УДК 517.956

©2015 р. І.Д. Пукальський

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМИ УМОВАМИ І ВИРОДЖЕННЯМ

Розглянута задача Коші для лінійного параболічного рівняння другого порядку з імпульсними умовами за часовою змінною і степеневими особливостями в коефіцієнтах довільного порядку за просторовими змінними. За допомогою принципа максимума і апріорних оцінок встановлено існування і єдиність розв'язків поставленої задачі в гельдерових просторах зі степеневою вагою.

We study the Cauchy problem for a second-order linear parabolic equation with impulse conditions in the time variable and power singularities in the coefficients of any order with respect to the space variables. Using the maximum principle and a priori estimates we prove the existence and uniqueness of the solution of this problem in Hölder spaces with power weights.

У даний час теорія рівнянь із виродженнями і особливостями є обширною областю математичних знань з безліччю напрямків наукових досліджень, що займає важливе місце у теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними як за рахунок глибоких аналітичних результатів, так і завдяки багаточисельним застосуванням у різних розділах математики і фізики. Зокрема, у рівнянні Шредінгера, яке описує стан квантомеханічної системи, коефіцієнти визначають потенціальну енергію і мають степеневі особливості при молодших похідних [1, 2]. Вивченню структурних і якісних властивостей розв'язків крайових задач для рівнянь з виродженнями і особливостями присвячено монографії [3–7].

Вивчення систем з розривними траєкторіями стимулюється розвитком техніки, в якій імпульсні системи керування відіграють важливу роль. Дослідження задач теорії автотматичного керування, теорії ядерних реакторів, приводять до розв'язання періодичних крайових задач для диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Всебічне дослідження розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією приведено в монографіях [8, 9]. Існуванню періодичних розв'язків рівнянь гіперболічного типу з імпульсною дією присвячено праці [10, 12]. Класичним розв'язкам задачі Коші для параболічних систем з імпульсною дією присвячено другий розділ монографії [13].

У даній статті розглядається задача Коші для лінійного параболічного рівняння із степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах на деякій множині точок та імпульсною дією за часовою змінною у визначені моменти часу. За допомогою принципу максимуму та апріорних оцінок встановлено існування та єдиність розв'язку поставленої задачі у гельдерових просторах зі степеневою вагою.

Постановка задачі й основні обмеження

Нехай t_0, t_1, …, t_N, t_{N+1} – фіксовані додатні числа, $t_0 < t_1 < \cdots < t_N < t_{N+1}$, Ω – деяка обмежена область, $\dim \Omega \le n-1$. В області $\Pi = [t_0, t_{N+1}) \times \mathbb{R}^n$ розглянемо задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка при $t \ne t_\lambda$, $\lambda \in \{1, 2, \ldots, N\}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ задовольняє рівняння

$$(Lu)(t,x) = \Big[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(t,x)\partial_{x_i} + A_0(t,x)\Big]u(t,x) = f(t,x), \quad (1)$$

і умови за часовою змінною

$$u(t_0+0, x) = \varphi_0(x), \quad (2)$$

$$u(t_\lambda+0,x)-u(t_\lambda-0,x)=$$
$$=b_\lambda(x)u(t_\lambda-0,x)+\varphi_\lambda(x). \qquad (3)$$

Виродження коефіцієнтів рівняння (1) у точці $P(t,x)\in\Pi\setminus\Pi_{(0)}$, $\Pi_{(0)}=\{(t,x)\,|\,t\in[t_0,t_{N+1}),x\in\Omega\}$, буде характеризувати функція $s(\beta_i,x)$: $s(\beta_i,x)=\rho^{\beta_i}$ при $\rho\le 1$, $s(\beta_i,x)=1$ при $\rho\ge 1$, $\rho=\inf\limits_{z\in\partial\Omega}|x-z|$, $x\in\mathbb{R}^n\backslash\overline{\Omega}$, $\beta_i\in(-\infty,\infty)$, $\beta=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$.

