УДК 517.983.5

©2014 р. **В.П. Журавльов**

Житомирський національний агроекологічний університет

ЛІНІЙНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

У роботі встановлено умови розв'язності та побудовано загальні розв'язки не всюди розв'язних інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром та крайових задач для них у банахових просторах. Детально розглянуто приклад.

The paper presents conditions of solvability and constructions of general solutions for Fredholm integral equations with generate kernel which need not be always solvable, as well as for boundary value problems for them in Banach spaces. An example is considered in details.

Встановлення умов розв'язності та побудова загальних розв'язків лінійних крайових задач

$$(Lz)(t) = f(t),$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha,$$

де $L : \widetilde{\mathbf{B}}_1 \to \widetilde{\mathbf{B}}_2$ ($\widetilde{\mathbf{B}}_1, \widetilde{\mathbf{B}}_2$ — функціональні банахові простори) — не всюди розв'язний оператор є проблемою, вирішення якої істотно залежить від можливості побудови узагальнено-оберненого оператора L^- до лінійного оператора L. До таких задач належать крайові задачі для деяких класів функціонально-диференціальних, інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь [1 – 3]. Оператор належить класу узагальнено оборотних операторів [4], якщо його нуль-простір $N(L)$ та образ $R(L)$ доповнювальні [5] у банахових просторах $\widetilde{\mathbf{B}}_1$ та $\widetilde{\mathbf{B}}_2$, відповідно. З кожною парою взаємно доповнювальних просторів пов'язані обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(L)}$ та $\mathcal{P}_{R(L)}$, які індукують розбиття банахових просторів $\widetilde{\mathbf{B}_1}$ и $\widetilde{\mathbf{B}_2}$ у прямі топологічні суми

$$\widetilde{\mathbf{B}}_1 = N(L) \oplus X_L,$$

$$\widetilde{\mathbf{B}}_2 = R(L) \oplus Y_L,$$

де $N(L), X(L), R(L), Y_L$ — замкнені підпростори. Очевидно, що узагальнено оборотні оператори є нормально розв'язними. До класу узагальнено оборотних операторів належать: фредгольмові ($\dim N(L) = \dim Y_L < \infty$); нетерові ($\dim N(L) = n < \infty,\ \dim Y_L = d < \infty,\ n \neq d$) $n-$ нормальні [6] ($\dim N(L) = n < \infty,\ \dim Y_L = \infty$) з доповнювальним образом [5]; $d-$ нормальні ($\dim N(L) = \infty,\ \dim Y_L = d < \infty$) з доповнювальним ядром; топологічно фредгольмові ($\dim N(L) = \infty,\ \dim Y_L = \infty$, $N(L)$ ізоморфний Y_L); топологічно нетерові [7] ($\dim N(L) = \infty, \dim Y_L = \infty$) оператори.

У [8] розглянуто загальний підхід до дослідження умов розв'язності та побудови загальних розв'язків крайових задач для нормально розв'язних операторних рівнянь, які є узагальнено оборотними.

У цій роботі досліджуються умови розв'язності та структура загальних розв'язків не всюди розв'язних інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром та крайових задач для них у банахових просторах. З точки зору теорії операторів інтегральний оператор Фредгольма з виродженим ядром, який діє у банаховому просторі $\mathbf{B}_1$, є топологічно фредгольмовим.

Постановка задачі. Нехай $z(t)$ вектор-функція, яка діє з відрізка $\mathcal{I} = [a, b]$ у дійсний банаховий простір $\mathbf{B}_1$, $z(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) := \{z(\cdot) \to \mathbf{B}_1, \|z\| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|z(t)\|_{\mathbf{B}_1}\}$, $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — банаховий простір неперервних на $\mathcal{I}$ вектор-функцій, $\mathbf{B}$ — дійсний банаховий простір.

