УДК 517.95+511.42

©2015 р. М.М. Симотюк, Д.В. Хомяк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С. Підстригача НАН України

МЕТРИЧНІ ОЦІНКИ МАЛИХ ЗНАМЕННИКІВ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НАВАНТАЖЕНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку багатоточкової задачі для навантаженого гіперболічного рівняння.

We prove theorems on the estimation of small denominators which arise under construction of the solution of the multipoint problem for a loaded hyperbolic equation.

1. Вступ. Будемо використовувати такі позначення: Ω^p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $Q_T^p = (0;T) \times \Omega^p$, $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \Omega^p$, $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \ldots + |k_p|$, $(k,x) = k_1x_1 + \ldots + k_px_p$, $D = (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_p)$, $\delta_{j,q}$ – символ Кронекера; $Pol_{n,p}$ (відповідно, $Pol_{n,p}^{hom}$) – множина усіх (відповідно, усіх однорідних) поліномів степеня n від p змінних з дійсними коефіцієнтами; $\{t_1, \ldots, t_n\}$, $\{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$ – впорядковані неперетинні набори чисел з відрізка $[0;T]$: $t_1 < \ldots < t_n$, $\tau_1 < \ldots < \tau_m$, $\{\tau_1, \ldots, \tau_m\} \cap \{t_1, \ldots, t_m\} = \varnothing$; $\mu_n S$ – міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ вимірної множини $S \subset \mathbb{R}^n$; H_α ($\alpha \in \mathbb{R}$) – простір формальних тригонометричних рядів $\varphi(x) = \sum_k \varphi_k e^{i(k,x)}$, для яких є скінченною норма

$$\|\varphi(x); H_\alpha\| = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} |\varphi_k|^2 (1+|k|)^{2\alpha}}.$$

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $B_j \in Pol_{M,p}$, $j = \overline{1,m}$, $M < n$, і нехай $A_j \in Pol_{j,p}^{hom}$, $j = \overline{1,n}$, є такими, що диференціальний вираз

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right) \equiv \frac{\partial^n}{\partial t^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-j}(D) \frac{\partial^j}{\partial t^j}$$

є строго гіперболічним; зі строгої гіперболічності виразу $L(\partial/\partial t, D)$ випливає, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{\vec{0}\}$ λ-корені $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)$ рівняння

$$L(\lambda, ik) = 0 \qquad (1)$$

є попарно різними суто уявними числами.

При дослідженні умов коректної розв'язності та побудові розв'язку багатоточкової задачі для навантаженого строго гіперболічного рівняння

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right) u(t,x) = F(t,x) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} B_j(D) u(\tau_j, x), \quad (t,x) \in Q_T^p, \qquad (2)$$

$$u(t_j, x) = \varphi_j(x), \quad j = \overline{1,n}, \quad x \in \Omega^p, \qquad (3)$$

виникають такі величини:

$$\Delta(k) = \det \|y_q(t_j, k)\|_{j,q=1}^n, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \qquad (4)$$

$$\Gamma(k) = 1 - \sum_{j=1}^{m} B_j(ik) I_k(\tau_j), \quad k \in \mathbb{Z}^p, \qquad (5)$$

де

$$y_q(t,k) = \begin{cases} t^{q-1} & , \ k = \vec{0}, \\ e^{\lambda_q(k)t} & , \ k \neq \vec{0}, \end{cases} \qquad q = \overline{1,n},$$

$I_k(t) \equiv \int_0^T G_k(t,\tau) d\tau$, а $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, – функція Ґріна багатоточкової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$L(d/dt, ik) f(t) = 0, \quad f(t_j) = 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Функція Ґріна $G_k(t,\tau)$ коректно визначена тоді і тільки тоді, коли визначник $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$ є відмінним від нуля (див. [1, с. 26–28]). Тому формула (5) має сенс, якщо $\Delta(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Якщо

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}^p \quad \Delta(k) \cdot \Gamma(k) \neq 0, \qquad (6)$$

то задача (2), (3) має єдиний формальний розв'язок, який зображується рядом

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} (f_k(t) + v_k(t) + w_k(t)) e^{i(k,x)}, \quad (7)$$

де $f_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau)F_k(\tau)d\tau$, $k \in \mathbb{Z}^p$,

$$v_k(t) = \sum_{j,q=1}^{n} \frac{\Delta_{jq}(k)}{\Delta(k)} \varphi_{jk} y_q(t,k), \quad k \in \mathbb{Z}^p,$$

$$w_k(t) = \frac{I_k(t)}{\Gamma(k)} \sum_{j=1}^{m} B_j(ik)(v_k(\tau_j) + f_k(\tau_j)),$$

де $\Delta_{jq}(k)$ – алгебричне доповнення елемента $y_q(t_j,k)$, $j,q = \overline{1,n}$, у визначнику $\Delta(k)$, φ_{jk}, $k \in \mathbb{Z}^p$, – коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_j(x)$, $j = \overline{1,n}$. Якщо виконується умова (6) і, крім того, існують такі сталі ω, η, що для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ справджуються нерівності

$$|\Delta(k)| \geq |k|^{-\omega}, \tag{8}$$

$$|\Gamma(k)| \geq |k|^{-\eta}, \tag{9}$$

то можна встановити оцінки зверху для норм функцій $f_k(t)$, $v_k(t)$, $w_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, у просторі $C^n[0;T]$, з яких випливає збіжність формального ряду (7) у шкалі просторів $C^n([0;T];H_\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, якщо $\varphi_j \in H_{\alpha_1}$, $j = \overline{1,n}$, $F \in C([0;T];H_{\alpha_2})$ для деяких показників $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Тому важливо дослідити питання про можливість виконання оцінок (8), (9). Це і є метою даної роботи.

