УДК 517.51

©2015 р. В.В. Нестеренко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ОСЛАБЛЕНА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ОБЕРНЕНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ

Знайдено умови, за яких обернене відображення є квазінеперервним чи псевдоквазінеперервним. Встановлено, що властивості типу Дарбу у прямого відображення $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ зберігаються і для оберненого.

We find conditions under which the inverse mapping is quasicontinuous or psudoquasicontinuous. It was established that properties of Darboux type of a mapping $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are preserved for the inverse mapping.

1. Вступ. Добре відомо, що для неперервної бієкції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, обернена функція f^{-1} також є неперервною. З теореми Брауера про нерухому точку випливає, що і у неперервної бієкції $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ функція f^{-1} автоматично неперервна. Те ж саме твердить класична теорема Банаха про обернений оператор для лінійної неперервної бієкції банахових просторів.

Звичайно, не всі властивості прямого відображення автоматично переносяться на обернене. Так, З. Ґранде і Т. Натканєц в [1] навели приклад квазінеперервної бієкції $f : [0, 1] \to [0, 1]$, для якої обернене відображення f^{-1} не має властивості Бера, а отже, не є кліковим і тим більше не є квазінеперервним. Разом з тим в [1] доведено, що для квазінеперервності відображення f^{-1}, оберненого до квазінеперервного відображення f, достатньо, щоб відображення f^{-1} було ледь неперервним. Крім того, в [1] було встановлено умови для бієкції $f : X \to Y$, за яких функції f і f^{-1} є кліковими.

В цій роботі буде розглянуто деякі ослаблення неперервності на предмет наявності у оберненого відображення властивостей прямого відображення. Деякі результати цієї статті були анонсовані в [2].

2. Основні поняття. Нехай X і Y – топологічні простори. Відображення $f : X \to Y$:

- *квазінеперервне у точці* $x \in X$ [3,4], якщо для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y і для кожного околу U точки x в X існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$;
- *псевдоквазінеперевне* [5], якщо для довільної відкритої непорожньої множини U в X та довільної множини E в X, такої, що $U \subseteq \overline{E}$ існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq \overline{f(E)}$;
- *ледь неперервне у точці* $x \in X$ [6], якщо $int f^{-1}(V) \neq \varnothing$ для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y;
- *майже неперервне у точці* $x \in X$ [7], якщо для будь-якого околу V точки $y = f(x)$ в Y існує множина A в X, така, що $x \in int\overline{A}$ і $f(A) \subseteq V$;
- *майже квазінеперервне у точці* $x \in X$ [8], якщо для будь-яких околів V і U точок $y = f(x)$ і x відповідно в Y та X існує множина A в X, така, що $int\overline{A} \neq \varnothing$, $A \subseteq U$ і $f(A) \subseteq V$;
- *майже ледь неперервне у точці* $x \in X$ [9], якщо $int\overline{f^{-1}(V)} \neq \varnothing$ для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y;
- *має слабку властивість Дарбу* [10], якщо образ $f(G)$ кожної області G з X є зв'язною множиною.

Відображення f є *квазінеперервним, ледь неперервним, майже неперервним, майже квазінеперервним* чи *майже ледь неперервним*, якщо воно є таким в кожній точці. Для топологічного простору X функція $f : X \to \mathbb{R}$ є *перехідною зверху /знизу/ у точці* $x \in X$ [11], якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існують окіл U точки x в X і точка $y \in (f(x), f(x)+\varepsilon)$ $\quad /y \in (f(x)-\varepsilon, f(x))/$, такі, що $U \cap f^{-1}(y) = \varnothing$. Якщо функція перехідна зверху і знизу у точці x, то вона називається *перехідною у точці* x. Функція називається *перехідною /зверху, знизу/*, якщо вона є такою в кожній точці x з X.

В [10] поняття перехідності було перенесено на випадок довільних топологічних просторів. Відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X та Y називається *перехідним у точці* $x \in X$, якщо для кожного околу V точки $f(x)$ в Y існують окіл U точки x в X і відкритий окіл W точки $f(x)$ в Y, такі, що $W \subseteq V$ і $U \cap f^{-1}(frW) = \varnothing$, і просто *перехідним*, якщо воно є таким в кожній точці.

3. Квазінеперервність оберненого відображення. Наступний приклад будується з допомогою модифікації конструкції з [1].

