tau, x-\xi)$, $1 \le k \le m$, $t+t_k-\tau > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

3. Основна теорема

Функцію G^3 із (14) можна оцінити збіжним числовим рядом

$$\frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\Big(\frac{\sum_{i=1}^{m}\nu_i}{\mu}\Big)^r = \Big(\mu - \sum_{i=1}^{m}\nu_i\Big)^{-1},$$

тому ряд в (14) є рівномірно збіжним рядом. Його можна диференціювати по t і по x_i, $1 \le i \le n$, потрібну кількість разів і результати диференціювання також є рівномірно збіжними рядами.

Якщо $b_1(\sigma) \equiv \dots = b_m(\sigma) \equiv 1$, а $a(\sigma) = |\sigma|$, $n = 1$, $\mu > \nu$, то, враховуючи [26],

$$G^3(\hat{t}, x-\xi) = \frac{1}{\mu} \sum_{r=0}^{\infty} \Big(\frac{\nu}{\mu}\Big)^r \frac{\hat{t}}{\pi(\hat{t}^2 + (x-\xi)^2)},$$

$$t > 0, x \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}.$$

Тоді

$$\int_{\mathbb{R}} G^3(\hat{t}, x-\xi)dx = \frac{1}{\mu} \sum_{r=0}^{\infty} \Big(\frac{\nu}{\mu}\Big)^r = \frac{1}{\mu - \nu}.$$

Виходячи із (14) – (17) можна записати, що

$$\frac{\partial}{\partial t} G^3(t, x-\xi) = -F^{-1}_{\sigma\to(x-\xi)}[a_\gamma(\sigma)M(\sigma)\times$$
$$\times \exp\{-a_\gamma(\sigma)t\}], t>0, x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n,$$
$$A_\gamma G^3(t, x-\xi) = F^{-1}_{\sigma\to(x-\xi)}[a_\gamma(\sigma)M(\sigma)\times$$
$$\times \exp\{-a_\gamma(\sigma)t\}], t>0, x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Тому

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + A_\gamma\Big) G^3(t, x-\xi) = 0, \qquad (18)$$

$t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Аналогічними властивостями володіють функції G_k^1 $(1 \le k \le m)$ і G^2. Використовуючи (18), [4,5] і [23] доводиться, що функція $u(t,x)$, $t>0$, $x \in \mathbb{R}^n$, визначена рівністю (7), задовольняє рівняння (1) і нелокальні умови (2). Отже, вірною є така

Теорема 2. *Нехай $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi$, функція, визначена в* (7), *є сумою трьох доданків, кожен з яких визначений рівностями* (8) – (10) *відповідно. Тоді вірними є співвідношення*

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + A_\gamma\Big) I_3 = 0, (t,x) \in \Pi,$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + A_\gamma\Big)(\mu I_2 + I_3) = f(t,x), (t,x) \in \Pi.$$

Функція u задовольняє умову (2).

Зауваження. Порядки ПДО в нелокальних умовах (2) можуть бути довільними і не зв'язані з порядком ПДО у рівнянні (1).

4. Приклади. Фізичне тлумачення розв'язків. Приклад двоточкової задачі без ПДО в нелокальних умовах наведений в [23] і розв'язок $u(t,x)$, $t>0$, $x \in \mathbb{R}$, підрахований при $\varphi(x) \equiv C_1$, $f(t,x) \equiv C_2$. Тоді легко перевіряється, що u задовольняє рівняння і нелокальну умову. Розглянемо спочатку двоточкову задачу, в якій у рівнянні і нелокальній умові фігурує ПДО A_1, побудований за символом $|\sigma|$, $\sigma \in \mathbb{R}$, який виразом

$$A_1 u(t,x) \equiv F_{\sigma\to x}[|\sigma| F_{x\to\sigma}[u(t,x)]], \qquad (19)$$

$t > 0, x \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}$, визначений лише на спадних функціях, або на гладких обмежених функціях [26]

$$A_1 u(t,x) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{\varepsilon<|h|<R} \frac{\Delta_h u(t,x)}{|h|^2} dh, \qquad (20)$$

$t > 0$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\Delta_h u(t,x) = u(t, x+h) - u(t,x).$$

Якщо $u(t,x) \equiv C$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, то $\Delta_h C \equiv 0$ і в (20) $A_1 C = 0$ в класичному сенсі, а в (19) в сенсі теорії узагальнених функцій.