Із результатів роботи [2] випливає, що при $\omega > (p+1)n(n-1)/2$ оцінки

$$|\Delta(k)| \geq |k|^{-\omega} \cdot \prod_{n \geq j > q \geq 1} |\lambda_j(k) - \lambda_q(k)|,$$

виконуються для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in [0;T]^n$ для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Наслідком (див. лему 2 нижче) строгої гіперболічності виразу $L(\partial/\partial t, D)$ є те, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{\vec{0}\}$ справджується нерівність

$$\prod_{n \geq j > q \geq 1} |\lambda_j(k) - \lambda_q(k)| \geq C_1 |k|^{n(n-1)/2},$$

де додатна стала C_1 не залежить від k. Із цієї оцінки та цитованого результату роботи [2] випливає, що при $\omega > pn(n-1)/2$ нерівність (8) виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t} \in [0;T]^n$ для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. У даній роботі встановлено аналогічний результат (див. теорему 1 нижче) про виконання оцінок (8) з нижньою межею $pn(n-1)/2$ для показника ω, однак обґрунтування цього факту (див. доведення теореми 1 нижче) суттєво відрізняється від доведення, запропонованого в [2].

Що стосується оцінок (9), то питання про можливість їх виконання у науковій літературі не вивчалося. У теоремі 2 даної роботи показано, що при $\eta > pmn$ оцінка (9) виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^m$) векторів $\vec{\tau} \in [0;T]^m$ для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, якщо однорідний поліном $A_n(\xi)$ є відмінним від нуля для всіх $\xi \in \mathbb{R}^p \backslash \{\vec{0}\}$. Зауважимо, що методика доведення теореми 2 є близькою до методики, використаної у працях [3, 4] для встановлення метричних оцінок малих знаменників задачі з багатоточковими умовами для навантаженого полігармонічного рівняння та задачі з інтегральними умовами у вигляді моментів для безтипних рівнянь із частинними похідними.

2. Допоміжні твердження. Нижче використовуватимемо такі допоміжні твердження.

Лема 1 (Бореля-Кантеллі). *Нехай $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ – послідовність вимірних (за мірою Лебега в $\mathbb{R}^n$) множин з $\mathbb{R}^n$ таких, що*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_n A_j < \infty.$$

Тоді міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ множини тих точок, які потрапляють до нескінченної кількості множин A_j, $j \geq 1$, дорівнює нулю.

Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{\vec{0}\}$ позначимо:

$$W_j(k) = \det \|\lambda_l^{q-1}(k)\|_{l,q=1}^{j}, \quad j = \overline{2,n},$$

$W_{j,r}(k)$, $r = \overline{1,j}$, – алгебричне доповнення елемента $\lambda_j^{r-1}(k)$ у визначнику $W_j(k)$, де $\lambda_j(k)$, $j = \overline{1,n}$, – корені рівняння (1).

Лема 2. *Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{\vec{0}\}$ виконуються оцінки*

$$|W_j(k)| \geq C_2 |k|^{j(j-1)/2}, \quad j = \overline{2,n}, \tag{10}$$

$$|W_{j,r}(k)| \le C_3|k|^{j(j-1)/2-(r-1)}, \; r=\overline{1,j}, \quad (11)$$

де $C_2, C_3 > 0$ *– сталі, не залежні від* k.

Доведення. З однорідності поліномів

$$A_j(\xi_1,\ldots,\xi_p), \quad j=\overline{1,n},$$

випливає, що для кожного вектора $k \in \mathbb{Z}^p$, $k \ne \vec{0}$, виконуються рівності

$$A_j(ik_1,\ldots,ik_p)=(i|k|)^j A_j\left(\frac{k_1}{|k|},\ldots,\frac{k_p}{|k|}\right),$$

де $j=\overline{1,n}$. Зі структури диференціального виразу $L(\partial/\partial t, D)$ отримуємо, що

$$L(\lambda, ik)=(i|k|)^n L\left(\frac{\lambda}{i|k|},\frac{k}{|k|}\right), \quad k\ne\vec{0}.$$

Тому корені $\lambda_j(k)$, $j=\overline{1,n}$, $k\ne\vec{0}$, рівняння (1) можна зобразити у вигляді

$$\lambda_j(k)=i|k|\sigma_j(k), \quad j=\overline{1,n}, \qquad (12)$$

де $\sigma_j(k)$, $j=\overline{1,n}$, $k\ne\vec{0}$, – корені рівняння

$$L\left(\sigma, k/|k|\right)=0. \qquad (13)$$

Зі строгої гіперболічності виразу $L(\partial/\partial t, D)$ випливає, що для кожного $\xi\in\mathbb{R}\backslash\{\vec{0}\}$ дискримінант $D_L(\xi)$ многочлена $L(\lambda,\xi)$ (як многочлена змінної λ) є відмінним від нуля. Оскільки $D_L(\xi)$ є многочленом від коефіцієнтів $A_1(\xi),\ldots,A_n(\xi)$ многочлена $L(\lambda,\xi)$ (див. [1]), то $D_L(\xi)$ є неперервною функцією параметрів $\xi_1,\ldots,\xi_p$. На компакті $S=\{\xi\in\mathbb{R}^p : |\xi_1|+\ldots+|\xi_p|=1\}$ модуль цієї функції відокремлений знизу від нуля деякою додатною сталою C_4:

$$\forall\xi\in S \quad |D_L(\xi)|\ge C_4. \qquad (14)$$

Враховуючи відому рівність [1, с. 61]

$$D_L\left(\frac{k}{|k|}\right)=\prod_{n\ge j>q\ge1}(\sigma_j(k)-\sigma_q(k))^2, \; k\ne\vec{0},$$

з оцінок (14) дістаємо, що

$$\prod_{n\ge j>q\ge1}|\sigma_j(k)-\sigma_q(k)|^2\ge C_4, \; k\ne\vec{0}. \quad (15)$$

Кількість множників $|\sigma_j(k)-\sigma_q(k)|^2, n\ge j>q\ge1$, у лівій частині формули (15) дорівнює $n(n-1)/2$, тому з нерівності (15) на підставі формул (12) випливає, що при $k\ne\vec{0}$

$$\prod_{n\ge j>q\ge1}|\lambda_j(k)-\lambda_q(k)|\ge\sqrt{C_4}|k|^{n(n-1)/2}, \quad (16)$$

Коефіцієнти рівняння (13) є рівномірно обмеженими за $k\in\mathbb{Z}^p\backslash\{\vec{0}\}$, тому й корені цього рівняння є рівномірно обмеженими за k [7], тобто існує стала $C_5>0$ така, що для всіх $k\ne\vec{0}$ виконуються оцінки

$$|\sigma_j(k)|\le C_5, \quad j=\overline{1,n}. \qquad (17)$$

Із формул (12), (17) для $k\ne\vec{0}$ отримуємо

$$|\lambda_j(k)-\lambda_q(k)|\le 2C_5|k|, \; n\ge j>q\ge1. \quad (18)$$

Тоді з нерівностей (16), (18) випливає, що

$$|\lambda_j(k)-\lambda_q(k)|\ge C_6|k|, \; n\ge j>q\ge1, \quad (19)$$

де $C_6=\sqrt{C_4}\cdot(2C_5)^{1-n(n-1)/2}>0$. Враховуючи, що визначник $W_j(k)$ є визначником Вандермонда j чисел $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_j(k)$, із формул (19) дістаємо

$$|W_j(k)|=\prod_{j\ge r>q\ge1}|\lambda_r(k)-\lambda_q(k)|\ge$$

$$\ge(C_6|k|)^{j(j-1)/2}, \quad j=\overline{2,n}, \quad k\ne\vec{0},$$

тобто оцінки (10) виконуються.

Для доведення нерівностей (11) зауважимо, що визначник $W_{j,r}(k)$ є сумою $(j-1)!$ доданків вигляду $\pm\lambda_1^{\alpha_1-1}(k)\cdot\ldots\cdot\lambda_{j-1}^{\alpha_{j-1}-1}(k)$, де $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{j-1})$ – перестановка чисел з множини $\{1,\ldots,j\}\backslash\{r\}$. Враховуючи оцінки

$$|\lambda_j(k)|\le C_5|k|, \quad j=\overline{1,n}, \quad k\ne\vec{0},$$

які випливають із (12), (17), дістаємо, що

$$\max_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{j-1})}|\lambda_1^{\alpha_1-1}(k)\cdot\ldots\cdot\lambda_{j-1}^{\alpha_{j-1}-1}(k)|\le$$

$$\le C_7|k|^{1+\ldots+j-1-(r-1)}, \quad C_7=C_5^{j(j-1)/2-(r-1)}.$$

Таким чином,

$$|W_{j,r}(k)|\le(j-1)!C_7|k|^{j(j-1)/2-(r-1)}, r=\overline{1,j},$$

а отже, оцінки (11) встановлені.

Лема 3. ([5]) *Нехай* $f(t)$ *має вигляд*

$$f(t)=\sum_{j=1}^{m}p_j\exp(\rho_j t),\quad \rho_j\neq\rho_q\quad (j\neq q),$$

де $\rho_j,p_j\in\mathbb{C}$, $j=\overline{1,m}$. *Якщо для деяких комплексних чисел* a_j, $j=\overline{1,n}$, *в кожній точці* $t\in[0;T]$ *виконується умова*

$$|f^{(n)}(t)+a_1f^{(n-1)}(t)+\ldots+a_nf(t)|\geq\delta>0,$$

то для довільного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0=\frac{\delta}{2(n+1)A^n}$, $A=1+\max\limits_{1\leq j\leq n}|a_j|^{1/j}$, *справджується оцінка*

$$\mu_1\{t\in[0;T]:|f(t)|<\varepsilon\}\leq C_8\Lambda(\varepsilon/\delta)^{1/n},$$

де $\Lambda=1+\max\limits_{1\leq j\leq n}|\rho_j|$, $C_8=C_8(n,m,T)>0$.

3. Оцінки знизу визначника $\Delta(k)$. Встановимо метричні оцінки знизу для визначника $\Delta(k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$.