Твердження 1. *Існує квазінеперервна бієкція* $f : [0,1] \to [0,1]$*, для якої функція* f^{-1} *не є майже ледь неперервною.*

Доведення. Нехай α – ірраціональне число з відрізка $[0,1]$ і $\mathbb{Q} \cap [0,\alpha] = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ – множина раціональних чисел відрізка $[0,\alpha]$. Для кожного номера $n \in \mathbb{N}$ розглянемо неперервну справа функцію $g_n : [0,\alpha] \to [0,1]$, для якої $g_n(x) = 0$ для $x < r_n$ і $g_n(x) = 1$ для $x \geq r_n$. Покладемо $f_0(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g_n(x)$. Оскільки рівномірно збіжний ряд з неперервних справа функцій є неперервною справа функцією, то функція f_0 неперервна справа на $[0,\alpha]$, а отже, квазінеперервна на $[0,\alpha)$. Функція f_0 неперервна в усіх ірраціональних точках відрізка $[0,\alpha]$ і розривна в усіх раціональних точках цього відрізка. Тому f_0 неперервна зліва в точці α, а отже, f_0 квазінеперервна на $[0,\alpha]$. Зауважимо, що функцію f_0 можна записати ще так: $f_0(x) = \sum\limits_{r_n \leq x} \frac{1}{2^n}$. Також зазначимо, що функція f_0 строго монотонно зростає на $[0,\alpha]$.

Легко переконатися, що для множини $B = f_0([0,\alpha])$ і чисел $b_n = f_0(r_n) = \sum\limits_{r_m \leq r_n} \frac{1}{2^m}$, $a_n = f_0(r_n) - \frac{1}{2^n} = \sum\limits_{r_m < r_n} \frac{1}{2^m}$ маємо, що

$$[0,1] \setminus B = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n).$$

Нехай (α_n) – строго спадна послідовність чисел, така, що $\alpha_1 = 1$ і $\alpha_n \to \alpha$. Покладемо

$$V_n = [a_n, b_n)$$

і

$$U_n = (\alpha_{n+1}, \alpha_n]$$

для $n \in \mathbb{N}$. Зрозуміло, що

$$[0,1] = [0,\alpha] \sqcup (\bigsqcup_{n=1}^{\infty} U_n)$$

і

$$[0,1] = B \sqcup (\bigsqcup_{n=1}^{\infty} V_n).$$

Для кожного номера n позначимо через f_n гомеоморфізм U_n на V_n.

Множина B ніде не щільна в $[0,1]$. Справді, візьмемо довільну відкриту непорожню множину V в $[0,1]$. Нехай $B \cap V \neq \varnothing$. Тоді існує точка $x_0 \in [0,\alpha]$, така, що $f_0(x_0) \in V$. Покажемо, що існує таке раціональне число $r = r_n$, що $f_0(r_n) \in V$. Якщо $x_0 < \alpha$, то з неперервності справа функції f_0 в точці x_0 випливає, що існує таке $\delta > 0$, що $x_0 + \delta < \alpha$ і $f_0(x) \in V$, як тільки $x_0 < x < x_0 + \delta$. Оскільки в інтервалі $(x_0, x_0+\delta)$ є раціональне число r, то воно і буде шуканим. Якщо $x_0 = \alpha$, то з неперервності зліва функції f_0 в точці α аналогічно знаходиться раціональне число r_n, що $f_0(r_n) \in V$. Тоді

$$V_n \cap B = \varnothing.$$

Зауважимо, що $b_n = f_0(r_n) \in V$. Тому відкрита в $[0,1]$ множина

$$H = (a_n, b_n) \cap V$$

непорожня. Крім того, $H \cap B = \varnothing$ і $H \subseteq V$. Це означає, що множина B ніде не щільна в $[0,1]$.

