

ПРО АБСЦИСИ ЗБІЖНОСТІ ВИПАДКОВИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Досліджується розподіл абсцис збіжності випадкових рядів Діріхле з попарно незалежними і неоднаково розподіленими випадковими коефіцієнтами. Отримані результати узагальнюють деякі теореми Tian Fanji, П.Філевича та інших.

Distribution of the abscissas of convergence for a random Dirichlet series with pairwise independent and non-identically distributed random coefficients is considered. The obtained results generalizes some theorems of Tian Fanji, P.Filevych and others.

1. Вступ. Нехай (Ω, \mathcal{A}, P) — ймовірнісний простір, а $\mathbf{f} = (f_k(\omega))_{k=0}^{+\infty}$ — послідовність комплекснозначних випадкових величин на ньому. Нехай $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{+\infty}$ — зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$ ($k \in \mathbb{Z}_+$), де $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$. Через $\mathcal{D}(\Lambda)$ позначимо клас формальних випадкових рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = F(z, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) e^{z\lambda_k}$$

($z \in \mathbb{C}$, $\omega \in \Omega$). Через $\sigma_{36}(F, \omega)$ і $\sigma_a(F, \omega)$ позначимо відповідно абсциси збіжності і абсолютної збіжності цього ряду. Відомо [1–4], що для фіксованого $\omega \in \Omega$

$$\sigma_a(F, \omega) \leq \sigma_{36}(F, \omega) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |f_k(\omega)|}{\lambda_k} \leq \leq \sigma_a(F, \omega) + \tau(\Lambda), \quad (1)$$

де

$$\tau(\Lambda) := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln n / \lambda_n,$$

У випадку, коли $\tau(\Lambda) = 0$,

$$\sigma_{36}(F, \omega) = \sigma_a(F, \omega) = \liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |f_k(\omega)|}{\lambda_k} \quad (2)$$

для фіксованого $\omega \in \Omega$. Позначимо

$$\sigma(F, \omega) := \sigma_a(F, \omega).$$

Якщо послідовність \mathbf{f} є послідовністю незалежних випадкових величин (f_k), то за законом нуля і одиниці Колмогорова [5, с.43] випадкова величина $\sigma(F, \omega)$ є майже напевно (м.н.) сталою, тобто, $\sigma(F, \omega) = \sigma \in [0, +\infty)$ м.н.

У статтях [6–8] розглядалось питання про абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле з класу $\mathcal{D}(\Lambda)$ у випадку $\tau(\Lambda) < +\infty$. Так, у статті [6, Теорема 1] доведено, що у випадку, коли $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$, $\tau(\Lambda) < +\infty$, $\liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |a_k|}{\lambda_k} = +\infty$, а для математичних сподівань виконується умова

$$(\exists \alpha > 0)(\forall k \geq 0): \mathbf{M}|Z_k|^\alpha < +\infty, \quad (3)$$

то $\sigma_a(F, \omega) = +\infty$ м.н. Якщо, крім цього, $\liminf_{k \rightarrow +\infty} k/\lambda_k < +\infty$ (звідси випливає, що $\tau(\Lambda) = 0$) і

$$(\exists \beta > 0)(\forall k \geq 0): \mathbf{M}|Z_k|^{-\beta} < +\infty, \quad (4)$$

то [6, Теорема 3] з умови $\liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |a_k|}{\lambda_k} = 0$ випливає, що $\sigma_a(F, \omega) = 0$ м.н. Не складно зауважити, що те ж саме тримаємо, якщо м.н. для всіх достатньо великих k виконуються нерівності $k^{-\gamma} \leq |Z_k(\omega)| < k^\gamma$, $\gamma > 0$. Останні ж нерівності за лемою Бореля-Кантелі випливають з умов (3) і (4) (що виконуються для всіх досить великих k), наприклад, з $\gamma = \max\{2/\alpha, 2/\beta\}$.

Найбільш загальною, той самий висновок отримуємо коли

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |Z_k(\omega)|}{\lambda_k} = 0 \quad \text{м.н.} \quad (5)$$

Власне виконується таке твердження.

Твердження 1. Нехай $\tau(\Lambda) = 0$, $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ і має коефіцієнти вигляду $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$.

Якщо виконується умова (5), то м.н.

$$\sigma_{зб}(F, \omega) = \sigma_a(F, \omega) = \alpha_0 := \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |a_k|}{\lambda_k}.$$

Доведення Твердження 1 елементарно отримуємо з (1), тому його не наводимо.