Приклад 1. Двоточкова задача. Нехай $T > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $0 < t < T$, ν, μ – числа, $0 < \nu < \mu$. Розглянемо задачу

$$u_t(t,x) + A_1 u(t,x) = f(t,x), t>0, x \in \mathbb{R}, \qquad (21)$$

$$\mu u(0,x) = A_1 u(T,x) + \varphi(x), x \in \mathbb{R}, 0<\nu<\mu, \qquad (22)$$

де A_1 – ПДО, визначений в (19), (20), f, φ – відомі функції (п. 1).

Враховуючи (7), розв'язок задачі (21), (22) запишеться у вигляді

$$u(t,x) = \nu I_1 + \mu I_2 + I_3, t>0, x \in \mathbb{R}, \qquad (23)$$

де

$$I_1 = \int_t^T \int_{\mathbb{R}} G_1(x-\xi, t+T-\tau) f(\tau,\xi) d\xi d\tau, \quad (24)$$

$$I_2 = \mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_2(x-\xi, t-\tau) f(\tau,\xi) d\xi d\tau, \quad (25)$$

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}} G_2(x-\xi, t)\varphi(\xi) d\xi. \qquad (26)$$

У формулах (23) – (26)

$$G_1(x-\xi,t+T-\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} M(\sigma)|\sigma|\times$$

$$\times\exp\{i(x-\xi)\sigma-|\sigma|(t+T-\tau)\}d\sigma,$$

$0<\tau<t<T$, $x\in\mathbb{R}$, $\xi\in\mathbb{R}$,

$$G_2(x-\xi,t-\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} M(\sigma)\times$$

$$\times\exp\{i(x-\xi)\sigma-|\sigma|(t-\tau)\}d\sigma,$$

$0<\tau<t<T$, $x\in\mathbb{R}$, $\xi\in\mathbb{R}$,

$$M(\sigma)=(\mu-\nu|\sigma|\exp\{-|\sigma|T\})^{-1}=$$

$$=\frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^r|\sigma|^r\exp\{-|\sigma|Tr\}, \qquad (27)$$

$\sigma\in\mathbb{R}$.

Очевидно, що

$$\frac{\partial}{\partial t}G_2(x-\xi,t+T-\tau)=-G_1(x-\xi,t+T-\tau),$$

$$0<\tau<t<t, x\in\mathbb{R},\xi\in\mathbb{R}.$$

Ця рівність є вірною, бо в (21) і (22) фігурує ПДО A_1. Якщо врахувати (27), то

$$G_1(x-\xi,t+T-\tau)\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^r G_{1r}(x-\xi,t+T(1+r)-\tau), \quad (28)$$

$$0<\tau<t<T, x\in\mathbb{R},\xi\in\mathbb{R},$$

$$G_{1r}(x-\xi,t+T(1+r)-\tau)\equiv\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}|\sigma|^{r+1}\times$$

$$\times\exp\{i(x-\xi)\sigma-|\sigma|(t+T(1+r)-\tau)\}d\sigma,$$

$0<\tau<t<T$, $x\in\mathbb{R}$, $\xi\in\mathbb{R}$, $r\geq 0$ – цілі числа,

$$G_2(x-\xi,t-\tau)\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^r G_{2r}(x-\xi,t+Tr-\tau), \quad (29)$$

$$G_{2r}(x-\xi,t+Tr-\tau)\equiv\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}|\sigma|^r\times$$

$$\times\exp\{i(x-\xi)\sigma-|\sigma|(t+Tr-\tau)\}d\sigma,$$

$0<\tau<t<T$, $x\in\mathbb{R}$, $\xi\in\mathbb{R}$, $G_2(x-\xi,t)\equiv G_2(x-\xi,t-t_1)$ при $t_1=0$.

