УДК 517.988

©2015 р. М.І. Копач[1], Б.А. Шувар[2], Н.О. Шувар[3]

[1]ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника", [2]Національний університет "Львівська політехніка", [3] Київський національний університет імені Тараса Шевченка.

БАГАТОПАРАМЕТРИЧНІ АНАЛОГИ МЕТОДІВ ІТЕРАТИВНОГО АГРЕГУВАННЯ

Встановлені достатні умови збіжності одного класу багатопараметричних агрегаційно-ітеративних методів. В умовах теорем відсутні вимоги про додатність операторів і агрегуючих функціоналів, а також, щоб відповідні лінійні неперервні оператори були операторами стиску.

Sufficient conditions for the convergence of a class of multiparametric iterative-aggregation methods. Under the theorems assumptions there is no requirement on positive operators and aggregate functional, and on the corresponding linear continuous operators to be operators of compression.

Вступ Декомпозиція операторних рівнянь на основі методів ітеративного агрегування у багатьох прикладних задачах виявляється ефективним засобом для розв'язання лінійних систем великої розмірності (див. [1,2]). Це спричинює численні дослідження щодо цих методів і їх застосування (див. [3-7]). Використання започаткованої в [8-10] методики дозволяє отримувати нові результати з теорії таких методів та їх узагальнень за припущень, що відповідні оператори не підпорядковані постульованим у переважній більшості досліджень іншими авторами вимогам про знакосталість оператора A та про нерівність $\rho(A) < 1$ для його спектрального радіуса у рівнянні

$$x = Ax + b \qquad (1)$$

1. Допоміжні побудови і допоміжні твердження Будемо розглядати рівняння (3), вважаючи, що $A : E \to E$ є лінійним неперервним оператором, E – банахів простір, $b \in E$. Припускаємо, що рівняння (3) можна подати у вигляді:

$$x = \sum_{j=1}^{N} A_j x + b \quad (N < \infty) \qquad (2)$$

з лінійними неперервними операторами $A_j : E \to E \quad (j = \overline{1,N})$.

Задамо такі лінійні неперервні оператори $\widetilde{A_j} : E \to E \quad (j = \overline{1,N})$, для яких справджуються співвідношення:

$$(\varphi_i, (A_j + \widetilde{A_j})x) = \lambda_{i,j}(\varphi_j, x) \quad (i, j = \overline{1,N}), \qquad (3)$$

де (φ_j, x) є значеннями лінійного функціоналу φ_i на елементах $x \in E$. Матриця $\Lambda = \{\lambda_{i,j}\}$ є такою, що існує обернена матриця $(I' - \Lambda)^{-1}$ (I'– одинична матриця в евклідовому просторі E' розмірності N). До рівняння (4) приєднаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду:

$$y_i = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{i,j} y_i + \sum_{j=1}^{N} (\varphi_i, \widetilde{A_j} x) - (\varphi_j, b) \quad (i = \overline{1,N}) \qquad (4)$$

з допоміжними невідомими дійсними числами y_i.

Означимо множину Ξ як сукупність таких $x \in E$, $y = \{y_1, \ldots, y_N\} \in E'$, які задовольняють рівність:

$$(\varphi_i, x) + y_i = 0 \quad (i = \overline{1,N}) \qquad (5)$$

Множина Ξ є підпростором простору $\widetilde{E} = E \times E'$.

Надалі використовуватимемо такі два твердження, які є аналогами відповідних лем із [8–10].

Лема 1. *Нехай:*

1) існує обернена матриця $(I' - \Lambda)^{-1}$*;*

2) справджується умова (5);

3) пара $\{x^*, y^*\}$ $(x^* \in E, y^* \in E')$ *є розв'язком системи (4), (5).*

Тоді $\{x^*, y^*\} \in \Xi$.

Доведення. Враховуючи (5), отримаємо

$$(\varphi_i, x^*) + y_i^* = \sum_{j=1}^{N} (\varphi_i, A_j x) + (\varphi_i, b) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j^* +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} (\varphi_i, \widetilde{A_j} x^*) - (\varphi_j, b) = \sum_{j=1}^{N} (\varphi_i, (A_j + \widetilde{A_j}) x^*) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j^* = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} (\varphi_j, x^*) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j^* =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} [(\varphi_j, x^*) + y_j^*].$$

Завдяки невиродженості матриці $I' - \Lambda$ звідси випливає висновок, що рівності (5) мають місце. Це і доводить потрібне твердження. □

Розглянемо систему рівнянь

$$x = \sum_{j=1}^{N} A_j z + \sum_{j=1}^{N} a_j(z)(w_j - y_j) + b, \qquad (6)$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j + \sum_{j=1}^{N} (\varphi_j, \widetilde{A_j} z) - (\varphi_i, b) \quad (i = \overline{1, N}), \qquad (7)$$

де $z \in E$, $w \in E'$, а $a(x)$ є неперервною при $x \in E$ функцією, для якої виконується умова

$$(\varphi_i, a_j(x)) = \lambda_{ij} \quad (i = \overline{1, N}) \qquad (8)$$

при $x \in E$.