Розглянемо у банаховому просторі $\mathbf{B}_1$ лінійну крайову задачу для інтегрального рівняння Фредгольма з виродженим ядром

$$(Lz)(t) := z(t) - M(t)\int_a^b N(s)z(s)ds = f(t), \tag{1}$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha, \tag{2}$$

де оператор-функції $M(t)$ та $N(t)$ діють з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у $\mathbf{B}_1$, сильно неперервні з нормами $|||M||| = \sup_{t\in\mathcal{I}}\|M(t)\|_{\mathbf{B}_1} = M_0 < \infty$ та $|||N||| = \sup_{t\in\mathcal{I}}\|N(t)\|_{\mathbf{B}_1} = N_0 < \infty$, оператор ℓ — обмежений і діє з банахового простору $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ у банаховий простір $\mathbf{B}_1$, $\ell : \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{B}$, $\alpha \in \mathbf{B}$.

Ставиться задача: встановити необхідні та достатні умови існування та загальний вигляд розв'язків крайової задачі (1), (2) для інтегрального рівняння Фредгольма з виродженим ядром, які належать банаховому простору $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$.

Попередні відомості. Відомо [9, с. 141], що добуток $M(t)x$ сильно неперервної оператор-функції $M(t)$ на елемент $x \in \mathbf{B}_1$ є неперервною вектор-функцією. Тому оператор L діє з банахового простору $\mathbf{C}([a,b], \mathbf{B}_1)$ у цей же простір.

Позначимо

$$D = I_{\mathbf{B}_1} - A, \quad A = \int_a^b N(s)M(s)\,ds,$$

Лінійний оператор D — діє з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у $\mathbf{B}_1$ і є обмеженим.

Нехай оператор D — узагальнено оборотний. Тоді існують обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(D)} : \mathbf{B}_1 \to N(D)$, який проектує банаховий простір $\mathbf{B}_1$ на нуль-простір $N(D)$ оператора D, $\mathcal{P}_{Y_D} : \mathbf{B}_1 \to Y_D$, який проектує банаховий простір $\mathbf{B}_1$ на підпростір Y_D ізоморфний нуль-простору $N(D^*)$ спряженого оператора D^* до оператора D та обмежений узагальнено-обернений оператор D^-, який можна побудувати, використовуючи методику з [10].

Теорема 1. [11] *Нехай $D : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ — обмежений узагальнено оборотний оператор. Тоді інтегральний оператор L з (1) — узагальнено оборотний.*

Для доведення узагальненої оборотності інтегрального оператора (1) побудовано проектори $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{C}([a,b], \mathbf{B}_1) \to N(L)$ та $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{C}([a,b], \mathbf{B}_1) \to Y_L$

$$(\mathcal{P}_{N(L)}z)(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\int_a^b N(s)z(s)ds, \tag{3}$$

$$(\mathcal{P}_{Y_L}f)(t) = M(t)\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)f(s)ds$$

та доведено, що вони обмежені.

Теорема 2. [11] *Нехай $D : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ — узагальнено оборотний оператор. Тоді оператор*

$$(L^-f)(t) = f(t) + M(t)D^-\int_a^b N(s)f(s)ds \tag{4}$$

є обмеженим узагальнено-оберненим оператором до інтегрального оператора L з (1), де D^- — обмежений узагальнено-обернений оператор до оператора D.

Основний результат. Використовуючи апарат теорії узагальнено-обернених операторів, знайдемо необхідні та достатні умови розв'язності крайової задачі (1), (2) у банаховому просторі. Для цього спочатку знайдемо умови існування та загальний вигляд розв'язку операторного рівняння (1).

Відомо [4], що узагальнено оборотний оператор є нормально розв'язним. Тому для рівняння (1) правильна

Теорема 3. *Нехай $D : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ — обмежений узагальнено оборотний оператор. Тоді при виконанні умови*

$$(\mathcal{P}_{Y_L}f)(t) = M(t)\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)f(s)ds = 0 \tag{5}$$

і тільки при ній операторне рівняння (1) розв'язне і має сім'ю розв'язків

$$z(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}c + (L^-f)(t), \tag{6}$$

де $M(t)\mathcal{P}_{N(D)}$ — оператор-функція, яка є розв'язком відповідного (1) однорідного інтегрального рівняння, c — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$, L^- — узагальнено-обернений оператор (4) до інтегрального оператора L з (1).