В [26] підраховано, що

$$G_{2,0}(x-\xi,t-\tau)=\frac{1}{\pi}\frac{t-\tau}{(t-\tau)^2+|x-\xi|^2},$$

$$0<\tau<t-T, x\in\mathbb{R},\xi\in\mathbb{R},$$

тому $G_{2,r}$ можна виразити через похідні від G_{20}:

$$G_{2,1}(x-\xi,t+T-\tau)=-\frac{\partial}{\partial t}G_{2,0}(x-\xi,t+t-\tau)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{(t+T-\tau)^2-(x-\xi)^2}{(t+T-\tau)^2+(x-\xi)^2},$$

і т.д.

Якщо врахувати, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}} G_{2,0}(x-\xi,t-\tau)dx=1$$

і те, що функції G_{2r} виражаються через похідні від $G_{2,0}$, то можна підрахувати кілька доданків кожної із сум (28), (29).

Зауваження. 1. Замість ПДО A_1 у рівнянні (21) можна покласти ПДО A_γ із символом $|\sigma|^\gamma$, $\gamma>0$, $\sigma\in\mathbb{R}$, а в ПДО нелокальної умови (22) – ПДО A_β із символом $|\sigma|^\beta$, $\beta>0$, $\sigma\in\mathbb{R}$. Якщо $x\in\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$, $t>0$, то $G_{2,0}(x,t)=\Gamma((n+1)/2)\pi^{-(n+1)/2}t(t^2+|x|^2)^{-(n+1)/2}$ [26].

2. Якщо у нелокальній умові (22) немає ПДО, то при $\varphi(x)=C_1$, $f(t,x)=C_2$ розв'язок задачі (21), (22) виписується формулою (43) із [23] і там перевіряється, що ця функція задовольняє рівняння (21) і нелокальну умову (22). Якщо у нелокальній умові (22) немає ПДО, то розв'язок задачі (21), (22) визначається формулою (40) із [23] і можна безпосередньо перевірити, що ця функція задовольняє рівняння (21) і нелокальну умову (22) при відомих функціях f та φ.

Приклад 2. m-точкова задача ($m\geq 3$.) Розглянемо рівняння (21) з нелокальною умовою

$$\mu u(t,x)|_{t=0}=\sum_{k=1}^{m}\nu_k u(t,x)|_{t=t_k}+\varphi(x), \quad x\in\mathbb{R}. \qquad (30)$$

Формула для розв'язку задачі (21), (30), де $A_1 \equiv A_\gamma$ з символом $a(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, однорідності степеня γ

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t, x-\xi; \mu, \vec{\nu})\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+\mu \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}} G(t-\tau, x-\xi; \mu, \vec{\nu}) f(\tau,\xi)d\xi +$$

$$+\sum_{k=1}^m \nu_k \int\limits_t^{t_k} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}} G(t+t_k-\tau, x-\xi; \mu, \vec{\nu}) \times \quad (31)$$

$$\times f(\tau,\xi)d\xi, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R},$$

де

$$G(t,x;\mu,\vec{\nu}) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\exp\{i(x,\sigma) - a(\sigma)t\}d\sigma}{\mu - \sum\limits_{k=1}^m \nu_k \exp\{-a(\sigma)t_k\}},$$

$$\mu > |\vec{\nu}| \equiv \sum_{i=1}^m \nu_i,$$

де

$$G(t,x;\mu,\vec{\nu}) = \frac{1}{\mu} \times$$

$$\times \sum_{r=0}^\infty \left(\frac{1}{\mu}\right)^r \sum_{|\vec{r}|=r} \frac{r!}{r_1! \dots r_m!} \nu_1^{r_1} \dots \nu_m^{r_m} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\{i(x,\sigma) - a(\sigma)(t + (\vec{t},\vec{r}))\}d\sigma,$$

$t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\mu > |\vec{\nu}|$. Оскільки при $a(\sigma) \equiv |\sigma|$ [26, стор. 34]

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\{ix\sigma - |\sigma|(t+(\vec{t},\vec{r}))\} = \frac{1}{\pi} \frac{t+(\vec{t},\vec{r})}{(t+(\vec{t},\vec{r}))^2 + x^2},$$

$$G(t,x;\mu,\vec{\nu}) = \frac{1}{\pi\mu} \sum_{r=0}^\infty \left(\frac{1}{\mu}\right)^r \sum_{|\vec{r}|=r} \frac{r!}{r_1! \dots r_m!} \times$$

$$\times \nu_1^{r_1} \dots \nu_m^{r_m} \frac{t+(\vec{t},\vec{r})}{(t+(\vec{t},\vec{r}))^2 + x^2}, \qquad (32)$$

$t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\mu > |\vec{r}|$ і $G \geq 0$.