Позначимо через l, γ, μ_j, α – дійсні числа, $j\in\{0,1,\dots,n\}$, $\gamma\ge 0$, $[l]$ – ціла частина l, $(x_1,\dots,x_n)$ – координати точки $x\in\mathbb{R}^n$. Нехай D – довільна замкнена підобласть $\mathbb{R}^n$, $Q^{(k)}=[t_k,t_{k+1})\times D$, $\Pi^{(k)}=[t_k,t_{k+1})\times\mathbb{R}^n$, $(x_1^{(1)},\dots,x_i^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$ – координати точки $x^{(1)}$ в області $\overline{D}$, $(x_1^{(1)},\dots,x_{i-1}^{(1)},x_i^{(2)},x_{i+1}^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$ – координати точки $x^{(2)}$ в області $\overline{D}$, $P_1^{(k)}(t_k^{(1)},x^{(1)})$, $R_i^{(k)}(t^{(2)},x^{(2)})$, $H_i^{(k)(t^{(1)}),x^{(2)}}$, $P^{(k)}(t,x)$ – довільні точки області $Q^{(k)}$, $\overline{Q}^k\subset\Pi^{(k)}$, $k\in\{0,1,2,\dots,N\}$.

Визначимо функціональні простори, в яких буде розглядатися задача (1) – (3).

$C^l(\gamma;\beta;a;\Pi)$ – множина функцій u, які мають неперервні частинні похідні в $\overline{Q}^{(k)}$ при $x\notin\overline{\Omega}$, вигляду $\partial_t^i\partial_x^r u$, $2i+|r|\le[l]$ і скінченне значення норми

$$\|u;\gamma;\beta;a;\Pi\|_l=$$
$$=\sup_k\Big\{\sum_{2i+|r|\le[l]}\|u;\gamma;\beta;a,Q^{(k)}\|_{2i+|r|}+$$
$$+\langle u;\gamma;\beta;q;Q^{(k)}\rangle_l\Big\},$$

де, наприклад

$$\|u;\gamma;\beta;0;\Pi\|_0=$$
$$=\sup_k\Big(\sup_{P^{(k)}\in\overline{Q}^{(k)}}|u(P^{(k)})|\Big)=\sup_k\|u;Q^{(k)}\|_0,$$
$$\|u;\gamma;\beta;a;Q^{(k)}\|_{2i+|r|}=$$
$$=\sup_{P(k)\in\overline{Q}^{(k)}}\{s(a+(2i+|r|)\gamma,x)|\partial_t^i\partial_x^r u(P^{(k)})|\times$$
$$\times\prod_{j=1}^n s(-r_j\beta_j,x)\},$$
$$\langle u;\gamma;\beta;q;Q^{(k)}\rangle_l=$$
$$=\sum_{2i+|r|=[l]}\Big\{\sup_{(P_1^{(k)},H_\nu^{(k)})\subset\overline{Q}^{(k)}}\Big[s(a+l\gamma,\tilde{x})\times$$
$$\times\prod_{j=1}^n s(-r_j\beta_j,\tilde{x})|x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}|^{-\{l\}}|\partial_t^i\partial_x^r u(P_1^{(k)})-$$
$$-\partial_t^i\partial_x^r u(H_\nu^{(k)})|s(-\{l\}\beta_\nu,\tilde{x})\Big]+$$
$$+\sum_{\nu=1}^n\sup_{(R_\nu^{(k)},H_\nu^{(k)})\subset\overline{Q}^{(k)}}[s(a+l\gamma,x^{(2)})\times$$
$$\times\prod_{j=1}^n s(-r_j\beta_j,x^{(2)})|t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\{\frac{l}{2}\}}\times$$
$$\times|\partial_t^i\partial_x^r u(R_\nu^{(k)})-\partial_t^i\partial_x^r u(H_\nu^{(k)})|\Big]\Big\}, \qquad (4)$$

де $|r|=r_1+\dots+r_n$, $l=[l]+\{l\}$, $s(a,\tilde{x})=\min\{s(a,x^{(1)}),s(a,x^{(2)})\}$.