Доведення. Запишемо рівняння (1) у вигляді

$$z(t) = M(t)\, c + f(t), \tag{7}$$

де $c = \int\limits_a^b N(s)z(s)ds$. Застосувавши до обох частин рівняння (7) оператор-функцію $N(t)$ та проінтегрувавши їх на проміжку $[a, b]$ отримаємо операторне рівняння

$$\int\limits_a^b N(s)z(s)ds = \int\limits_a^b N(s)M(s)\, c\, ds +$$

$$+ \int\limits_a^b N(s)f(s)ds,$$

або

$$(I_{\mathbf{B}_1} - A)c = Dc = b, \tag{8}$$

де

$$b = \int\limits_a^b N(s)f(s)ds.$$

З узагальненої оборотності оператора $D = I_{\mathbf{B}_1} - A$ маємо, що операторне рівняння (8) нормально розв'язне. Отже воно розв'язне тоді і лише тоді, коли виконується умова [4, с. 133]

$$\mathcal{P}_{Y_D} b = 0$$

і при цьому має сім'ю розв'язків

$$c = \mathcal{P}_{N(D)}\hat{c} + D^- b, \tag{9}$$

де $\hat{c}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$.

Підставивши знайдене $c \in \mathbf{B}_1$ з (9) у формулу (7), отримаємо загальний розв'язок інтегрального рівняння (1):

$$z(t) = M(t)\left\{\mathcal{P}_{N(D)}\hat{c} + D^- b\right\} + f(t) =$$

$$= M(t)\, \mathcal{P}_{N(D)}\hat{c} + f(t) + M(t)D^- \times \tag{10}$$

$$\times \int\limits_a^b N(s)f(s)ds = M(t)\, \mathcal{P}_{N(D)}\hat{c} + (L^- f)(t),$$

оскільки за теоремою 2

$$(L^- f)(t) = f(t) + M(t)D^- \int\limits_a^b N(s)f(s)ds.$$

Далі знайдемо умови існування та загальний розв'язок крайової задачі (1), (2).

Підставивши розв'язок (6) неоднорідного операторного рівняння (1) у крайову умову (2), отримаємо операторне рівняння

$$\begin{gathered} \ell(M(\cdot)\mathcal{P}_{N(D)})\hat{c} + \ell f(\cdot) + \\ \ell M(\cdot) D^- \int\limits_a^b N(s)f(s)ds = \alpha. \end{gathered} \tag{11}$$

Позначимо через $Q = \ell(M(\cdot)\mathcal{P}_{N(D)})$ — оператор, який діє з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у банаховий простір $\mathbf{B}$. Оператор Q — обмежений як суперпозиція обмеженого оператора ℓ та обмеженої оператор-функції $M(t)\mathcal{P}_{N(D)}$.

Тоді рівняння (11) запишеться у вигляді

$$Q\hat{c} = \alpha - \ell f(\cdot) - \ell M(\cdot)D^- \int\limits_a^b N(s)f(s)ds. \tag{12}$$

Нехай оператор Q належить класу узагальнено оборотних операторів. Позначимо $\mathcal{P}_{N(Q)} : \mathbf{B}_1 \to N(Q)$ — обмежений проектор банахового простору $\mathbf{B}_1$ на нуль-простір $N(Q)$ оператора Q, $\mathcal{P}_{Y_Q} : \mathbf{B} \to Y_Q$ — обмежений проектор банахового простору $\mathbf{B}$ на підпростір $Y_Q \subset \mathbf{B}$.