При цьому для $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\mu > |\vec{\nu}|$, використовуючи те, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{(t+(\vec{t},\vec{r}))dx}{(t+(\vec{t},\vec{r}))^2 + x^2} = \pi$$

і

$$\sum_{|\vec{r}|=r} \frac{r!}{r_1! \dots r_m!} \nu_1^{r_1} \dots \nu_m^{r_m} = |\vec{\nu}|^r$$

отримуємо, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x;\mu,\vec{\nu})dx = \frac{1}{\mu} \sum_{r=0}^\infty \left(\frac{|\vec{\nu}|}{\mu}\right)^r =$$

$$= \frac{1}{\mu - |\vec{\nu}|}. \qquad (33)$$

Нехай $\varphi(x) \equiv C_1$, $f(t,x) \equiv C_2$. Тоді, підставивши (32) в (31) і враховуючи (33), отримаємо, що розв'язок задачі (21), (30) набуває вигляду

$$u(t,x) = \frac{1}{\mu - |\vec{\nu}|} \Big[C_1 + \Big(\mu t + \sum_{k=1}^m \nu_k (t_k - t)\Big) C_2\Big], \qquad (34)$$

$$t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \mu > |\vec{\nu}|.$$

Перевіримо, що функція (34) задовольняє рівняння (21) і крайові умови (30). Оскільки функція u із (34) є сталою по x, то $A_1 u = 0$. Тому залишилося довести, що $u_t = C_2$. Справді, диференціюючи (34) по t, отримуємо тотожність

$$u_t \equiv \frac{1}{\mu - |\vec{\nu}|} \Big\{\Big(\mu - \sum_{k=1}^m \nu_k\Big) C_2\Big\} \equiv C_2.$$

Отже, функція (34) задовольняє рівняння (21). Перевіримо виконання нелокальної умови (30). Маємо, що ліва частина (30) набуває вигляду $\frac{\mu}{\mu - |\vec{\nu}|}\Big\{C_1 + \Big(\sum\limits_{k=1}^m \nu_k t_k\Big) C_2\Big\}$. Підрахуємо праву частину (30):

$$\sum_{k=1}^m \nu_k u|_{t=t_k} + C_1 = \frac{\mu}{\mu - |\vec{\nu}|} \Big\{C_1 + C_2 \sum_{k=1}^m \nu_k t_k\Big\}.$$

При цьому використано рівність

$$\sum_{i=1}^m \nu_i \sum_{k=1}^m \nu_k (t_k - t_i) = 0,$$

яка легко перевіряється. Справді,

$$\sum_{i=1}^m \nu_i \sum_{k=1}^m \nu_k (t_k - t_i) = \sum_{i=1}^m \nu_i \Big\{\sum_{k=1}^m \nu_k t_k - t_i \sum_{k=1}^m \nu_k\Big\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \nu_i \sum_{k=1}^{m} \nu_k t_k - \sum_{k=1}^{m} \nu_k \sum_{i=1}^{m} \nu_i t_i = 0.$$

Отже, нелокальна умова (30) виконується.

Висновки. 1. Якщо рівняння (21) однорідне (тобто $f \equiv 0$), то розв'язок задачі (21), (30) є сталою величиною (при $\varphi \equiv C_1$ $\mu > |\vec{\nu}|$)

$$u(t,x) = \frac{C_1}{\mu - |\vec{\nu}|},$$

знак якої залежить від знаку C_1. Розв'язок єдиний.

2. Якщо рівняння (21) і умова (30) неоднорідні і $\varphi \equiv C_1$, $f \equiv C_2$, то при $\mu > |\vec{\nu}|$ функція (34) є єдиним розв'язком задачі (21), (30). При $\mu \le |\vec{\nu}|$ задача (21), (30) розв'язку не має. Якщо задача однорідна ($\varphi = f = 0$), то вона має єдиний нульовий розв'язок.