Теорема 1. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $\vec{t}\in[0;T]^n$ *нерівність (8) виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів* $k\in\mathbb{Z}^p$, *якщо* $\omega>pn(n-1)/2$.

Доведення. Через $S(k)$ позначимо множину тих векторів $\vec{t}\in[0;T]^n$, для яких нерівність, протилежна до нерівності (8), виконується для фіксованого $k\in\mathbb{Z}^p$, $k\neq\vec{0}$:

$$S(k)=\{\vec{t}\in[0;T]^n:|\Delta(k)|<|k|^{-\omega}\},$$

а через S – множину тих векторів $\vec{t}\in[0;T]^n$, для яких нерівність, протилежна до нерівності (8), виконується для нескінченної кількості векторів $k\in\mathbb{Z}^p$, $k\neq\vec{0}$.

Для доведення теореми 1 досить перевірити, що $\mu_nS=0$, якщо $\omega>pn(n-1)/2$. Згідно з лемою 1 для цього досить перевірити, що ряд $\sum_{|k|>0}\mu_nS(k)$ є збіжним при $\omega>pn(n-1)/2$. Нехай $\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)$ – визначник, одержаний із визначника $\Delta(k)$ викреслюванням останніх $(n-j)$ рядків та останніх $(n-j)$ стовпців, $j=\overline{1,n}$; зрозуміло, що $\Delta_n(k;t_1,\ldots,t_n)=\Delta(k)$, $\Delta_1(k;t_1)=e^{\lambda_1(k)t_1}$.

Для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$, $k\neq\vec{0}$, розглянемо такі множини:

$$S_j(k)=\{\vec{t}\in[0;T]^n:|\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)|<|k|^{-\omega_j},$$
$$|\Delta_{j-1}(k;t_1,\ldots,t_{j-1})|\geq|k|^{-\omega_{j-1}}\},$$

де $j=\overline{2,n}$, $\omega_j=pj(j-1)/2+\varepsilon_j$, а ε_j, $j=\overline{1,n}$, – такі додатні числа, що

$$0<\varepsilon_1<\ldots<\varepsilon_n=\omega-pn(n-1)/2.$$

Оскільки для довільних $k\neq\vec{0}$, $\omega_1>0$ виконується нерівність

$$|\Delta_1(k;t_1)|=\left|e^{\lambda_1(k)t_1}\right|=1\geq|k|^{-\omega_1},\qquad(20)$$

то правильним є включення

$$S(k)\subset\bigcup_{j=2}^{n}S_j(k),\quad k\neq\vec{0}.\qquad(21)$$

Дійсно, нехай $\vec{t}=(t_1,\ldots,t_n)\in S(k)$, $k\neq\vec{0}$, тоді $|\Delta_n(k;t_1,\ldots,t_n)|<|k|^{-\omega_n}$, бо $\omega_n=\omega$. Нехай N – найменший серед тих номерів $j\in\{1,\ldots,n\}$, для яких справджується нерівність $|\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)|<|k|^{-\omega_j}$. З огляду на нерівність (20) число N не може дорівнювати 1 (інакше виконувалася б суперечлива при $\omega_1>0$ нерівність $1<|k|^{-\omega_1}$). Тому $N\geq2$, а тоді, згідно з вибором числа N, для вектора $\vec{t}$ виконуються нерівності

$$|\Delta_N(k;t_1,\ldots,t_N)|<|k|^{-\omega_N},$$
$$|\Delta_{N-1}(k;t_1,\ldots,t_{N-1})|\geq|k|^{-\omega_{N-1}},$$

а отже, $\vec{t}\in S_N(k)$. Таким чином, включення (21) є істинним.

З адитивності міри Лебега та формул (21) випливає, що

$$\mu_nS(k)\leq\sum_{j=2}^{n}\mu_nS_j(k),\quad k\neq\vec{0}.$$

Тому зі збіжності всіх рядів

$$\sum_{|k|>0}\mu_nS_j(k),\quad j=\overline{2,n},\qquad(22)$$

випливає збіжність ряду $\sum_{|k|>0}\mu_nS(k)$. Покажемо, що для $k\neq\vec{0}$ виконуються оцінки

$$\mu_nS_j(k)\leq C_9|k|^{-p-\widetilde{\varepsilon}_j},\quad j=\overline{2,n},\qquad(23)$$

де додатна стала C_9 не залежить від k, $\widetilde{\varepsilon}_j=(\varepsilon_j-\varepsilon_{j-1})/(j-1)$, $j=\overline{2,n}$. Очевидно, оцінки (23) забезпечують збіжність рядів (22).