Оскільки оператор Q — узагальнено оборотний, а отже нормально розв'язний, то рівняння (12) розв'язне тоді і лише тоді, коли виконується умова [4, с. 133]

$$\mathcal{P}_{Y_Q}\Big[\alpha - \ell f(\cdot) - \ell M(\cdot)D^- \int\limits_a^b N(s)f(s)ds\Big] = 0,$$

при виконанні якої воно має сім'ю розв'язків

$$\hat{c} = \mathcal{P}_{N(Q)}\tilde{c} + Q^- \Big[\alpha - \ell f(\cdot) -$$

$$-\ell M(\cdot)D^{-}\int_a^b N(s)f(s)ds\Big], \qquad (13)$$

де $\tilde{c}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$, Q^{-} — обмежений узагальнено-обернений оператор до оператора Q.

Підставляючи $\hat{c}$ з (13) у (10), отримаємо загальний розв'язок крайової задачі (1), (2)

$$z(t)=M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(Q)}\tilde{c}+$$

$$+\Big[f(t)-M(t)\mathcal{P}_{N(D)}Q^{-}\ell f(\cdot)\Big]+M(t)\times$$

$$\times\big[I_{\mathbf{B}_1}-\mathcal{P}_{N(D)}Q^{-}\ell M(\cdot)\big]D^{-}\int_a^b N(s)f(s)ds+$$

$$M(t)\mathcal{P}_{N(D)}Q^{-}\alpha=M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(Q)}\tilde{c}+$$

$$+(Gf)(t)+M(t)\mathcal{P}_{N(D)}Q^{-}\alpha,$$

де

$$(Gf)(t):=\big[f(t)-M(t)\mathcal{P}_{N(D)}Q^{-}\ell f(\cdot)\big]+ \qquad (14)$$

$$+M(t)\big[I_{\mathbf{B}_1}-\mathcal{P}_{N(D)}Q^{-}\ell M(\cdot)\big]D^{-}\int_a^b N(s)f(s)ds$$

— узагальнений оператор Гріна напіводнорідної ($\alpha=0$) крайової задачі (1), (2), а оператор-функція $M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(Q)}$ — є розв'язком відповідної (1), (2) однорідної ($f(t)=0,\alpha=0$) крайової задачі.

Дійсно,

$$(Lz)(t)=M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(Q)}-$$

$$-M(t)\int_a^b N(s)\Big\{M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(Q)}\Big\}ds=$$

$$=M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(Q)}-M(t)A\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(Q)}=0,$$

оскільки $A=I_{\mathbf{B}_1}-D$, $D\mathcal{P}_{N(D)}=0$, а

$$\ell(M(\cdot)\mathcal{P}_{N(D)})\mathcal{P}_{N(Q)}=Q\mathcal{P}_{N(Q)}=0,$$

оскільки $\ell(M(\cdot)\mathcal{P}_{N(D)})=Q$, а $Q\mathcal{P}_{N(Q)}=0$.

Отже, для крайової задачі (1), (2) справедлива наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай оператори $D:\mathbf{B}_1\to\mathbf{B}_1$ та $Q:\mathbf{B}_1\to\mathbf{B}$ — узагальнено оборотні.*

Тоді відповідна (1), (2) однорідна ($f(t)=0,\alpha=0$) крайова задача має сім'ю розв'язків

$$z(t)=M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(Q)}\tilde{c}, \qquad (15)$$

де $\tilde{c}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$.

Неоднорідна крайова задача (1), (2) розв'язна для тих і лише тих $f(t)\in\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$ та $\alpha\in\mathbf{B}$, які задовольняють умови

$$(\mathcal{P}_{Y_L}f)(t)=M(t)\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)f(s)ds=0, \qquad (16)$$

$$\mathcal{P}_{Y_Q}\big[\alpha-\ell f(\cdot)-\ell M(\cdot)D^{-}\int_a^b N(s)f(s)ds\big]=0$$

і при цьому вона має сім'ю розв'язків

$$z(t)=M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(Q)}\tilde{c}+ \qquad (17)$$

$$+(Gf)(t)+M(t)\mathcal{P}_{N(D)}Q^{-}\alpha,$$

де G — узагальнений оператор Гріна (14) відповідної (1), (2) напіводнорідної ($\alpha=0$) крайової задачі.