3. Якщо $\mu > |\vec{\nu}|$, $t \ge 0$, $x \in \mathbb{R}$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, то розв'язки обох задач (однорідної і неоднорідної) невід'ємні.

Фізичне тлумачення розв'язків. Нехай $t \ge 0$ – час, $x \in \mathbb{R}$ – точка однорідної нитки, яка займає положення вісі Ox, $u(t,x)$ – температура нитки в момент часу $t \ge 0$ у точці $x \in \mathbb{R}$; $\mu > 0$, $\nu_k \in \mathbb{R}$, $1 \le k \le m$, – деякі параметри, що визначають інтенсивність теплових джерел в точці x в моменти часу $t = 0$ та $t = t_k$, $1 \le k \le m$ відповідно; $\varphi(x)$ – відома функція, $f(t,x)$ – відома функція, що визначає інтенсивність зовнішнього джерела тепла. Рівняння (21) можна тлумачити як узагальнене рівняння теплопровідності, де замість диференціального оператора $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, який є ПДО з символом $|\sigma|^2$ записано його квадратний корінь, тобто функція від оператора $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, символом якої є $|\sigma|$.

Умова (30) у вигляді

$$\mu u(t,x)|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \nu_k u(t,x)|_{t=t_k} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

може тлумачитися як різниця між вливаннями тепла в точку $x \in \mathbb{R}$ в початковий момент часу $t = 0$ і наступні моменти часу $t = t_k$, $1 \le k \le m$, з відповідними інтенсивностями, що є відомою функцією, залежною від x.

Якщо зовнішні теплові джерела відсутні ($f \equiv 0$) і різниця в (30) стала ($\varphi \equiv C_1$), то $u = \frac{C_1}{\mu - |\vec{\nu}|}$ – також стала, залежна від інтенсивностей μ і ν_k, $1 \le k \le m$, в точках $t = 0$ і $t = t_k$, $1 \le k \le m$, відповідно. Число $\frac{1}{\mu - |\vec{\nu}|}$ можна назвати коефіцієнтом технологічного нагрівання стержня.

Якщо $\varphi \equiv 0$, тобто $C_1 = 0$, то

$$u = C_2 t + \frac{C_2}{\mu - |\vec{\nu}|} \sum_{k=1}^{m} \nu_k t_k,$$

де $C_2 t$ – кількість тепла, отриманого стержнем від зовнішнього нагрівання, а $\frac{C_2}{\mu - |\vec{\nu}|} \sum\limits_{k=1}^{m} \nu_k t_k$ – частка тепла, отримана стержнем від зовнішнього нагрівання з урахуванням технологічного процесу (30): $\sum\limits_{k=1}^{m} \nu_k (C_2 t_k)$, де ν_k – інтенсивність тепла, а $C_2 t_k$ – кількість тепла, отриманого додатково в момент часу t_k, $1 < k \le m$. Сумарна кількість тепла дорівнює $\sum\limits_{k=1}^{m} \nu_k C_2 t_k$.

Загальна формула така:

$$u(t,x) = \frac{C_1}{\mu - |\vec{\nu}|} + C_2 t + \frac{1}{\mu - |\vec{\nu}|} \sum_{k=1}^{m} \nu_k (C_2 t_k),$$

де кожен доданок має свій фізичний зміст.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самко Г.С.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Г.С. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. *Schwartz L.* Theorie des distributions. In 2 volms / L. Schwartz. – Paris: Hermann, 1951. – V. 2. - 169 p.
3. *Лизоркин П.И.* Операторы, связанные с дробным дифференцированием, и классы дифференцируемых функций / П.И. Лизоркин // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1972. – Т. 117. – С. 212–243.
4. *Кочубей А.Н.* Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы / А.Н. Кочубей / Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – Т. 52, № 5. – С. 909–934.
5. *Eidelman S.D.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S.D. Eidelman, S.D.

Ivasyshen, A.N. Kochubei – Basel-Boston-Berlin: Bizkhaser Verlag, 2004. – 390 p. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 152).