Лема 2. *Нехай:*

1) існує матриця $(I' - \Lambda)^{-1}$*;*

2) справджуються умови (5) та (8);

3) $(z, w) \in \Xi$.

Тоді $\{x, y\} \in \Xi$.

Доведення. З (6), (7) та з умов (5), (8) випливають співвідношення:

$$(\varphi_i, x) + y_i = \sum_{j=1}^{N} (\varphi_i, A_j z) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} (\varphi_i, a_j(z)) w_j - \sum_{j=1}^{N} (\varphi_i, a_j(z)) y_i +$$

$$+ (\varphi_i, b) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j + \sum_{j=1}^{N} (\varphi_j, \widetilde{A_j} z) -$$

$$- (\varphi_j, b) = \sum_{j=1}^{N} (\varphi_i, (A_j + \widetilde{A_j}) z) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} w_j = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} [(\varphi_i, z) +$$

$$+ w_j] \quad (i = \overline{1, N}).$$

Це дозволяє скористатися з умови 1) і вважати лему доведеною. □

2. Побудова алгоритму. Побудуємо ітераційний процес за допомогою формул:

$$x^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{N} A_j x^{(n)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} a_j(x^{(n)})(y_j^{(n)} - y_j^{(n+1)}) + b, \qquad (9)$$

$$y_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j^{(n+1)} + \sum_{j=1}^{N} (\varphi_i, \widetilde{A_j} x^{(n)}) -$$

$$- (\varphi_i, b) \quad (i = \overline{1, N}, n = 0, 1, \ldots). \qquad (10)$$

Лема 3. *Нехай справджуються умови леми 2 при* $z = x^{(0)}$, $y = y^{(0)}$. *Тоді* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \Xi$ *при* $n = 0, 1, \ldots$.

Доведення. Твердження леми отримується як наслідок з принципу індукції і леми 2. □

3. Збіжність ітерацій Позначимо $a(x)y = \sum\limits_{j=1}^{N} a_j(x)y_j =$

$$= \{a_1(x), \ldots, a_N(x)\}\{y_1, \ldots, y_n\}^T$$

(де T– символ транспонування) і подамо рівності (9),(10) відповідно у вигляді

$$x^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{N} A_j x^{(n)} + a(x^{(n)})(y^{(n)} - y^{(n+1)}) + b, \tag{11}$$

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} + \Phi \widetilde{A} x^{(n)} - \Phi b, \tag{12}$$

$$y = \Lambda Y + \Phi \widetilde{A} x - \Phi b, \tag{13}$$

де $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}^T$, $\varphi_i = \{\varphi_{i1}, \ldots, \varphi_{iN}\}$.

З (13) при $x = x^*, y = y^*$ та з (12) випливає, що

$$y^{(n+1)} - y^* = (I' - \Lambda)^{-1} \Phi \widetilde{A}(x^{(n)} - x^*), \tag{14}$$

а з (4), (11) отримуємо

$$x^{(n+1)} - x^* = \sum_{j=1}^{N} A_j(x^{(n)} - x^*) + a(x^{(n)})(y^{(n)} -$$

$$-y^*) - a(x^{(n)})(y^{(n+1)} - y^*). \tag{15}$$

З рівностей (14), (15), застосовуючи леми 1 і 2, можна одержати

$$x^{(n+1)} - x^* = \sum_{j=1}^{N} A_j(x^{(n)} - x^*) -$$

$$-a(x^{(n)})\Phi(x^{(n)} - x^*) -$$

$$-a(x^{(n)})(I' - \Lambda)^{-1}\Phi \widetilde{A}(x^{(n)} - x^*).$$

Звідси матимемо

$$x^{(n+1)} - x^* = A(x^{(n)} - x^*) -$$

$$-a(x^{(n)})(I' - \Lambda)^{-1}\Phi(I - A)(x^{(n)} - x^*), \tag{16}$$

де I – тотожний оператор в E.

Теорема 1. *Нехай:*

1) існує матриця $(I' - \Lambda)^{-1}$;

2) виконуються умови (4) та (8);

3) $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \Xi$;

4) оператор $H(x)w$, означений за формулою

$$H(x)w = Aw - a(x)(I' - \Lambda)^{-1}\Phi(I - \Lambda)w, \tag{17}$$

задовольняє умову

$$||H(x)|| \leq Q, \tag{18}$$

в області $D \subseteq \Xi$ при таких $\{x, y\} \in \Xi$, $w = x - x^{(0)}$, для яких маємо

$$Q < 1. \tag{19}$$

Тоді для послідовності $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$, побудованої за допомогою формул (9), (10) виконується $(x^{(n)}, y^{(n)}) \in \Xi$ і вона збігається до розв'язку (x^*, y^*) системи рівнянь (4), (13) не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником $Q < 1$.