Визначимо функцію $f : [0,1] \to [0,1]$ так:

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x), & x \in [0,\alpha], \\ f_n(x), & x \in U_n. \end{cases}$$

Легко переконатися, що функція f є бієкцією відрізка $[0,1]$ на себе. Оскільки функція f неперервна на кожному з проміжків U_n, то вона квазінеперервна на $(\alpha,1]$. Також функція f квазінеперервна на $[0,\alpha]$, бо функція f_0 квазінеперервна на $[0,\alpha]$. Оскільки множина B ніде не щільна в $[0,1]$, то і $f([0,\alpha])$ ніде не щільна в $[0,1]$. Тому функція f^{-1} не є майже ледь неперервною. □

Твердження 2. *Нехай X і Y – топологічні простори, $f : X \to Y$ – квазінеперервна бієкція і f^{-1} – майже ледь неперервне відображення. Тоді f^{-1} – майже квазінеперервне відображення.*

Доведення. Візьмемо довільну точку $y_0 \in Y$. Покажемо, що відображення $g = f^{-1} : Y \to X$ майже квазінеперервне у точці y_0. Візьмемо довільні околи U та V точок $x_0 = g(y_0)$ та y_0 відповідно у просторах X та Y. Оскільки відображення f квазінеперервне у точці x_0, то існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$. З майже ледь неперервності відображення g випливає, що в Y існує множина B, така, що $int\overline{B} \neq \varnothing$ і $g(B) \subseteq G$. Множина B міститься у V, бо $B = f(g(B)) \subseteq f(G)$ і $f(G) \subseteq V$. Це означає, що відображення $g = f^{-1}$ майже квазінеперервне у точці y_0. □

Твердження 3. *Нехай X і Y – топологічні простори, $f : X \to Y$ – майже квазінеперервна бієкція, f і f^{-1} – ледь неперервні відображення. Тоді f^{-1} – квазінеперервне відображення.*

Доведення. Візьмемо довільну точку $y_0 \in Y$. Покажемо, що відображення $g = f^{-1} : Y \to X$ квазінеперервне у точці y_0. Розглянемо окіл U точки $x_0 = g(y_0)$ в X і відкритий окіл V точки y_0 в Y. Оскільки f майже квазінеперервне у точці x_0, то в X існує множина A, така, що $U_1 = int\overline{A} \neq \varnothing$, $A \subseteq U$ і $f(A) \subseteq V$. З ледь неперервності відображення g випливає, що існує відкрита непорожня множина V_1 в Y, така, що $g(V_1) \subseteq U_1$.

Розглянемо відкриту множину $V_2 = V \cap V_1$. Для доведення квазінеперервності g у точці y_0 досить показати, що $V_2 \neq \varnothing$ і $g(V_2) \subseteq U$. Оскільки $V_2 \subseteq V_1$ і $g(V_1) \subseteq U_1$, то

$$g(V_2) \subseteq g(V_1) \subseteq U_1 \subseteq U.$$

З ледь неперервності відображення f випливає, що існує відкрита непорожня множина U_2 в X, така, що $f(U_2) \subseteq V_1$, тобто $U_2 \subseteq g(V_1)$. Отже, $U_2 \subseteq U_1$. З означення множини U_1 випливає, що $U_2 \cap A \neq \varnothing$. Оскільки $f(U_2) \subseteq V_1$ і $f(A) \subseteq V$, то $V_2 = V \cap V_1 \neq \varnothing$. □

4. Псевдоквазінеперервність бієкції. В [1] було встановлено, що для бієкції $f : X \to Y$ між метричними просторами X та Y з умови, що f і f^{-1} – ледь неперервні функції, випливає, що f і f^{-1} – клікові. Наступне твердження є модифікацією цього результату.

Твердження 4. *Нехай X і Y – топологічні простори, $f : X \to Y$ – бієкція, f і f^{-1} – ледь неперервні відображення. Тоді відображення f і f^{-1} псевдоквазінеперервні.*

Доведення. Покажемо, що відобра- ження f псевдоквазінеперервне. Припустимо, що це не так. Тоді існують відкрита непорожня множина U в X та щільні в U множини A_1 і A_2, такі, що

$$f(A_2) \subseteq Y \setminus \overline{f(A_1)}.$$

Оскільки відображення f^{-1} ледь неперервне, то $V = intf(U) \neq \varnothing$. Можливі два випадки: або $(Y \setminus \overline{f(A_1)}) \cap V \neq \varnothing$, або $V \subseteq \overline{f(A_1)}$.