6. *Кочубей А.Н.* Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка / А.Н. Кочубей / Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 8. – С. 1359–1368.
7. *Эйдельман С.Д.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решений задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений / С.Д. Эйдельман, Я.М. Дринь // Приближенные методы математического анализа. – Киев, 1974. – С. 60–69.
8. *Дрінь Я.М.* Вивчення одного класу параболічних псевдодиференціальних операторів у просторах гельдерових функцій / Я.М. Дрінь // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1974. – № 1. – С. 19–21.
9. *Дринь Я.М.* Фундаментальное решение задачи Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных уравнений / Я.М. Дринь // Докл. АН УССР. Сер. А. 1977. – № 3. – С. 198–202.
10. *Эйдельман С.Д.* Построение и исследование классических фундаментальных решений задачи Коши равномерно параболических псевдодифференциальных уравнений / С.Д. Эйдельман, Я.М. Дринь // Мат. исследования. – 1981. – Т. 63. – С. 18–33.
11. *Федорюк М.В.* Асимптотика функции Грина псевдодифференциальных параболических уравнений / М.В. Федорюк // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14, № 7. – С. 1296–1301.
12. *Літовченко В.А.* Задача Коші з оператором Рісса дробового диференціювання / В.А. Літовченко // Укр. мат. журн. – Т. 57, № 12. – 2005. – С. 1653–1667.
13. *Городецький В.В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу / В.В. Городецький. – Чернівці: Рута, 1998. – 225 с.
14. *Літовченко В.А.* Задача Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з початковими умовами в просторах узагальнених функцій типу розподілів: дис. ... кандидата фіз.-мат. наук: 01.01.02 / В.А. Літовченко. – Чернівці, 1995. – 118 с.
15. Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними / [*Б.Й. Пташник, В.С. Ільків, І.Я. Кміть, В.М. Поліщук*]. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
16. *Ya.M. Drin'* Nonlocal problem for one class equations of diffusion in space of generalized functions. Pros. Spie 9066, Eleventh Intern. Conf. on Correlation Optics, 9066OU, pp. 1–12 (December 17, 2013).
17. *V.V. Gorodetsky, Ya.M. Drin'.* Investigation of Cauchy and Nonlocal problems of Diffusion Equation. Pros. Spie 9066, Eleventh Intern. Conf. on Correlation Optics, 9066OT, pp. 1–20 (December 17, 2013).
18. *Городецкий В.В.* Нелокальная по времени двухточечная задача и задача оптимального управления для эволюционных псевдодифференциальных уравнений / В.В. Городецкий, Я.М. Дринь // Проблемы управления и информатики. – 2014, № 2. – С. 65–79.
19. *Городецький В.В.* Нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами в просторах періодичних функцій / Городецький В.В., Дрінь Я.М. // Буковинський математичний журнал, 2014. – Т. 2, № 1. – С. 54–70.
20. *Городецький В.В.* Багатоточкова за часом задача для одного класу еволюційних псевдодиференціальних рівнянь / Городецький В.В., Дрінь Я.М. // Укр. мат. журн. – 2014. – Т. 66, № 5. – С. 619–633. ISSN 1027–3130.
21. *Дрінь Я.М.* Дослідження задачі Коші та нелокальних багатоточкових крайових параболічних задач для псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами / Я.М. Дрінь, М.М. Дрінь // Міжнар. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування" (11–14.10.2006): Тези доп. – Чернівці, 2006. – С. 205.
22. *Дрінь Я.М.* Класичні та узагальнені нелокальні задачі для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами / Ярослав М. Дрінь // Third intern. conf. for Young Mathematicians on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky (Lviv, November 3–6, 2010): Book of abstracts, Donetsk, 2010. – P. 55.
23. *Дрінь Я.М.* Нелокальна задача Діріхле для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами / Дрінь Я.М. // Буковинський математичний журнал, 2014. – Т. 2, № 2–3. – С. 72–81.
24. *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні / М.І. Матійчук. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2010. – 248 с.
25. *Матійчук М.* Про розв'язки нелокальних крайових задач для параболічних псевдодиференціальних рівнянь М. Матійчук, О. Дрінь // Сучасні проблеми механіки і математики. Матеріали конф. – Львів, 1998. – С. 246.
26. *Дрінь Р.Я.* Дослідження якісних властивостей розв'язків параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами: дис. ... кандидата фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Р.Я. Дрінь. – Львів, 1997. – 115 с.