Дослідження задачі (1) – (3) будемо проводити за таких умов:

а) для довільного вектора $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ виконується нерівність

$$\pi_1|\xi|^2\le\sum_{ij=1}^n s(\beta_i,x)s(\beta_j,x)A_{ij}(P)\xi_i\xi_j\le\pi_2|\xi|^2,$$

π_1, π_2 – фіксовані додатні сталі та $s(\beta_i,x)s(\beta_j,x)A_{ij}(P)\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;\Pi)$, $s(\mu_i,x)A_i(P)\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;\Pi)$, $s(\mu_0,x)A_0(P)\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;\Pi)$, $A_0\ge K>-\infty$, K – стала, $\alpha\in(0,1)$, $\gamma=\max\Big\{\max\limits_i(1+\beta_i),\max\limits_i(\mu_i-\beta_i),\frac{\mu_0}{2}\Big\}$;

б) функції $f\in C^\alpha(\gamma;\beta;\mu_0;\Pi)$, $\varphi_0\in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;\mathbb{R}^n)$, $\varphi_\lambda\in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi\cap(t=t_\lambda))$, $b_\lambda(x)\in C^{2+\alpha}(\Pi\cap(t=t_\lambda))$.

Справджується така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1) – (3) *виконано умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1) – (3) *у просторі* $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;\Pi)$ *і для нього має місце оцінка*

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}\le$$
$$\le c\Big\{\sum_{k=1}^N\prod_{\lambda=k}^N(1+\|b_\lambda;\Pi\cap(t=t_\lambda)\|_0)\times$$
$$\times(\|\varphi_{k-1};\gamma;\beta;0;\Pi\cap(t=t_{k-1})\|_{2+\alpha}+$$
$$+\|f;\gamma;\beta;\mu_0;\Pi^{(k-1)}\|_\alpha)+$$

$$+\|\varphi_N;\gamma;\beta;0;\Pi\cap(t=t_N)\|_{2+\alpha}+$$

$$\|f;\gamma;\beta;\mu_0;\Pi^{(N)}\|_\alpha\Big\}. \tag{5}$$

Для дослідження задачі (1) – (3) побудуємо послідовність розв'язків задач з гладкими коефіцієнтами, граничне значення якої буде розв'язком задачі (1) – (3).

Оцінка розв'язків задач із гладкими коефіцієнтами

Нехай $\Pi_m = \Pi\cap\Big\{(t,x)\in\Pi\,|\,s(1,x)\geq m^{-1}\Big\}$, $m>1$ – послідовність областей, які збігається до $\Pi\setminus\Pi_{(0)}$ при $m\to\infty$. Розглянемо в області Π задачу знаходження функцій $u_m(t,x)$, яка задовольняє рівняння

$$(L_1u_m)(t,x)\equiv\Big[\partial_t-\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}a_i(t,x)\partial_{x_i}+a_0(t,x)\Big]u_m=f_m(t,x), \tag{6}$$

і умови за часовою змінною

$$u_m(t_0+0,x)=\varphi^m_{(0)}(x), \tag{7}$$

$$u_m(t_\lambda+0,x)-u_m(t_\lambda-0,x)=$$

$$=b^{(m)}_\lambda(x)u_m(t_\lambda-0,x)+\varphi^{(m)}_\lambda(x). \tag{8}$$

В області Π_m коефіцієнти диференціального виразу L_1 збігаються з коефіцієнтами виразу L, а функції $f_m=f$, $\varphi_0^{(m)}=\varphi_0$, $\varphi_\lambda^{(m)}=\varphi_0$, $b_\lambda^{(m)}=b_\lambda$.

В області $\Pi\setminus\Pi_m$ коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0 і функції f_m, $\varphi_0^{(m)}$, $\varphi_\lambda^{(m)}$, $b_\lambda^{(m)}$ із області Π_m [14, с. 83].

В задачі (6) – (8) виконаємо заміну

$$u_m(t,x)=v_m(t,x)e^{-\mu t}, \tag{9}$$

де μ задовольняє умову $\mu>-K$. Тоді $v_m(t,x)$ задовольняє рівняння

$$((L_1-\mu)v_m)(t,x)=f_m(t,x)e^{\mu t}, \tag{10}$$

і умови за часовою змінною

$$v_m(t_0+0,x)=\varphi_0^{(m)}(x)e^{\mu t_0}, \tag{11}$$

$$v_m(t_\lambda+0,x)-v_m(t_\lambda-0,x)=$$

$$=b^{(m)}_\lambda(x)v_m(t_\lambda-0,x)+\varphi^{(m)}_\lambda(x)e^{\mu t\lambda}. \tag{12}$$

