УДК 517.5

©2015 р. О.М. Піддубний

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

# РЕГУЛЯРНО МОНОТОННІ МАЖОРАНТИ В ТЕОРЕМІ ГАРДІ-ЛІТТЛВУДА

В роботі одержано умови на мажоранту, за яких класична теорема Гарді-Літтлвуда для аналітичних в крузі функцій справедлива для похідних довільного фіксованого порядку. Одержані результати узагальнюють деякі результати С.А.Нольдера і Д.М.Оберліна

In this paper conditions on the majorant are obtained such that the classical Hardy–Littlewood theorem for analytic functions on the disk is valid for derivatives of an arbitrary fixed order. The obtained results generalize some results of S.A.Nolder and D.M.Oberlin.

Нехай $\mathbb{D}$ — одиничний круг комплексної площини $\mathbb{C}$.

Означення 1 ([1]). Зростаючу диференційовну функцію $\lambda$ :$[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\lambda(0)=0$, будемо називати мажорантою, якщо $\lambda'(t)$ спадає.

Означення 2 ([1]). Нехай $\lambda$(t) — мажоранта. Будемо говорити, що функція $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ належить класові $\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D})$, якщо існує скінченна константа $M$ така, що

$$|f(z_1)-f(z_2)|\le M\lambda(|z_1-z_2|)$$

для всіх $z_1,z_2\in\mathbb{D}$.

Позначимо через $\|f\|_\lambda$ інфімум всіх таких $M$. Відмітимо, що, коли $\lambda(t)=t^\alpha$, $0<\alpha\le1$, то клас $\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D})$ є відомим класом Ліпшиця. Інші означення мажорант наведено в [2-4].

В прийнятих позначеннях класична теорема Гарді–Літтлвуда стверджує, що коли $f$ аналітична в $\mathbb{D}$, $\lambda(t)=t^\alpha$, $0<\alpha\le1$, і $f\in\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D})$, то існує така константа $A$ , що

$$|f'(z)|\le A\lambda'(1-|z|) \qquad (1)$$

для всіх $z\in\mathbb{D}$; константа $A$ залежить тільки від $\alpha$ і $\|f\|_\lambda$ [5, с. 397].

В роботі [1] знайдемо таку характеристику мажорант, для якої має місце теорема Гарді–Літтлвуда.

**Теорема (C. Nolder, D.Oberlin)**. *Нехай $\lambda(t)$ — мажоранта. Тоді наступні твердження еквівалентні :*

*1) якщо $f$ аналітична в $\mathbb{D}$ і $f\in\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D})$, то існує константа $A$, яка залежить тільки від $\lambda$ і $\|f\|_\lambda$, така, що нерівність (1) справедлива для всіх $z\in\mathbb{D}$;*

*2)*

$$\lim_{t\to0+}\sup\frac{\lambda(t)}{t|\lambda'(t)|}<\infty.$$

Постає задача : за яких умов на мажоранту відповідний результат [1] буде справедливий для похідних вищих порядків функції $f$? Ми одержуємо відповідь на це питання введенням поняття регулярно монотонної мажоранти, яке є узагальненням поняття мажоранти.

Означення 3 ([6]). Дійсна функція називається регулярно монотонною на деякому проміжку, якщо на цьому проміжку вона та всі її похідні знакосталі.

Означення 4. Мажоранту $\lambda$(t) будемо називати регулярно монотонною в інтервалі $(0,\infty)$, якщо $\left|\lambda^{(k)}(t)\right|$ спадає при t>0 і k=1, 2, . . . .

**Теорема 1**. *Якщо функція f(z) аналітична в $\mathbb{D}$, а $\lambda(t)$ – регулярно монотонна мажоранта в інтервалі $(0,\infty)$ і $f\in\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D})$, то для того, щоб для всіх $z\in\mathbb{D}$ виконувалась нерівність*

$$\left|f^{(k)}(z)\right|\le A\left|\lambda^{(k)}(1-|z|)\right|, \qquad (2)$$

*де $A>0$ — константа, залежна тільки від $\lambda$ і $\|f\|_\lambda$, необхідно і достатньо, щоб*

$$\lim_{t\to0+}\sup\frac{\lambda(t)}{t^k|\lambda^{(k)}(t)|}<\infty,\quad k=1,\ 2,\ \ldots \qquad (3)$$