Припустимо спочатку, що $V \subseteq \overline{f(A_1)}$. Оскільки відображення f ледь неперервне, то

$$G = intf^{-1}(V) \neq \varnothing.$$

Крім того, $G \subseteq U$. Оскільки $\overline{A_2} \supseteq U$, то $\overline{A_2} \supseteq G$. Візьмемо довільну точку $a \in A_2 \cap G$. Тоді з одного боку

$$f(a) \in f(A_2) \subseteq Y \setminus \overline{f(A_1)},$$

а з іншого боку

$$f(a) \subseteq f(G) \subseteq V \subseteq \overline{f(A_1)}.$$

Нехай тепер

$$V_1 = (Y \setminus \overline{f(A_1)}) \cap V \neq \varnothing.$$

Оскільки відображення f ледь неперервне і сюр'єктивне, то $G = int f^{-1}(V_1) \neq \varnothing$. Крім того, $G \subseteq U$. Оскільки $\overline{A_1} \supseteq U$, то $\overline{A_1} \supseteq G$. Візьмемо довільну точку $a \in A_1 \cap G$. Тоді з одного боку $f(a) \in f(A_1)$, а з іншого боку

$$f(a) \subseteq f(G) \subseteq V_1 \subseteq Y \setminus \overline{f(A_1)}$$

і тому $f(a) \notin f(A_1)$. Одержали суперечність. Знову одержали суперечність. □

5. Майже неперервність оберненого відображення.

Лема 1. *Нехай X та Y – топлологічні простори, A та B – всюди щільні диз'юнктні підмножини в X і $f, g : X \to Y$ – неперервні відображення. Тоді відображення $h : X \to Y$, для якого $h(x) = f(x)$ для $x \in A$ і $h(x) = g(x)$ для $x \in B$, є майже неперервне.*

Доведення. Розглянемо довільну точку $x \in X$. Нехай $x \in A$ і V – окіл точки x в X. Оскільки $h(x) = f(x)$ і відображення f неперервне у точці x, то існує окіл U точки x в X, такий, що $f(U) \subseteq V$. З всюди щільності множини A випливає, що $x \in int\overline{A \cap U}$. Крім того,

$$h(A \cap U) = f(A \cap U) \subseteq V.$$

Отже, відображення h майже неперервне у точці x. Те саме буде і у випадку, коли $x \in B$. □

Твердження 5. *Існує бієктивна функція $f : [0, 1] \to [0, 1]$, яке майже неперервна, але f^{-1} не є майже неперевною.*

Доведення. Розглянемо функцію $f : [0, 1] \to [0, 1]$, яка визначена так:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{1}{2}], \\ x + \frac{1}{2}, & x \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}, \\ -x + 1, & x \in (\frac{1}{2}, 1] \setminus \mathbb{Q}, \\ -x + \frac{3}{2}, & x \in \mathbb{Q} \cap (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Перевіримо майже неперервність функції f. З леми 1 випливає, що функція f майже неперервна на проміжках $[0, \frac{1}{2}]$ та $(\frac{1}{2}, 1]$. Залишилось перевірити майже неперервність функції f у точці $x = \frac{1}{2}$. Зауважимо, що $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Для $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ розглянемо довільний окіл $V = (\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon)$ точки $\frac{1}{2}$ в $[0, 1]$ і множину

$$A = V \cap ((\mathbb{Q} \cap [0, \tfrac{1}{2}]) \cup ((\tfrac{1}{2}, 1] \setminus \mathbb{Q})) =$$

$$= ((\mathbb{Q} \cap (\tfrac{1}{2} - \varepsilon, \tfrac{1}{2}]) \cup ((\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} + \varepsilon] \setminus \mathbb{Q})).$$

Легко переконатися, що $V = int\overline{A}$ і

$$f(A) = (\tfrac{1}{2} - \varepsilon, \tfrac{1}{2}] \subseteq V.$$

Це означає, що функція f майже неперервна і у точці $x = \frac{1}{2}$.

Тепер покажемо, що функція $g = f^{-1} : [0, 1] \to [0, 1]$ не є майже неперервною у точці $y = \frac{1}{2}$. Справді, $g(y) = \frac{1}{2}$ і для околу $U = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ точки $g(y)$ маємо, що

$$g^{-1}(U) = f(U) = (\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}]$$

і множина

$$int\overline{g^{-1}(U)} = (\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2})$$

не є околом точки $y = \frac{1}{2}$ в $[0, 1]$. □

6. Перехідність біекції.