Умови, які визначають множину $S_j(k)$, $j=\overline{2,n}$, не залежать від змінних $t_{j+1},\ldots,t_n$, тому $S_j(k)$ є декартовим добутком множини

$$F_j(k)=\{(t_1,\ldots,t_j)\in[0;T]^j:$$
$$|\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)|<|k|^{-\omega_j},$$
$$|\Delta_{j-1}(k;t_1,\ldots,t_{j-1})|\geq|k|^{-\omega_{j-1}}\},$$

та $(n-j)$ відрізків $[0;T]$, що відповідають змінним $t_{j+1},\ldots,t_n$. Тоді за теоремою Фубіні

$$\mu_n S_j(k)=T^{n-j}\mu_j F_j(k),\quad j=\overline{2,n}. \qquad (24)$$

Зрозуміло, що

$$\mu_j F_j(k)=\int\limits_{M_j(k)}\mu_j F_j(k;t_1,\ldots,t_{j-1})dt_1\ldots dt_{j-1},$$

де $M_j(k)=\{(t_1,\ldots,t_{j-1})\in[0;T]^{j-1}:$

$$|\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_{j-1})|\geq|k|^{-\omega_{j-1}}\},$$

$$F_j(k;t_1,\ldots,t_{j-1})=$$
$$=\{t_j\in[0;T]:(t_1,\ldots,t_j)\in F_j(k)\},\ j=\overline{2,n}.$$

Щоб оцінити зверху міри одновимірних множин $F_j(k;t_1,\ldots,t_{j-1})$, $j=\overline{2,n}$, зробимо такі побудови. Визначник $\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)$, $j\geq 2$, розвинемо за елементами його останнього рядка і отримане розвинення продиференціюємо за змінною t_j до порядку $(j-1)$, у результаті дістанемо j рівностей

$$\frac{\partial^q\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)}{\partial t_j^q}=\sum_{r=1}^{j}(-1)^{j+r}\lambda_r^q(k)\times$$
$$\times e^{\lambda_r(k)t_j}\Delta_j^r(k;t_1,\ldots,t_{j-1}),\ q=\overline{0,j-1}, \quad (25)$$

де $\Delta_j^r(k;t_1,\ldots,t_{j-1})$, $r=\overline{1,j}$, – мінор визначника $\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)$ порядку $(j-1)$, який відповідає викресленим останньому рядку та r-му стовпцю. Для фіксованих $k\in\mathbb{Z}^p$, $k\neq\vec{0}$, та j, $2\leq j\leq n$, рівності (25) розглянемо як систему j лінійних рівнянь стосовно j змінних

$$\Big\{(-1)^{j+1}e^{\lambda_1(k)t_j}\Delta_j^1(k;t_1,\ldots,t_{j-1}),\ldots,$$
$$e^{\lambda_j(k)t_j}\Delta_j^j(k;t_1,\ldots,t_{j-1})\Big\}.$$

Зауважимо, що визначник системи (25) є визначником $W_j(k)$, а отже, є відмінним від нуля. Застосовуючи правило Крамера для розв'язування системи (25), дістанемо, що

$$e^{\lambda_j(k)t_j}\Delta_j^j(k;t_1,\ldots,t_{j-1})=$$
$$=\sum_{q=0}^{j-1}\frac{\partial^q\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)}{\partial t_j^q}\cdot\frac{W_{j,q+1}(k)}{W_j(k)}. \quad (26)$$

Враховуючи лему 2, зі співвідношень (26) та очевидних рівностей

$$\Delta_j^j(k;t_1,\ldots,t_{j-1})=\Delta_{j-1}(k;t_1,\ldots,t_{j-1}),$$
$$|e^{\lambda_j(k)t_j}|=1,\quad j=\overline{2,n},$$

для $k\neq\vec{0}$ отримаємо, що

$$|\Delta_{j-1}(k;t_1,\ldots,t_{j-1})|\leq$$
$$\leq C_{10}\sum_{q=0}^{j-1}\frac{1}{|k|^q}\left|\frac{\partial^q\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)}{\partial t_j^q}\right|\leq jC_{10}\times$$
$$\times\max_{0\leq q\leq j-1}\left\{\frac{1}{|k|^q}\left|\frac{\partial^q\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)}{\partial t_j^q}\right|\right\}, \quad (27)$$

де стала $C_{10}>0$ виражається тільки через сталі C_2,C_3 і не залежить від k.

Нехай тепер $(t_1,\ldots,t_{j-1})$ – фіксована точка з $M_j(k)$. Розглянемо функції змінної t_j ($t_1,\ldots,t_{j-1}$ – параметри)

$$y_q(k;t_j)=\frac{\operatorname{Re}\partial^{q-1}\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)}{\partial t_j^{q-1}},\ q=\overline{1,j},$$

$$y_{j+q}(k;t_j)=\frac{\operatorname{Im}\partial^{q-1}\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)}{\partial t_j^{q-1}},\ q=\overline{1,j},$$

та функції $z_{q,r}^+(k;t_j)=y_q(k;t_j)+y_r(k;t_j)$, $z_{q,r}^-(k;t_j)=y_q(k;t_j)-y_r(k;t_j)$, $1\leq q<r\leq j$. Із теореми Валле Пуссена [6] випливає, що кількість нулів на $[0;T]$ кожної з функцій $z_{q,r}^+(k;t_j)$, $z_{q,r}^-(k;t_j)$ (якщо вона відмінна від тотожного нуля) не перевищує $C_{11}|k|$, де стала $C_{11}>0$ не залежить від k та $t_1,\ldots,t_{j-1}$.