**Доведення**. Доведемо спочатку достатність. Якщо виконується співвідношення (3), то існують додатні константи $t_0$ і $C_0$, такі, що

$$\lambda\ (t)\ t^{-k} \le C_0 \left|\lambda^{(k)}\ (t)\right| \qquad (4)$$

для $t \in (0, t_0]$. Нерівність (4) справедлива й для всіх $t \in (0;1]$, якщо константу $C_0$ замінити на константу $C_1 = \max\{C_0,\ \lambda\ (t_0)\ t_0^{-k} \ \left|\ \lambda^{(k)}\,(1)\ \right|^{-1}\}$. Зафіксуємо $z \in \mathbb{D}$ і виберемо $0 < R < 1 - |z|$. Оскільки $f \in \mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D})$, то, використовуючи інтегральну формулу Коші й умову (4), маємо

$$\left|f^{(k)}\,(z)\right| = \left|\frac{k!}{2\,\pi\, i}\int\limits_{|z-\zeta|=R}\frac{f\,(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}d\zeta\right| =$$

$$= \left|\frac{k!}{2\,\pi\, i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f\left(z + Re^{i\theta}\right) - f\,(z)}{R^{k+1}e^{(k+1)\,i\theta}}Re^{i\theta}id\theta\right| \le$$

$$\le \frac{k!}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\left|f\left(z + Re^{i\theta}\right) - f\,(z)\right|}{R^k}d\theta \le$$

$$\le k!\ \|f\|_\lambda \lambda\,(R)\ R^{-k} \le C_1\, k!\,\|f\|_\lambda \left|\lambda^{(k)}\,(R)\right|.$$

Після переходу в останній нерівності до границі при $R \to 1 - |z|$ одержуємо (2).

Доведемо тепер необхідність, міркуючи методом від супротивного. Для цього припустимо, що співвідношення (3) не вірне і покажемо, що існує така аналітична функція $f \in \mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D})$, для якої не виконується (2). З метою спрощення викладу доведення проведемо для випадку $k = 2$.

Оскільки, за припущенням,

$$\limsup_{t\to 0+}\frac{\lambda\,(t)}{t^2|\lambda''\,(t)|} = +\infty,$$

то існує така монотонно спадна послідовність значень $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ аргументу $t \in (0,1]$, для якої

$$\frac{\lambda\,(t_j)}{t_j^2|\lambda''\,(t_j)|} \ge 2^{3j}, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots \qquad (5)$$

Визначимо аналітичну в $\mathbb{D}$ функцію $f(z)$, поклавши

$$f\,(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{n_j}, \qquad (6)$$

де $a_j = 2^{-j}\lambda\ (t_j)$, $n_\mathrm{j}$ — ціла частина додатного числа $t_\mathrm{j}^{-1}$.

Легко перевірити, що круг збіжності цього ряду одиничний.

Покажемо, що таким чином побудована функція $f$ належить до класу $\mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D})$. Оскільки справедлива оцінка

$$\left|z_1^l - z_2^l\right| =$$
$$= |z_1 - z_2| \cdot \left|z_1^{l-1} + z_1^{l-2}z_2 + \ldots + z_2^{l-1}\right| \le$$
$$\le l\,|z_1 - z_2|,$$

то

$$\left|z_1^l - z_2^l\right| \le \min\,\{2,\, l\,|z_1 - z_2|\} \qquad (7)$$

для $l = 1,\ 2, \ldots$ і довільних $z_1,\ z_2 \in \mathbb{D}$. Покладаючи $t = |z_1 - z_2|$ і використовуючи (7), одержуємо оцінку

$$\sup_{z_1,z_2\in\mathbb{D}}\frac{\left|z_1^l - z_2^l\right|}{\lambda\ (|z_1 - z_2|)} \le$$

$$\le \max\left\{\sup_{0<t<\frac{2}{l}}\frac{l\,t}{\lambda\ (t)},\ \sup_{\frac{2}{l}<t\le 2}\frac{2}{\lambda\ (t)}\right\} \le$$

$$\le \frac{2}{\lambda\ (l^{-1})}. \qquad (8)$$

Справді, оскільки разом з функцією $\lambda(\mathrm{t})$ монотонно зростаючою буде функція $\varphi\,(t) = \frac{t}{\lambda\,(t)}$, то

$$\sup_{0<t<\frac{2}{l}}\frac{l\,t}{\lambda\ (t)} \le \frac{2}{\lambda\ \left(\frac{2}{l}\right)} \le \frac{2}{\lambda\ \left(\frac{1}{l}\right)}\ ;$$

$$\sup_{\frac{2}{l}<t\le 2}\frac{2}{\lambda\ (t)} \le \frac{2}{\lambda\ \left(\frac{2}{l}\right)} \le \frac{2}{\lambda\ \left(\frac{1}{l}\right)}\ .$$

Враховуючи (6), (8) і прийняті позначення, маємо

$$\sup_{z_1,\,z_2\in D}\frac{|f\,(z_1) - f\,(z_2)|}{\lambda\ \ (|z_1 - z_2|)} \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sup_{z_1,z_2\in D}\frac{\left|z_1^{n_j} - z_2^{n_j}\right|}{\lambda\ \ (|z_1 - z_2|)} \le$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda\ (t_j)}{2^j} \cdot \frac{2}{\lambda\ \left(n_j^{-1}\right)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} 2^{1-j} \frac{\lambda\ (t_j)}{\lambda\ \left(n_j^{-1}\right)} \leq 2,$$

оскільки $t_j \leq n_j^{-1}, j = 1, 2, \ldots$ Таким чином, для довільних $z_1,\ z_2 \in \mathbb{D}$ справджується нерівність $|f\,(z_1) - f\,(z_2)| \leq 2\lambda\ (|z_1 - z_2|)$.