Зліченновимірні крайові задачі для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром.

Далі розглянемо частинний випадок крайової задачі (1), (2) для інтегрального оператора Фредгольма з виродженим ядром, де оператор-функції $M(t)$ та $N(t)$ — зліченновимірні матриці, вектор-стовпці та вектор-рядки яких належать банаховому простору $\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_1)$ діють з сепарабельного банахового простору $\mathbf{B}_1$ у $\mathbf{B}_1$, оператор ℓ діє з банахового простору $\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$ у сепарабельний банаховий простір $\mathbf{B}$, $\ell:\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)\to\mathbf{B}$, $\alpha\in\mathbf{B}$.

Розв'язок крайової задачі (1), (2) для інтегрального рівняння будемо шукати у вигляді зліченновимірного вектор-стовпчика

$z(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — банахового простору неперервних на проміжку $\mathcal{I}$ функцій, які набувають значень у дійсному сепарабельному банаховому просторі $\mathbf{B}_1$.

Наслідок 1. *(Нормально розв'язні крайові задачі) Нехай $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}$ — сепарабельні банахові простори, $D : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ та $Q : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}$ — узагальнено оборотні оператори, причому Q — топологічно фредгольмовий.*

Тоді однорідна крайова задача має зліченну кількість розв'язків (15). Неоднорідна крайова задача (1), (2) розв'язна для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, $\alpha \in \mathbf{B}$, які задовольняють зліченну кількість умов (16), при виконанні яких вона має зліченну кількість розв'язків (17).

Наслідок 2. *(n-нормально розв'язні крайові задачі) Нехай $\mathbf{B}_1$ — скінченновимірний, а $\mathbf{B}$ — нескінченновимірний сепарабельний банаховий простори, $Q : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}$ — n-нормальний оператор з доповнювальним образом $R(Q)$.*

Тоді однорідна крайова задача має скінченну кількість лінійно-незалежних розв'язків (15). Неоднорідна задача (1), (2) розв'язна для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, $\alpha \in \mathbf{B}$, які задовольняють зліченну кількість лінійно-незалежних умов (16), при виконанні яких вона має скінченну кількість розв'язків (17).

Наслідок 3. *(d-нормально розв'язні крайові задачі) Нехай $\mathbf{B}_1$ — нескінченновимірний сепарабельний, а $\mathbf{B}$ — скінченновимірний банахові простори, $Q : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}$ — d-нормальний оператор з доповнювальним нуль-простором $N(Q)$.*

Тоді однорідна крайова задача має зліченну кількість лінійно-незалежних розв'язків (15). Неоднорідна задача (1), (2) розв'язна для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, $\alpha \in \mathbf{B}$, які задовольняють скінченну кількість лінійно-незалежних умов (16), при виконанні яких вона має зліченну кількість розв'язків (17).

Наслідок 4. *(Нетерові крайові задачі) Нехай $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}$ — скінченновимірні простори, а $Q : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ — нетеровий оператор.*

Тоді однорідна крайова задача має скінченну кількість розв'язків (15). Неоднорідна задача (1), (2) розв'язна для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, $\alpha \in \mathbf{B}$, які задовольняють скінченну кількість умов (16), при виконанні яких вона має скінченну кількість розв'язків (17).