Розіб'ємо $[0;T]$ точками $0,T$ та всіма нулями всіх нетривіальних функцій $z_{q,r}^+(k;t_j)$, $z_{q,r}^-(k;t_j)$, $1\leq q<r\leq j$; у результаті дістанемо розбиття $[0;T]$ на дрібніші відрізки $J_s=[\xi_{s-1},\xi_s]$, $s=\overline{1,N(k)}$, таке, що:

1) кількість відрізків $N(k)$ цього розбиття не перевищує $C_{12}|k|$ (при цьому стала C_{12} не залежить від $k, t_1, \ldots, t_{j-1}$);

2) на кожному з відрізків J_s цього розбиття знайдеться похідна порядку $r(s)$ $(0 \le r(s) \le j-1)$ за змінною t_j функції $\operatorname{Re}\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)$ або функції $\operatorname{Im}\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)$ така, що в кожній точці $t_j \in J_s$ виконується нерівність

$$\frac{1}{|k|^{r(s)}}\left|\frac{\partial^{r(s)}\operatorname{Re}\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)}{\partial t_j^{r(s)}}\right| \ge$$

$$\ge \max_{0\le r\le j-1}\left\{\frac{1}{|k|^r}\left|\frac{\partial^r\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)}{\partial t_j^r}\right|\right\} \quad (28)$$

або нерівність

$$\frac{1}{|k|^{r(s)}}\left|\frac{\partial^{r(s)}\operatorname{Im}\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)}{\partial t_j^{r(s)}}\right| \ge$$

$$\ge \max_{0\le r\le j-1}\left\{\frac{1}{|k|^r}\left|\frac{\partial^r\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)}{\partial t_j^r}\right|\right\}. \quad (29)$$

Оскільки для кожного фіксованого $(t_1,\ldots,t_{j-1}) \in M_j(k)$ виконується включення $F_j(k;t_1,\ldots,t_{j-1}) \subset$

$$\subset \bigcup_{s=1}^{N(k)}\left(J_s \cap F_j(k;t_1,\ldots,t_{j-1})\right),$$

то

$$\mu_1 F_j(k;t_1,\ldots,t_{j-1}) \le$$

$$\le \sum_{s=1}^{N(k)}\mu_1\left(J_s \cap F_j(k;t_1,\ldots,t_{j-1})\right). \quad (30)$$

Оцінимо міри множин у правій частині нерівності (30). Якщо відрізок J_s є таким, що на ньому виконується нерівність (28) або нерівність (29) при $r(s)=0$, то з оцінок (27) випливає, що для всіх $t_j \in J_s$, $(t_1,\ldots,t_{j-1}) \in M_j(k)$, виконується нерівність

$$|\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)| \ge \frac{1}{jC_{10}}\times$$

$$\times|\Delta_{j-1}(k;t_1,\ldots,t_{j-1})| \ge \frac{1}{jC_{10}}|k|^{-\omega_{j-1}}. \quad (31)$$

Тому жодна точка відрізка J_s не може належати до множини $F_j(k;t_1,\ldots,t_{j-1})$. Дійсно, якщо $t_j \in F_j(k;t_1,\ldots,t_{j-1})$ (при цьому $(t_1,\ldots,t_{j-1}) \in M_j(k)$), то виконується нерівність $|\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)| < |k|^{-\omega_j}$. Якщо до того ж, $t_j \in J_s$, то з отриманої оцінки та нерівності (31) дістанемо, що виконується нерівність $|k|^{-\omega_j} > |k|^{-\omega_{j-1}}/(jC_{10})$, яка є суперечливою для великих $|k|$, бо $\omega_{j-1} < \omega_j$, $j=\overline{1,n}$.

Отже, до множини $F_j(k;t_1,\ldots,t_{j-1})$ можуть входити точки тільки тих відрізків J_s, для яких виконується нерівність (28) або нерівність (29) при $r(s)\ge 1$. Якщо відрізок J_s є таким, що $j-1 \ge r(s) \ge 1$, то за лемою 2.2 у [1, с. 15]

$$\mu_1\{t_j \in J_s : |\operatorname{Re}\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)| < |k|^{-\omega_j}\} \le$$

$$\le C_{13}\sqrt[r(s)]{|k|^{\omega_{j-1}-\omega_j-r(s)}}, \quad (32)$$

якщо виконується нерівність (28), або

$$\mu_1\{t_j \in J_s : |\operatorname{Im}\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)| < |k|^{-\omega_j}\} \le$$

$$\le C_{14}\sqrt[r(s)]{|k|^{\omega_{j-1}-\omega_j-r(s)}}, \quad (33)$$

якщо виконується нерівність (29).

Враховуючи очевидні включення

$$\{t_j \in J_s : |\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)| < |k|^{-\omega_j}\} \subset$$

$$\subset \{t_j \in J_s : |\operatorname{Re}\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)| < |k|^{-\omega_j}\},$$

$$\{t_j \in J_s : |\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)| < |k|^{-\omega_j}\} \subset$$

$$\subset \{t_j \in J_s : |\operatorname{Im}\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)| < |k|^{-\omega_j}\},$$

де $j=\overline{2,n}$, $k \ne \vec{0}$, і те, що $N(k) \le C_{12}|k|$, $r(s) \le j-1$, з оцінок (30), (32), (33) одержимо, що для довільного $(t_1,\ldots,t_{j-1}) \in M_j(k)$

$$\mu_1 F_j(k;t_1,\ldots,t_{j-1}) \le C_{15}|k|^{(\omega_{j-1}-\omega_j)/(j-1)} \le$$

$$\le C_{15}|k|^{-p-\tilde{\varepsilon}_j}, \quad j=\overline{2,n}, \quad k \ne \vec{0}. \quad (34)$$

Із оцінок (34) та формул (24) випливає істинність нерівностей (23).