Знайдемо оцінку розв'язку $v_m(t,x)$. У просторі $C^{2+\alpha}(\Pi)$ введемо норму $\|v_m;\gamma;\beta;q;\Pi\|_l$, еквівалентну при кожному m гельдеровій нормі, яка визначається так само, як і $\|u;\gamma;\beta;q;\Pi\|_l$, тільки замість функції $s(\beta_i,x)$ беремо $d(\beta_i,x)$, $d(\beta_i,x)=\max(s(\beta_i,x),m^{-\beta_i})$ при $\beta_i\geq 0$ і $d(\beta_i,x)=\min(s(\beta_i,x),m^{-\beta_i})$ при $\beta_i<0$.

Для розв'язку задачі (10) – (12) справджується така теорема.

Теорема 2. *Нехай v_m – класичний розв'язок задачі* (10) – (12) *в області* Π *і виконані умови а), б). Тоді для $v_m(t,x)$ має місце оцінка*

$$|v_m|\leq\sum_{k=1}^{N}\prod_{\lambda=k}^{N}(1+|b_\lambda|;\Pi\cap(t=t_\lambda))\times$$

$$\times(\|\varphi^m_{(k-1)}e^{\mu t_{k-1}};\Pi\cap(t=t_{k-1})\|_0+$$

$$+\|(a_0-\mu)^{-1}f_me^{\mu t};\Pi^{(k-1)}\|_0)+$$

$$+\|\varphi_N^{(m)}e^{\mu t_N};\Pi\cap(t=t_N)\|_0+$$

$$+\|f_me^{\mu t_N}(a_0-\mu)^{-1};\Pi^{(N)}\|_0. \tag{13}$$

Нерівність (13) доводиться за схемою доведення теореми 2.5 із [5, с. 27], тобто аналізуються всі можливі значення додатного максимуму і від'ємного мінімуму розв'язку $v_m(t,x)$ в областях $\Pi^{(k)}$.

Відмінність наявна лише у випадку, коли $\|v_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_0=\sup\limits_k\|v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\|_0$. У випадку коли $k=0$, з початкової умови (11) одержимо

$$\|v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(0)}\cap(t=t_0)\|_0\leq$$

$$\leq\|\varphi_0^{(m)}e^{\mu t_0};Q^{(0)}\cap(t=t_0)\|_0. \tag{14}$$

Якщо $k\geq1$, то враховуючи умову (12), одержимо співвідношення

$$\|v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\|_0\leq$$

$$\leq(1+\|b_k;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\|_0)\|v_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k-1)}\|_0+$$

$$+\|\varphi_k^{(m)}e^{\mu t_k};\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\|_0. \tag{15}$$

Нехай $\max\limits_{\overline{Q}^{(k)}}v_m(t,x)=v_m(P_1)$, $P_1\in Q^{(k)}$. В точці P_1 виконуються співвідношення

$$\partial_tv_m(P_1)\geq0,\partial_{x_i}v_m(P_1)=0,$$

$$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_m(P_1) \leq 0 \qquad (16)$$

і задовольняється рівняння (10). З урахуванням (16) і рівняння (10) в точці P_1 правильна нерівність

$$v_m(P_1) \leq \sup_{\overline{Q}^{(k)}} (f_m(a_0-\mu)^{-1}e^{\mu t}). \qquad (17)$$

Нехай $\min\limits_{\overline{Q}^{(k)}} v_m(t,x) = v_m(P_2)$, $P_2 \in Q^{(k)}$. З урахуванням співвідношень

$$\partial_t v_m(P_2) \leq 0, \partial_{x_i} v_m(P_2) = 0,$$

$$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_2)\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_m(P_2) \geq 0$$

і рівняння (10) в точці P_2 маємо

$$v_m(P_2) \geq \inf_{\overline{Q}^{(k)}} (f_m(a_0-\mu)^{-1}e^{\mu t}). \qquad (18)$$

Об'єднуючи нерівності (14), (15), (17) і (18) при $\lambda = 1,2,\ldots,N$ дістанемо оцінку (13).