Твердження 6. *Нехай X – топологічний простір, який задовольняє аксіому T_1 і $f : X \to \mathbb{R}$ – біекція. Тоді f – перехідна функція.*

Доведення. Розглянемо довільну точку $x_0 \in X$ і $\varepsilon > 0$. Візьмемо довільну точку $y \in (f(x), f(x) + \varepsilon)$. Оскільки функція f є сюр'єктивною, то існує точка $x \in X$, така, що $f(x) = y$. З аксіоми T_1 простору X випливає, що існує окіл U точки x_0 в X, такий, що $x \notin U$. Тоді $U \cap f^{-1}(y) = \varnothing$, бо функція f є ін'єктивною. Це означає перехідність зверху функції f у точці x_0. Аналогічно встановлюється перехідність знизу. Таким чином, функція f перехідна у точці x_0, а оскільки точка x_0 була довільною з X, то функція f перехідна. □

Умова того, що функція f в твердженні 6 набуває значення в $\mathbb{R}$, є істотною. Це показує наступне твердження.

Твердження 7. *Існує біекція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, яка не є перехідною.*

Доведення. Розглянемо довільну бієкцію $\alpha : (0,1) \cup (1,+\infty) \to \mathbb{R}$. Для кожного числа $r \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ через g_r позначимо бієкцію кола

$$K_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$$

на частину

$$L_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :, x \neq 0\}$$

прямої $y = \alpha(r)x$, а через g_1 позначимо бієкцію кола

$$K_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

на частину

$$L_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \neq 0\}$$

прямої $x = 0$.

Тепер визначимо функцію $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ так:

$$f(x,y) = \begin{cases} (0,0), & (x,y) = (0,0), \\ g_r(x,y), & (x,y) \in K_r. \end{cases}$$

Очевидно, що так задане відображення f є бієкцією площини $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}^2$. Покажемо, що воно не є перехідним у точці $(0,0)$.

Нехай V – обмежений окіл точки $(0,0)$ в $\mathbb{R}^2$. Розглянемо довільний відкритий окіл W точки $(0,0)$, такий, що $W \subseteq V$ і довільний окіл U точки $(0,0)$ в $\mathbb{R}^2$. Тоді існує таке число $r \in (0,+\infty)$, що $K_r \subseteq U$. Оскільки W – відкритий обмежений окіл точки $(0,0)$ в $\mathbb{R}^2$, то. Тому

$$U \cap f^{-1}(frW) \supseteq K_r \cap f^{-1}(frW) \neq \varnothing,$$

адже $f(K_r) = L_r$ і $L_r \cap frW \neq \varnothing$. Отже, відображення f не перехідне у точці $(0,0)$. □

7. Властивості типу Дарбу.

Нам будуть потрібні наступні теореми, які встановлені в [10, теорема 16] і [12, теорема 2] відповідно.

Теорема 1. *Нехай X – локально зв'язний простір, Y – топологічний простір, відображення $f : X \to Y$ має слабку властивість Дарбу і є перехідним. Тоді f – неперервне відображення.*

Теорема 2. *Лінійне відображення $f : X \to Y$, що діє в довільних ТВП, буде неперервним тоді і тільки тоді, коли воно перехідне.*

Твердження 8. *Нехай X – локально зв'язний простір, який задовольняє аксіому T_1 і $f : X \to \mathbb{R}$ – бієкція, яка має слабку властивість Дарбу. Тоді f – неперервне відображення.*

Доведення. З твердження 6 випливає, що функція f перехідна, а тому згідно з теоремою 1 вона неперервна. □

Зауважимо (див. огляд [13]), що для функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з S-неперервності, зв'язності, властивості зв'язного графіка чи властивості Дарбу випливає слабка властивість Дарбу. Функції, які є S-неперервними, зв'язними, мають властивість зв'язного графіка, мають властивість Дарбу чи мають слабку властивість Дарбу будемо тут коротко називати *функціями типу Дарбу.*

Твердження 9. *Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – бієкція, яка є функцією типу Дарбу. Тоді f^{-1} теж є функцією типу Дарбу.*

Доведення. З твердження 8 випливає, що функція f неперервна, а тому обернена функція f^{-1} теж неперервна, а отже, є функцією типу Дарбу. □

Твердження 10. *Нехай X – топологічний векторний простір, який задовольняє аксіому T_1 і $f : X \to \mathbb{R}$ – лінійна бієкція. Тоді f – неперервне відображення.*

Доведення. З твердження 6 випливає, що функція f перехідна, а тому згідно з теоремою 2 вона неперервна. □

Зауважимо, що твердження 10 випливає і з теореми Тихонова про єдиність лінійної гаусдорфової топології на скінченновимірному векторному просторі [14, с. 16].