Теорему доведено.

Розглянемо частковий випадок, коли

$$t_j = (j-1)t_0, \quad j=\overline{1,n}, \quad (35)$$

де $0 < t_0 \le \frac{T}{n-1}$, тобто вузли $t_1,\ldots,t_n$ є рівновіддаленими. У цьому випадку визначник $\Delta(k)$, $k \ne \vec{0}$, обчислюється за формулою

$$|\Delta(k)| = \prod_{1\le q<j\le n}\left|e^{\lambda_j(k)t_0} - e^{\lambda_q(k)t_0}\right| =$$

$$= \prod_{1\le q<j\le n} |e^{i|k|(\sigma_j(k)-\sigma_q(k))|k|t_0} - 1| = 2^{n(n-1)/2}\times$$

$$\times \prod_{1\le q<j\le n} |\sin((\sigma_j(k)-\sigma_q(k))t_0/2)|\,, \qquad (36)$$

Теорема 1 не дає відповіді на питання про виконання оцінки (8) для визначника (36), бо множина тих векторів $(t_1,\ldots,t_n)\in[0;T]^n$, для яких виконуються співвідношення (35), де $t_0\in(0;T/(n-1)]$, є одновимірною і має нульову n-вимірну міру Лебега.

Для того, щоб оцінити знизу визначник (36), оцінимо знизу кожен з множників у формулі (36). Для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$, $k\ne\vec{0}$, через $H_{jq}(k)$, $n\ge j>q\ge 1$, позначимо множину

$$H_{j,q}(k)=\{t_0\in(0;T/(n-1)]:$$
$$|\sin(\xi_{j,q}(k)t_0)|<|k|^{-\gamma}\},\quad \gamma>p,$$

де $\xi_{j,q}(k)=(\sigma_j(k)-\sigma_q(k))|k|/2$. Множиною розв'язків тригонометричної нерівності

$$|\sin(\xi_{j,q}(k)t_0)|<|k|^{-\gamma},\quad k\ne\vec{0},\quad \gamma>p,$$

є об'єднання $\bigcup_{l\in\mathbb{Z}} I_{k,l}$ інтервалів $I_{k,l}$, де

$$I_{k,l}=\left(\frac{-\arcsin|k|^{-\gamma}+\pi l}{|\xi_{j,q}(k)|};\frac{\arcsin|k|^{-\gamma}+\pi l}{|\xi_{j,q}(k)|}\right).$$

Якщо точка t_0 одночасно належить до множини $H_{j,q}(k)$ та деякому інтервалу $I_{k,l}$, то виконується нерівність $\pi|l|\le|\xi_{j,q}(k)t_0|+\pi/2$, з якої, на підставі оцінок (18), випливає, що $|l|\le C_{16}|k|$. Таким чином, виконується включення

$$H_{j,q}(k)\subset\bigcup_{|l|\le C_{16}|k|} I_{k,l},\quad k\ne\vec{0}.$$

Оскільки довжина кожного інтервала $I_{k,l}$ дорівнює $2\arcsin|k|^{-\gamma}/|\xi_{j,q}(k)|$, то з отриманого включення, оцінок (15) та елементарної нерівності

$$\forall x\in[0;1]\quad \arcsin x\le \pi x/2,$$

випливає, що для міри множини $H_{j,q}(k)$ виконується оцінка

$$\mu_1 H_{j,q}(k)\le\sum_{|l|\le C_{16}|k|}\mu_1 I_{k,l}\le C_{17}|k|^{-\gamma}.$$

Отже, при $\gamma>p$ кожен ряд $\sum_{|k|>0}\mu_1 H_{j,q}(k)$, $n\ge j>q\ge 1$, є збіжним. Тому для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $t_0\in(0;T/(n-1)]$ нерівність (8) виконується для визначника (36) для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$, якщо $\omega>pn(n-1)/2$.

4. Оцінки для визначника $\Gamma(k)$.

Теорема 2. *Нехай $\Delta(k)\ne 0$ для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$ і нехай існує стала $C_{20}>0$ така, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ виконується нерівність*

$$|A_n(ik)|\ge C_{18}|k|^n. \qquad (37)$$

Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^m$) векторів $\vec{\tau}=(\tau_1,\ldots,\tau_m)\in[0;T]^m$ оцінка (9) виконується для всіх (крім скінченної кількості) $k\in\mathbb{Z}^p$, якщо $\eta>pmn$.

Доведення. Для кожного $k\in\mathbb{Z}^p\backslash\{\vec{0}\}$ запровадимо такі множини:

$$E(k)=\{\vec{\tau}\in[0;T]^m:|\Gamma(k)|<|k|^{-\eta}\}.$$

З огляду на лему 1 для доведення теореми досить перевірити, що ряд $\sum_{|k|>0}\mu_m E(k)$ є збіжним, якщо $\eta>mnp$.