Теорема 3. *Якщо виконані умови теореми 1, то для розв'язку задачі* (10) – (12) *виконується нерівність*

$$\|v_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2+\alpha} \leq$$

$$\leq c\Bigg\{\sum_{k=1}^{N}\Big\{\prod_{\lambda=k}^{N}(1+\|b_\lambda;\Pi\cap(t=t_\lambda)\|_0)\times$$

$$\times(\|\varphi_{k-1}^{(m)};\gamma;\beta;0;\Pi\cap(t=t_{k-1})\|_{2+\alpha}+$$

$$+\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;\Pi^{(k-1)}\|_\alpha)+$$

$$+\|\varphi_N^{(m)};\gamma;\beta;0;\Pi\cap(t=t_N)\|_{2+\alpha}+$$

$$+\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;\Pi^{(N)}\|_\alpha\Bigg\}. \qquad (19)$$

Доведення. Використовуючи означення норми та інтерполяційні нерівності із [7, стор. 14] маємо

$$\|v_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(k)}\|_{2+\alpha} \leq$$

$$\leq (1+\varepsilon^\alpha)\langle v_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(k)}\rangle_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|v_m;\Pi^{(k)}\|_0,$$

де ε – довільне дійсне число, $\varepsilon \in (0,1)$. Тому досить оцінити півнорму $\langle v_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(k)}\rangle_{2+\alpha}$. Із визначення півнорми випливає існування в $\Pi^{(k)}$ точок $P_1^{(k)}$, $R_i^{(k)}$, $H_i^{(k)}$, для яких виконується одна з нерівностей

$$\frac{1}{2}\|v_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(k)}\|_{2+\alpha} \leq E_\delta, \delta \in \{1,2\}, \qquad (20)$$

де

$$E_1 = \sum_{2i+|r|=2}\sum_{j=1}^{n}|x_j^{(1)} - x_j^{(2)}|^{-\alpha} d((2+\alpha)\gamma;\tilde{x})\times$$

$$\times d(-\alpha\beta_i,\tilde{x})\prod_{\nu=1}^{n} d(-r_\nu\beta_\nu,\tilde{x})\times$$

$$\times|\partial_t^i\partial_x^r v_m(H_j) - \partial_t^i\partial_x^r v_m(P_1)|,$$

$$E_2 = \sum_{2i+|r|=2}\sum_{j=1}^{n}|t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2}} d((2+\alpha)\gamma;x^{(2)})\times$$

$$\times\prod_{\nu=1}^{n} d(-r_\nu\beta_\nu,\tilde{x})|\partial_t^i\partial_x^r v_m(R_j) - \partial_t^i\partial_x^r v_m(H_j)|,$$

$$d(\gamma,\tilde{x}) = \min(d(\gamma,x^{(1)}),d(\gamma,x^{(2)})).$$

Нехай $|x_j^{(1)} - x_j^{(2)}| \leq n^{-1}d(\gamma-\beta_j,\tilde{x})\dfrac{\varepsilon_1}{4} \equiv T_2$ і $|t^{(1)} - t^{(2)}| \leq d(2\gamma,\tilde{x})\dfrac{\varepsilon_1^2}{16} \equiv T_1$, ε_1 – довільне дійсне число, $\varepsilon_1 \in (0,1)$. Будемо вважати, що $d(\gamma,\tilde{x}) = d(\gamma,x^{(1)})$, $P_1^{(k)}(t^{(1)},x^{(1)}) \in \Pi^{(k)}$, $k \in \{0,1,\ldots,N\}$. В області $\Pi^{(k)}$ запишемо задачу (10) – (12) у вигляді

$$(L_2 v_m)(t,x) \equiv \Big[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1^{(k)})\partial_{x_i}\partial_{x_j}\Big]v_m =$$

$$= \sum_{ij=1}^{n}[a_{ij}(P) - a_{ij}(P_1^{(k)})]\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_m -$$

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i(P)\partial_{x_i}v_m - (a_0(P)-\mu)v_m + f_m(P)e^{\mu t} \equiv$$

$$\equiv F_m(P;v_m) + F_m(P), \qquad (21)$$

$$v_m(t_k+0,x) = G_m^{(k)}(t_k,x), \qquad (22)$$

де $G_m^{(0)}(t_0,x) = \varphi_0^{(m)}(x)e^{\mu t_0}$, $x \in \mathbb{R}^n$;

$$G_m^{(k)}(t_k,x) = [1+b_k^{(m)}(x)]v_m(t_k-0,x)+$$

$$+\varphi_k^{(m)}(x)e^{\mu t_k}, x \in \Pi\cap(t=t_k),$$

$k \in \{1,2,\ldots,N\}$.