Доведення. Твердження теореми випливає з лем 1 і 2 та з формул (16) – (19), маючи на увазі, що рівності (5) можна подати наступним чином

$$\Phi(A + \widetilde{A}) = \Lambda \Phi,$$

звідки отримуємо

$$(I' - \Lambda)\Phi + \Phi\widetilde{A} = \Phi - \Lambda\Phi + \Phi\widetilde{A} =$$

$$= \Phi - \Phi A - \Phi \widetilde{A} + \Phi \widetilde{A} = \Phi(I - A).\square$$

Приклад 1. В однопараметричному випадку $N = 1$ матимемо $\Lambda = \lambda \neq 1$ і рівності (5) та (5) можна подати у вигляді

$$(\varphi, (A + \widetilde{A})x) = \lambda(\varphi, x) \quad (x \in E),$$

$$a(x) = \frac{(A + \widetilde{A})x}{(\varphi, x)}, \quad (\varphi, a(x)) = \lambda \quad x \in E.$$

Ітераційні формули (9), (10) матимуть вигляд

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + a(x^{(n)})(y^{(n)} - y^{(n+1)}) + b,$$

$$y^{(n+1)} = \lambda y^{(n+1)} + (\varphi, \widetilde{A}x^{(n)}) - (\varphi, b).$$

Для оператора $H(x)w$, означеного за формулою (17) матимемо:

$$H(x)w = Aw - a(x)(1-\lambda)^{-1}(\varphi, (I - \lambda I)w).$$

Приклад 2. Застосуємо однопараметричний алгоритм до системи

$$x_1 = 2,9x_1 + 11,8x_2 - 156,$$
$$x_2 = 1,9x_1 + 7,9x_2 - 107,$$

яка має розв'язок $x^* = \{20; 10\}$. Маючи на увазі, що $A = \begin{pmatrix} 2,9 & 11,8 \\ 1,9 & 7,9 \end{pmatrix}$ виберемо матрицю $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$.

Для матриці $A + \widetilde{A}$ матимемо $\lambda = 11$, $\varphi = \{1; 4\}$.

Взявши $x^{(0)} = \{1; 1\}$, обчислимо $y^{(0)} = (\varphi, x^{(0)}) = -5$, $y^{(1)} = -58,51$.

Перші дві ітерації дають нам

$$x^{(1)} = \{19,23; 9,82\},$$

$$x^{(2)} = \{19,9651; 9,9964\}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Цурков В.И.* Декомпозиция в задачах большой размерности. // М.: Наука – 1981. – 351 с.

2. *Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В.* Позитивные линейные системи. // М.: Наука – 1985. – 256 с.

3. *Marec I., Mayer P., Pubtarova I.* Conference issue on the theory and practice of iterative aggregation/ disaggregation metogs.// Economic Transactions of Numerical Analisis – 2009. - N35. – P. 185-200.

4. *Marec I., Mayer P.* Aggregation/ disaggregation iterative metogs applied to Leont'ev systems and Marcov chains. // Appl. of Math – 2002. - **47**, N2. – P. 139-156.

5. *He G., Fend H., Li C., Chen H.* Parallel Sim Rang Computation on Large Graphs with iterative Aggregation. // IDD'10 (Washington, DC, USA, Juli 25–28). – Washington – 2010. – P. 543-552.

6. *Стеценко В.Я.* Исследование сходимости метода многопараметрического итеративного агрегирования при решение линейных алгебраических систем и интегральных уравнений. // Теория и практика использования методов агрегирования в планировании и управлении. Материалы совещания. Киев. – 1984. – с.74–81.

7. *Грабова Т.А., Стеценко В.Я.* Методы итеративного агрегирования для приближенного решения линейных и нелинейных алгебраических систем и интегральных уравнений. // Ставрополь. – 2003. – 87 с.

8. *Шувар Б.А.* О сходимости многопараметрических вариантов метода итеративного агрегирования. // Весник Львовского политехнического института, Львов – 1989. – Т.232. – с. 140–142.

9. *Шувар Б., Обшта А., Копач М.* Декомпозиція лінійних операторних рівнянь за допомогою методів ітеративного агрегування. // Математичний вісник НТШ. – 2012. – Т.9. – с. 387–398.

10. *Шувар Б.А., Копач М.І., Ментинський С.М., Обшта А.Ф.* Двосторонні наближені методи. // Івано-Франківськ: ВДВ ЦІТ. – 2007. – 515 с.