Розглянемо такі величини: $\Upsilon_0(k)=\Gamma(k)$,

$$\Upsilon_j(k)=A_n^j(ik)-\sum_{r=j+1}^{m}A_n^j(ik)B_r(ik)I_k(\tau_r)-$$

$$-A_n^{j-1}(ik)\sum_{r=1}^{j}B_r(ik),\quad j=\overline{1,m-1},\quad (38)$$

$$\Upsilon_m(k)=A_n^m(ik)-\sum_{j=1}^{m}A_n^{m-1}(ik)B_j(ik).$$

Легко перевірити, що $E(k)\subset\bigcup_{j=1}^{m+1}E_j(k)$, де $E_{m+1}=\{\vec{\tau}\in[0;T]^m:|\Upsilon_m(k)|\le\eta_m(k)\}$,

$$E_j(k)=\{\vec{\tau}\in[0;T]^m:|\Upsilon_{j-1}(k)|\le\eta_{j-1}(k),$$
$$|\Upsilon_j(k)|>\eta_j(k)\},\quad j=\overline{1,m},$$

а $\eta_j(k)=|k|^{mn-(m-j)n(p+1)-\varepsilon_j}$, $\varepsilon_j>0$, $j=\overline{0,m}$, $\varepsilon_0>\varepsilon_1>\ldots>\varepsilon_m>0$.

Тому збіжність ряду $\sum_{|k|>0}\mu_m E(k)$ є наслідком збіжності усіх рядів $\sum_{|k|>0}\mu_m E_j(k)$, $j=\overline{1,m+1}$.

Оскільки степені усіх многочленів $B_j(\xi)$ є меншими від n, то існує таке $K_1 \in \mathbb{N}$, що для $|k| > K_1$ виконується оцінка

$$|\Upsilon_m(k)| = |A_0^m(k)|\times$$
$$\times \left|\sum_{j=1}^{m} B_j(k)/A_0(k) - 1\right| \geq \frac{|A_0(k)|^m}{2}. \quad (39)$$

Тоді з нерівностей (37), (39) отримуємо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K_1$, виконується оцінка

$$|\Upsilon_m(k)| \geq C_{19}|k|^{mn}/2. \quad (40)$$

З оцінки (40) випливає, що $E_{m+1}(k) = \emptyset$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > \max\{K_1, K_2\}$, де $K_2 = (2/C_{18})^{1/\varepsilon_m}$. Тому $\mu_m E_{m+1}(k) = 0$, якщо $|k| > \max\{K_1, K_2\}$, а отже, ряд $\sum_{|k|>0} \mu_m E_{m+1}(k)$ є збіжним.

Для кожного j, $j = \overline{1,m}$, позначимо:

$$\vec{\tau_j} = (\tau_1, \ldots, \tau_{j-1}, \tau_{j+1}, \ldots, \tau_m),$$
$$E_j(k, \vec{\tau_j}) = \{\tau_j \in [0;T] : \vec{\tau} \in E_j(k)\}.$$

Із основної властивості функції Ґріна [1] випливає, що виконуються рівності

$$L\left(\partial/\partial\tau_j, k\right)\Upsilon_{j-1}(k) = \Upsilon_j(k), \quad k \in \mathbb{Z}^p, \quad (41)$$

де $j = \overline{1,m}$. Якщо $\vec{\tau} \in E_j(k)$, $j = \overline{1,m}$, то з формул (41) випливає, що

$$|L\left(\partial/\partial\tau_j, k\right)\Upsilon_{j-1}(k)| \geq \eta_j(k), k \in \mathbb{Z}^p, \quad (42)$$

де $j = \overline{1,m}$. Для оцінки зверху міри множини $E_j(k, \vec{\tau_j})$ застосуємо лему 3. Отримаємо

$$\mu_1 E_j(k, \vec{\tau_j}) \leq C_{20}|k|\left(\eta_{j-1}(k)/\eta_j(k)\right)^{1/n} \leq$$
$$\leq C_{20}|k|^{-p-\xi_j}, \quad j = \overline{1,m}, \quad k \in \mathbb{Z}^p,$$

де $\xi_j = (\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j)/n > 0$, $j = \overline{1,m}$. Тоді за теоремою Фубіні

$$\mu_m E_j(k) \leq C_{20} T^{m-1}|k|^{-p-\xi_j}, \ j = \overline{1,m}. \quad (43)$$

Із нерівностей (43) отримуємо збіжність рядів $\sum_{|k|>0} \mu_m E_j(k)$, $j = \overline{1,m}$, а отже, й ряду $\sum_{|k|>0} \mu_m E(k)$.

Теорему доведено.

5. Висновки. У роботі встановлено метричні оцінки знизу для малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку задачі з багатоточковими умовами для навантаженого строго гіперболічного рівняння.

Результати поширено на випадок малих знаменників, що виникають у задачах з багатоточковими умовами для систем рівнянь із частинними похідними.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
2. *Пташник Б.Й., Симотюк М.М.* Багатоточкова задача для неізотропних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 2. – С. 241–254.
3. *Медвідь О.* Інтегральна задача для навантажених рівнянь із частинними похідними // Математичний вісник НТШ. – 2007. – Т. 4. – С. 201–213.
4. *Симотюк М.М.* Багатоточкова задача для навантаженого полігармонічного рівняння // Прикладні проблеми механіки і математики. – Науковий збірник, 2003, вип. 1. – С. 25–34.
5. *Симотюк М.М.* Діофантові наближення визначника задачі з двома кратними вузлами для рівнянь із частинними похідними // Математичний вісник НТШ. – 2005, Т. 2. – С. 199–212.
6. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: в 2-х т. – М.: Изд–во иностр. лит., 1953. – Т. 1. – 346 с.
7. *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984. – 446 с.