Нехай $V_{\varepsilon_2}^{(k)}$ – область із $\Pi^{(k)}$, $V_{\varepsilon_2}^{(k)} = \{(t,x) \in \Pi^{(k)}, |t - t^{(1)}| \le \varepsilon_2^2 T_1,\ |x_j - x_j^{(1)}| \le \varepsilon_2 T_2,\ j \in \{1,\ldots,n\}\}$. В задачі (21), (22) зробимо заміну $v_m(t,x) = \omega_m(t,y)$, $y_j = d(\beta_j, x^{(1)})x_j$. В результаті одержимо

$$(L_3\omega_m)(t,y) = \Big[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1^{(k)})d(\beta_i,x^{(1)})\times$$

$$\times d(\beta_j,x^{(1)})\partial_{y_i}\partial_{y_j}\Big]\omega_m = F_m^{(1)}(t,\tilde{y};\omega_m) + F_m(t,\tilde{y}), \tag{23}$$

$$\omega_m(t_k+0,y) = G_m^{(k)}(t_k,\tilde{y}), \tag{24}$$

де $\tilde{y} = (d(-\beta_1,x^{(1)})x_1, d(-\beta_2,x^{(1)}),\ldots, d(-\beta_n,x^{(1)})x_n)$. Позначимо $y_i^{(1)} = d(\beta_i,x^{(1)}x_i^{(1)}$, $W_{\varepsilon_2}^{(k)} = \{(t,y), |t - t^{(1)}| \le \varepsilon_2 T_1, |y_i - y_i^{(1)}| \le \varepsilon_2 T_1^{1/2}\}$ і візьмемо тричі диференційовну функцію $\eta(t,y)$, яка задовольняє умови

$$\eta(t,y) = \begin{cases} 1, & (t,y) \in W_{1/2}^{(k)}, 0 \le \eta(t,y) \le 1; \\ 0, & (t,y) \notin W_{3/4}^{(k)}, |\partial_t^i \partial_y^r \eta| \le \\ & \le c_{ik} d(-(2i+|r|)\gamma; x^{(1)}). \end{cases}$$

Тоді функція $Z_m(t,y) = \omega_m(t,y)\eta(t,y)$ буде розв'язком задачі Коші

$$(L_2 Z_m)(t,y) = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1^{(k)})d(\beta_i,x^{(1)})\times$$

$$\times d(\beta_j,x^{(1)})[\partial_{y_i}\eta\partial_{y_j}\omega_m + \partial_{y_j}\eta\partial_{y_i}\omega_m]+$$

$$+\omega_m\Big[\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1^{(k)})d(\beta_i,x^{(1)})\times$$

$$\times d(\beta_j,x^{(1)})\partial_{y_i}\partial_{y_j}\eta - \partial_t\eta\Big]+$$

$$+\eta[F_m^{(1)} + F_m] \equiv F_m^{(2)} + \eta F_m, \tag{25}$$

$$Z_m(t_k+0,x) = \eta G_m^{(k)}(t_k,\tilde{y}). \tag{26}$$

Згідно з теоремою 5.1 із [5, стор. 364], для розв'язку задачі (25), (26) виконується нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)|\partial_t^i\partial_y^r Z_m(M_1) - \partial_t^i\partial_y^r Z_m(M_2)| \le$$

$$\le c(\|F_m^{(2)} + \eta F_m\|_{C^\alpha(W_{3/4}^{(k)})} + \|\eta G_m^{(k)}\|_{C^{2+\alpha}(W_{3/4}^{(k)})}), \tag{27}$$

де $(M_1,M_2) \subset W_{1/4}^{(k)}$, $d(M_1,M_2)$ – параболічна відстань між точками M_1 і M_2, $2i + |r| = 2$.