Зауваження 1. *У випадку, коли оператор L — всюди розв'язний перша умова у (16) існування розв'язків крайової задачі (1), (2) автоматично виконується, оскільки $\mathcal{P}_{Y_L} \equiv 0$. Такі крайові задачі розглянуті у [13], де наведено подібну класифікацію зліченновимірних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, які є всюди розв'язними.*

Приклад. Знайдемо умови розв'язності та загальний вигляд розв'язків крайової задачі

$$(Lz)(t) =: z(t) - M(t) \int_0^2 N(s)z(s)ds = f(t), \tag{18}$$

$$\ell z(\cdot) = \int_0^2 S(t)z(t)dt = \alpha, \tag{19}$$

де

$$M(t) = \operatorname{diag}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & \frac{t}{2} \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

$$N(s) = \operatorname{diag}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{3(s-1)}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots \right\}$$

— зліченновимірні матриці, які діють з банахового простору $\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})$ у $\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})$ з нормами $|||M|||_{\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})} = \sup_{t\in[0,2]}\|M(t)\|_{\mathbf{c}}$, $|||N|||_{\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})} = \sup_{t\in[0,2]}\|N(t)\|_{\mathbf{c}}$, $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t), \dots) \in \mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})$,

$$S(t) = \operatorname{diag}\left\{S_{(3\times 2)}(t), S_{(3\times 2)}(t), \dots\right\} -$$

сильно неперервна оператор-функція, $S_{(3\times2)}(t)$ — (3×2)-вимірна матриця:

$$S_{(3\times 2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -\frac{3t}{4} \\ 1 & 3t \end{pmatrix},$$

$|||S|||_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})} = \sup_{t\in[0,1]}\|S(t)\|_{\mathbf{c}} < \infty$.

Таким чином, вектор-функціонал ℓ діє з банахового простору $\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})$ у банаховий простір $\mathbf{c}$ і є обмеженим, $\alpha = \mathrm{col}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) \in \mathbf{c}$.

Із визначення матриць $M(t)$ та $N(t)$ маємо, що

$$|||M|||_{\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})} = \sup_{t\in[0,2]} |t| \le 2,$$

$$|||N|||_{\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})} = \sup_{t\in[0,2]} \left|\frac{3(t-1)}{2}\right| \le 3/2.$$

Тоді оператор L є лінійним обмеженим оператором, який діє з банахового простору неперервних на проміжку $[0,2]$ функцій $\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})$ в $\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})$. Нескінченновимірні підпростори $N(L)$ та Y_L — ізоморфні як підпростори сепарабельного банахового простору $\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})$ [12, c. 55].

Оператор

$$D = I_{\mathbf{c}} - A, \quad A = \int\limits_0^2 N(s)M(s)\,ds$$

має вигляд

$$D = \mathrm{diag}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots \right\}$$

і діє з банахового простору $\mathbf{c}$ — обмежених послідовностей $x = \{\xi^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$, що збіжні до скінченної межі у простір $\mathbf{c}$ таких же послідовностей $y = \{\eta^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$, $D : \mathbf{c} \to \mathbf{c}$.

Очевидно, що оператор D — обмежений у цьому просторі.

Проектори $\mathcal{P}_{N(D)} : \mathbf{c} \to N(D)$ і $\mathcal{P}_{Y_D} : \mathbf{c} \to Y_D$ матимуть вигляд:

$$\mathcal{P}_{N(D)} = \mathrm{diag}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots \right\},$$

$$\mathcal{P}_{Y_D} = \mathrm{diag}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots \right\}.$$

Обмежений узагальнено-обернений оператор D^- запишеться у вигляді:

$$D^- = \mathrm{diag}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots \right\}.$$

За формулами (3) побудуємо проектори

$$(\mathcal{P}_{N(L)}z)(t) = X(t)\int\limits_a^b N(s)z(s)ds,$$

$$(\mathcal{P}_{Y_L}f)(t) = \Phi(t)\int\limits_a^b N(s)f(s)ds,$$

де

$$X(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)} =$$

$$= \mathrm{diag}\left\{ \begin{pmatrix} 1+t & 0 \\ -\frac{t}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+t & 0 \\ -\frac{t}{2} & 0 \end{pmatrix}, \ldots \right\},$$

$$\Phi(t) = M(t)\mathcal{P}_{Y_D} =$$

$$= \mathrm{diag}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -t \\ 0 & \frac{t}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -t \\ 0 & \frac{t}{2} \end{pmatrix}, \ldots \right\}.$$