Цим доведено, що $f \in \mathrm{Lip}_\lambda(\mathbb{D})$.

Покажемо тепер, що для функції (6) співвідношення (2) є хибним. Справді, оскільки

$$f''\,(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j n_j\,(n_j - 1)\, z^{n_j - 2},$$

а супремум на підмножині не перевищує супремума на множині, то маємо

$$\sup_{z\in D} \frac{|f''\,(z)|}{|\lambda''\ (1 - |z|)|} \geq$$

$$\geq \sup_{0<r<1} \frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j n_j\,(n_j - 1)\ r^{n_j - 2}}{|\lambda''\,(1 - r)|} \geq$$

$$\geq \sup_j \sup_{0<r<1} \frac{a_j n_j\,(n_j - 1)\ r^{n_j - 2}}{|\lambda''\,(1 - r)|}.$$

І оскільки супремум на множині не менший значення функції (від змінної $r, 0 < r < 1$) в кожній точці цієї множини, то, покладаючи $1 - r = t_j, \quad r = 1 - t_j \geq 1 - n_j^{-1}$, одержуємо

$$\sup_{z\in D} \frac{|f''\,(z)|}{|\lambda''\,(1 - |z|)|} \geq$$

$$\geq \sup_j \frac{a_j n_j\,(n_j - 1) \left(1 - n_j^{-1}\right)^{n_j - 2}}{\left|\lambda''\left(n_j^{-1}\right)\,\right|} =$$

$$= \sup_j \frac{\lambda\ (t_j)\ n_j^3 \left(1 - n_j^{-1}\right)^{n_j}}{2^j \left|\lambda''\left(n_j^{-1}\right)\,\right| (n_j - 1)} \geq$$

$$\geq \frac{1}{e} \sup_j \frac{\lambda\ (t_j)\ n_j^2}{2^j \left|\lambda''\left(n_j^{-1}\right)\right|}.$$

Враховуючи, що якщо $n_j \leq t_j^{-1}$, то $2n_j > t_j^{-1}$, а також умову, що похідні $\left|\lambda^{(k)}\,(t)\right|$ монотонно спадають, маємо

$$\sup_{z\in D} \frac{|f''\,(z)|}{|\lambda''\,(1 - |z|)|} \geq \frac{1}{e} \sup_j \frac{\lambda\ (t_j)}{2^{j+2} t_j^2 |\lambda''\,(t_j)|}.$$

З останньої нерівності та співвідношення (5) одержуємо

$$\sup_{z\in D} \frac{|f''\,(z)|}{|\lambda''\,(1 - |z|)|} = \infty\ ,$$

що й доводить хибність (2).

У випадку довільного натурального k теорема доводиться аналогічним чином. Зазначимо лише, що у загальному випадку на основі припущення про хибність умови (3) робимо висновок, що існує така монотонно спадна послідовність значень $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ аргументу t∈(0, 1], для якої

$$\frac{\lambda\,(t_j)}{t_j^k |\lambda^{(k)}\,(t_j)|} \geq 2^{(k+1)j}, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots$$

Теорема доведена.

Відмітимо, що при $k = 1$ теорема 1 доведена в [1].

**Зауваження.** Прикладом регулярно монотонної мажоранти, яка не задовольняє умову (3) є функція $\lambda(t) = \ln(t + 1)$.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Nolder C. A., Oberlin D. M.* Moduli of continuity and a Hardy–Littlewood theorem // Lecture Notes in Math. — 1987. — № 1351. — P. 265 — 272.

2. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения — Киев: Наук. думка. — 1975. — 272с.

3. *Hinkkanen A.* On the modulus of continuity of analytic functions // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. — 1985. —**10.** — P. 247 — 253.

4. *Hinkkanen A.* On the majorization of analytic functions // Indiana Univ. Math. J. — 1987. — **36**, №2. — P. 307 — 331.

5. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного — М. : Наука, 1966. — 623 с.

6. *Бернштейн С. Н.* О некоторых свойствах регулярно монотонных функций // Собрание сочинений. Т.1. — М. : Изд-во АН СССР, 1952. — С. 350 — 360.