Враховуючи властивості функції $\eta(t,y)$, знаходимо

$$\|F_m^{(2)} + \eta F_m\|_{C^\alpha(W_{3/4}^{(k)})} \le$$

$$\le cd(-(2+\alpha)\gamma : x^{(1)})(\|\omega_m;\gamma;0;0;W_{3/4}^{(k)}\|_2+$$

$$+\|\omega_m;W_{3/4}^{(k)}\|_0 + F_m^{(1)};\gamma;0;2\gamma;W_{3/4}^{(k)}\|_\alpha+$$

$$\|f_m;\gamma;0;2\gamma;W_{3/4}^{(1)}\|_\alpha), \tag{28}$$

$$\|\eta G_m^{(k)}\|_{C^\alpha(W_{3/4}^{(k)})} \le cd(-(2+\alpha)\gamma : x^{(1)})\times$$

$$\times\|G_m^{(k)};\gamma;0;0;W_{3/4}^{(k)}\|_{2+\alpha}, \tag{29}$$

Підставляючи (28), (29) у (27) і повертаючись до змінних (t,x), одержимо

$$E_\delta \le c_1(\|F_m^{(1)};\gamma;\beta;2\gamma;V_{3/4}^k\|_\alpha+$$

$$+\|f_m;\gamma;\beta;2\gamma;V_{3/4}^{(k)}\|_\alpha+$$

$$+\|G_m^{(k)};\gamma;\beta;0;V_{3/4}^{(k)}\|_{2+\alpha} + \|v_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4}^{(k)}\|_2+$$

$$+\|v_m;V_{3/4}^{(k)}\|_0). \tag{30}$$

Враховуючи інтерполяційні нерівності і оцінки норми кожного доданка виразів $F_m^{(1)}$, $G_m^{(k)}$, маємо

$$E_\delta \le (\varepsilon_1^\alpha(n+2) + \varepsilon^2 n^2)\|v_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4}^{(k)}\|_{2+\alpha}+$$

$$+c_2\|v_m;V_{3/4}^{(k)}\|_0 + c_3(\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;V_{3/4}^{(k)}\|_\alpha+$$

$$+\|G_m^{(k)};\gamma;\beta;0;V_{3/4}^{(k)} \cap (t=t_k)\|_{2+\alpha}). \tag{31}$$

Нехай $|t^{(1)} - t^{(2)}| \ge T_1$, або $|x_j^{(1)} - x_j^{(1)}| \ge T_2$. Тоді

$$E_\delta \le 2\varepsilon_1^{-\alpha}\|v_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(k)}\|_2. \tag{32}$$

Застосовуючи інтерполяційні нерівності до (32), знаходимо

$$E_\delta \le \varepsilon^\alpha\|v_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(k)}\|_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|v_m;\Pi^{(k)}\|_0. \tag{33}$$

Використовуючи нерівності (20), (31), (33) і вибираючи ε, ε_1 досить малими, одержимо оцінку

$$\|v_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(k)}\|_{2+\alpha} \le c(\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;\Pi^{(k)}\|_\alpha+$$

$$\|G_m^{(k)};\gamma;\beta;0;\Pi^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha}+\|v_m;\Pi^{(k)}\|_0). \quad (34)$$

Враховуючи значення виразу $G_m^{(k)}(t,x)$, маємо

$$\|G_m^{(0)};\gamma;\beta;0;\Pi\cap(t=t_0)\|_{2+\alpha}\leq$$
$$\leq c\|\varphi_0^{(m)};\gamma;\beta;0;\mathbb{R}^n\|_{2+\alpha}, \quad (35)$$
$$\|G_m^{(k)};\gamma;\beta;0;\Pi^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha}\leq$$
$$\leq c(1+\|b_k;\Pi\cap(t=t_k)\|_0)\times$$
$$\times(\|v_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(k-1)}\|_{2+\alpha}+$$
$$+\|\varphi_k^{(m)};\gamma;\beta;0;\Pi^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha}),$$

при $k=1,2,\ldots,N$.

Враховуючи оцінку (13) і нерівності (34), (35) при $k=0,1,\ldots,N$ знаходимо оцінку (19).