Згідно з теоремою 2 узагальнено-обернений оператор до інтегрального оператора (18) матиме вигляд

$$(L^- f)(t) = f(t) + \overline{M}(t)\int\limits_0^2 N(s)z(s)ds,$$

де

$$\overline{M}(t) = M(t)D^- =$$

$$= \mathrm{diag}\left\{ \begin{pmatrix} -t & 0 \\ \frac{t}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -t & 0 \\ \frac{t}{2} & 0 \end{pmatrix}, \ldots \right\}.$$

Умови існування розв'язку рівняння (18) за теоремою 3 мають вигляд

$$(\mathcal{P}_{Y_L}f)(t) = \Phi(t)\int\limits_0^2 N(s)f(s)ds.$$

Після перетворень одержимо

$$\int\limits_0^2 f_{2k}(t)dt = 0, \quad k = 1,2,3,\ldots\,. \tag{20}$$

При виконанні умов (20) операторне рівняння (18) має сім'ю розв'язків

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z})(t) + (L^- f)(t) =$$

$$= X(t)\int\limits_0^2 N(s)\hat{z}(s)ds + \qquad (21)$$

$$+f(t) + \overline{M}(t)\int\limits_0^2 N(s)f(s)ds,$$

де $\hat{z}(t)$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})$.

Підставляючи загальний розв'язок (21) у крайову умову (18), отримаємо операторне рівняння

$$(Q\hat{z})(\cdot) + \ell(L^{-}f)(\cdot) = \alpha, \qquad (22)$$

де

$$(Q\hat{z})(\cdot) = \ell\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z})(\cdot) = \int\limits_0^2 S(t)X(t)\times$$

$$\times\int\limits_0^2 N(s)\hat{z}(s)ds\,dt = Q\int\limits_0^2 N(s)\hat{z}(s)ds.$$

Оператор

$$Q = \int\limits_0^2 S(t)X(t)dt =$$

$$= \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots\right\}$$

діє з банахового простору $\mathbf{c}$ – збіжних обмежених послідовностей $x = \{\xi^{(i)}\}$ у простір $\mathbf{c}$ таких же послідовностей $y = \{\eta^{(i)}\}$, Q: $\mathbf{c} \to \mathbf{c}$.

Позначивши $c = \int\limits_0^2 N(s)\hat{z}(s)ds$, запишемо операторне рівняння (22) у вигляді:

$$Qc = \alpha - \ell f(\cdot) - \ell\overline{M}(\cdot)\int\limits_0^2 N(s)f(s)ds. \quad (23)$$

Проектори $\mathcal{P}_{Y_Q} : \mathbf{c} \to Y_Q$ та $\mathcal{P}_{N(Q)} : \mathbf{c} \to N(Q)$ мають вигляд:

$$\mathcal{P}_{N(Q)} = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots\right\},$$

$$\mathcal{P}_{Y_Q} = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots\right\},$$

і, очевидно, обмежені.

Отже, оператор Q — узагальнено оборотний і, як наслідок, нормально розв'язний. Тому для розв'язності рівняння (23) необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\mathcal{P}_{Y_Q}\big\{\alpha - \ell f(\cdot) - \ell\overline{M}(\cdot)\int\limits_0^2 N(s)f(s)ds\big\} = 0.$$

Після перетворень отримаємо, що компоненти вектора $\alpha \in \mathbf{c}$ та вектор-функції $f(t) \in \mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})$ повинні задовольняти умови:

$$\alpha_{4k-3} - \int\limits_0^2 \big\{(6t-5)f_{2k-1}(t) + 4f_{2k}(t)\big\}dt = 0, \qquad (24)$$

$$\alpha_{4k-1} - \int\limits_0^2 \big\{(6t-5)f_{2k-1}(t) + 3tf_{2k}(t)\big\}dt = 0,$$

$$k = 1, 2, 3, \dots.$$

При виконанні цих умов операторне рівняння (23) матиме розв'язок

$$c = \mathcal{P}_{N(Q)}\hat{c} + Q^{-}\Big\{\alpha - \ell f(\cdot) - \\ -\ell\overline{M}(\cdot)\int\limits_0^2 N(s)f(s)ds\Big\}, \qquad (25)$$

де $\hat{c}$ — довільний елемент простору $\mathbf{c}$,

$$Q^{-} = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots\right\}$$

— узагальнено-обернений оператор до оператора Q, який можна побудувати за методикою, наведеною в [10].