На завершення покажемо, що відомий результат про неперервність монотонної бієкції є частинним випадком твердження 8.

Твердження 11. *Нехай $f : X \to \mathbb{R}$ – монотонна бієкція, де X і $f(X)$ – проміжки числової прямої $\mathbb{R}$. Тоді f має властивість Дарбу.*

Доведення. Розглянемо довільний проміжок $\langle a,b\rangle \subseteq X$. Треба довести, що множина $f(\langle a,b\rangle)$ зв'язна, тобто є проміжком. Розглянемо довільні точки $y_1, y_2 \in f(\langle a,b\rangle)$. Нехай $y_1 < y_2$ і існують точки $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$, такі, що $f(x_1) = y_1$ і $f(x_2) = y_2$. Покажемо, що $[y_1, y_2] \subseteq f(\langle a,b\rangle)$. Візьмемо довільну точку $y \in (y_1, y_2)$. Оскільки множина $f(X)$ є проміжком і $y_1, y_2 \in f(X)$, то $[y_1, y_2] \subseteq f(X)$, а тому $y \in f(X)$. Нехай x – це така точка з X, що $f(x) = y$. Оскільки $y_1 < y < y_2$ і функція f монотонна, то точка x лежить між точками x_1 та x_2. Тому $x \in \langle a,b\rangle$ і $y = f(x) \in f(\langle a,b\rangle)$. Отже, множина $f(\langle a,b\rangle)$ зв'язна і це означає, що функція f має властивість Дарбу. $\square$

Твердження 12. *Нехай $f : X \to \mathbb{R}$ – монотонна бієкція, де X і $f(X)$ – проміжки числової прямої $\mathbb{R}$. Тоді f неперервна.*

Доведення. З твердження 11 випливає, що функція f має властивість Дарбу (отже, і слабку властивість Дарбу), а тому згідно з твердженням 8 вона неперервна. $\square$

Автор вдячний Маслюченку Володимиру Кириловичу за корисні зауваження та поради, які суттєво поліпшили оригінальну версію цієї статті.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Grande Z., Natkaniec T.* On quasi-continuous bijections // Acta Math. Univ. Comenianae. – 1991. – **60**, N1. – P. 31-34.

2. *Нестеренко В.В.* Квазінеперервність оберненого відображення // Диференціальні рівняння та їх застосування. Міжнародна конференція, 11 - 14 жовтня 2006 року / Тези доповідей. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 116.

3. *Kempisty S.* Sur les fonctions quasicontinues // Fundam. Math. – 1932. – **19**. – P. 184-197.

4. *Marcus S.* Sur les fonctions quasicontinues an sens de S. Kempisty // Colloq. Math. – 1961. – **8**. – P. 47-53.

5. *Нестеренко В.В.* Про псевдоквазінеперервність // Карпат. мат. публ. (у друці).

6. *Froltk Z.* Remarks concerning the invariance of Baire spaces under mappings // Czech. Math. J. – 1961. – **11**. – P. 381-385.

7. *Husain T.* Almost continuous mappings // Pr. Mat. – 1966. – **10**. – P. 1-7.

8. *Borsík J., Doboš J.* On decomposition of quasicontinuity // Real Anal. Exch. – 1990(91). – **16**. – P. 292-305.

9. *Маслюченко В.К.* Про нарізні та сукупні модифікації неперервності // Мат. Студії. – 2006. – **25**, N2. – С. 213-218.

10. *Маслюченко В.К., Нестеренко В.В.* Декомпозиція неперервності та перехідні відображення // Математичний вісник НТШ. – 2011. – **8**. – С. 132-150.

11. *Крецу В.І., Маслюченко В.К.* Неперервність за Стеллінгзом, нарізна неперервність та функції з замкненим графіком. – Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. праць. Вип. **349**. Математика. – Чернівці: Рута. – 2007. – С. 50-54.

12. *Маслюченко В.К., Нестеренко В.В.* Слабка властивість Дарбу і перехідність лінійних відображень у топологічних векторних просторах // Карпатські математичні публікації. – 2013. – **5**, N1. – С. 79–88.

13. *Gibson R.G., Natkaniec T.* Darboux like functions // Real Anal. Exch. – **22**, N2. – P. 492-533.

14. *Маслюченко В.К.* Лінійні неперервні оператори. Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2002. – 72 с.