Доведення теореми 1. Оскільки

$$\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;\Pi^{(k)}\|_\alpha\leq c\|f;\gamma;\beta;\mu_0;\Pi^{(k)}\|_\alpha,$$
$$\|\varphi_m^{(k)};\gamma;\beta;0;\Pi^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha}\leq$$
$$\leq c\|\varphi_k;\gamma;\beta;0;\Pi^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2\alpha},$$

то враховуючи заміну (9) і оцінку (19) для розв'язків задачі (6) – (8) справджується оцінка

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2+\alpha}\leq$$
$$\leq c\left\{\sum_{k=1}^{N}\sum_{\lambda=k}^{N}(1+\|b_\lambda;\Pi\cap(t=t_\lambda)\|_0)\times\right.$$
$$\times(\|\varphi_{k-1};\gamma;\beta;0;\Pi\cap(t=t_{k-1})\|_{2+\alpha}+$$
$$+\|f;\gamma;\beta;\mu_0;\Pi^{(k-1)}\|_\alpha)+$$
$$\|\varphi_N;\gamma;\beta;0;\Pi\cap(t=t_N)\|_{2+\alpha}+$$
$$\left.+\|f;\gamma;\beta;\mu_0;\Pi^{(N)}\|_\alpha\right\}. \quad (36)$$

Права частина нерівності (36) не залежить від m. Крім того, послідовності $\{U_m^{(0)}\}\equiv\{u_m\}$, $\{U_m^{(1)}\}\equiv\{d(\gamma-\beta_i,x)\partial_{x_i}u_m(t,x)\}$, $\{U_m^{(2)}\}\equiv\{d(2\gamma;x)\partial_t u_m(t,x)\}$, $\{U_m^{(3)}\}\equiv\{d(2\gamma-\beta_i,x)d(\gamma-\beta_j,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m(t,x)\}$ рівномірно обмежені і рівностепенно неперервні в областях $\overline{Q}^{(k)}$. За теоремою Арчела існують підпослідовності $\{U_{m(i)}^{(\nu)}\}$, рівномірно збіжні в $Q^{(k)}$ до $\{U_0^{(\nu)}\}$, $\nu\in\{0,1,2,3\}$. Оскільки $Q^{(k)}$ – довільна область, $\overline{Q}^{(k)}\subset\Pi^{(k)}$, то переходячи до границі при $m_i\to\infty$ в задачі (6) – (8), одержимо, що $u(t,x)=U_0^{(0)}$ – єдиний розв'язок задачі (1) – (3), $u\in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Зейц Ф.* Современная теория твердого тела. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 720 с.

2. *Жислин Г.М.* О конечности дискретного спектра операторов энергии квантовых систем многих частиц // Докл. АН СССР. – 1972. – 207, № 1. – С. 25–28.

3. *Смирнов М.М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. – М.: Наука, 1966. – 292 с.

4. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

5. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

6. *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут 2003. – 248 с.

7. *Пукальский І.Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями. – Чернівці: Рута, 2008. – 253 с.

8. *Samoilenko A.M., Perestyuk N.A.* Impulsive Differential Equations. – Singapore: World Scientific, 1995. – 462 p.

9. *Perestyuk N.A., Plotnikov N.A., Samoilenko A.M., Skripnik N.V.* Differential Equations with Impulse Effects: Multivalued Right-hand Sides with Discontinuities. – Walter de Gruyter Co, Berlin, 2011.

10. *Асанова А.Т.* О нелокальной краевой задаче для систем гиперболических уравнений с импульсными воздействиями //Укр. мат. журн. – 2013. – 65, № 3. – С. 315–328.

11. *Perestyuk N.A., Trach A.B.* Periodic solutions for weakly nonlinear partial system with pulse influence // Ukr. Math. J. – 1997. – 49, N 4. – P. 601–605.

12. *Boinov D.D., Minchev E., Myshkis A.* Periodic Boundary value problems for impulsive hyperbolic systems // Commun. Appl. Anal. – 1997. – 1, N 4, – P. 1–14.

13. *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні: монографія. – Чернівці, 2010. – 248 с.

14. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.