Підставивши знайдене значення c з (25) замість $\int\limits_0^2 N(s)\hat{z}(s)ds$ у (21), отримаємо загальний розв'язок крайової задачі (18), (19) у вигляді

$$z(t) = X(t)\mathcal{P}_{N(Q)}\hat{c} + f(t) - X(t)Q^{-}\ell f(\cdot) -$$

$$-X(t)Q^{-}\ell\overline{M}(\cdot)\int\limits_0^2 N(s)f(s)ds +$$

$$+\overline{M}(t)\int\limits_0^2 N(s)f(s)ds + X(t)Q^{-}\alpha.$$

Таким чином, крайова задача (18), (19) матиме розв'язки тоді і лише тоді, коли компоненти елемента $\alpha \in \mathbf{c}$ та вектор-функції $f(t) \in \mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})$ задовольнятимуть умови (20), (24), при виконанні яких вона матиме сім'ю розв'язків:

$$z(t) = X(t)\mathcal{P}_{N(Q)}\hat{c} + (Gf)(t) + X(t)Q^{-}\alpha,$$

де G — узагальнений оператор Гріна напіводнорідної ($\alpha = 0$) крайової задачі (18), (19), який діє на функцію $f(t) \in \mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})$ за правилом:

$$(Gf)(t) = \widetilde{f}(t) + \widetilde{M}(t)\int\limits_0^2 N(s)f(s)ds,$$

$$\widetilde{f}(t) = f(t) - \widetilde{X}(t)\ell f(\cdot) =$$

$$= f(t) - \widetilde{X}(t)\int\limits_0^2 S(s)f(s)ds,$$

$$\widetilde{X}(t) = X(t)Q^{-} =$$

$$= \operatorname{diag}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1+t & 0 \\ 0 & -\frac{t}{2} & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

$$\widetilde{M}(t) = \left[\overline{M}(t) - X(t)Q^{-}\ell\overline{M}(\cdot)\right] =$$

$$= \operatorname{diag}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 277 с.
2. *Ландо Ю. К.* Об индексе и нормальной разрешимости интегро-дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. – 1968. – **4**, № 6. – С. 1112 – 1126.
3. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht, Boston: VSP, 2004. – 317 p.
4. *Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.
5. *Попов М. М.* Доповнювальні простори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха // Математика сьогодні. – 2007. – Вип. 13. – С. 78 – 116.
6. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.
7. *Абдуллаев А. Р., Бурмистрова А. Б.* Топологические нетеровы операторы: обобщенная обратимость и аддитивное представление // Известия вузов. – 1994. – № 6. – С. 3 – 7.
8. *Самойленко А. М., Бойчук А. А., Журавлев В. Ф.* Линейные краевые задачи для нормально разрешимых операторных уравнений в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. – 2014. – **50**, № 3. – С. 317 – 326.
9. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
10. *Журавлев В. Ф.* Построение обобщенно обратного оператора к матричному в банаховом пространстве. // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. математика і інформатика. – 2010. – Вип. 21. – С. 61 – 71.
11. *Журавльов В. П.* Узагальнене обернення операторів Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах. // Нелінійні коливання. – 2014. – **17**, № 3. – С. 351 – 364.
12. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 495 с.
13. *Бойчук О. А., Панасенко Є. В.* Крайові задачі для диференціальних рівнянь у банаховому просторі. // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 1. – С. 16 – 19.