З тих самих мотивів у випадку $\alpha_0 = +\infty$ для рівності $\sigma_a(F, \omega) = +\infty$ м.н. замість умови $\tau(\Lambda) = 0$ достатньо, щоб $\tau(\Lambda) < +\infty$.

У статтях [7, 8] у випадку незалежних випадкових величин $\mathbf{f} = (f_k)$, зокрема, узагальнювалось на клас $\mathcal{D}(\Lambda)$ твердження відомої гіпотези Блекуела для випадкових степеневих рядів, доведеної в [9] (див. також [5, с.38]). Крім цього, в [7] у випадку, коли $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$, $\tau(\Lambda) < +\infty$, $0 < c_1 \leq |Z_k(\omega)| \leq c_2 < +\infty$ м.н. і $\mathbf{M}Z_k = 0$ ($k \geq 0$), доведено, що $\sigma_{зб}(F, \omega) \leq \sigma_a(F, \omega) + \tau(\Lambda)/2$ м.н.

Варто відзначити, що умову (5) можна замінити умовою на послідовність функцій розподілу випадкових величин $(|Z_k(\omega)|)$. Власне, за достатньою умовою збіжності до нуля м.н., для того, щоб виконувалась умова (5) достатньо, щоб $(\forall \varepsilon > 0)$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P\{\omega : |\ln |Z_k(\omega)|| \geq \varepsilon \lambda_k\} < +\infty,$$

а вже остання умова виконується, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ збігається ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (1 - F_k^*((1 + \varepsilon)^{\lambda_k})) + F_k^*(e^{-\varepsilon \lambda_k}) < +\infty,$$

де $F_k^*(x) := P\{\omega : |Z_k(\omega)| < x\}$ — функція розподілу $|Z_k(\omega)|$.

Виявляється, що у загальному випадку рядів з класу $\mathcal{D}(\Lambda)$ можна знайти подібну умову (що виявлятиметься і у певному сенсі близькою до необхідної), яка гарантуватиме, що абсциса збіжності ряду Діріхле $F(z, \omega)$ м.н. дорівнює наперед заданому дійсному числу. Встановлення оцінок абсцис збіжності вказаних загальних випадкових рядів Діріхле, з яких, зокрема, впливатиме щойно описаний ефект, є метою даної статті.

Наступний варіант добре відомої леми Бореля-Кантелі дозволить нам умову сукупної незалежності послідовності випадкових

величин замінити на умову їхньої попарної незалежності.

Лема 6. Нехай (A_k) — довільна послідовність подій, тобто, $A_k \in \mathcal{A}$ ($k \in \mathbb{N}$). Виконуються наступні твердження:

1. Якщо збігається ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k)$, то серед подій (A_k) з ймовірністю, що дорівнює одиниці, відбувається лише скінченна їх кількість, тобто, $P(\overline{C}) = 1$, де $C := \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$ — подія, яка полягає в тому, що серед подій (A_k) відбувається нескінченна їх кількість.

2. ([10]–[13, с.84]) Якщо події (A_k) попарно незалежні і $P(\overline{C}) = 1$, тобто, серед подій (A_k) з ймовірністю, що дорівнює одиниці, відбувається лише скінченна їх кількість, то $\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) < +\infty$.

Друга частина цієї леми є уточненням добре відомого зі стандартних курсів теорії ймовірностей варіанту леми Бореля-Кантелі (див. наприклад, [5, с.7], [14, с.68]), у якій припускається сукупна незалежність подій (A_k) .

Зазначимо, що дана стаття є узагальненням на клас випадкових рядів Діріхле, виконаних недавно нами досліджень про радіуси збіжності випадкових лакунарних степеневих рядів [15], а з отриманих нами там тверджень у вигляді простих наслідків впливають, наприклад, ряд результатів з статей [16–18].

2. Основні результати. Надалі скрізь вважатимемо, що $\tau(\Lambda) = 0$.

Теорема 6. Нехай $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$. Припустимо, що $(|f_k(\omega)|)$ — послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу $F_k(x) := P\{\omega : |f_k(\omega)| < x\}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$. Виконуються наступні твердження:

а) $\sigma(\omega) = \sigma(F, \omega) \geq \rho \in (-\infty, +\infty)$ м.н. $\implies (\forall \varepsilon > 0)$: $\sum_{k=0}^{+\infty} (1 - F_k((e^{-\rho} + \varepsilon)^{\lambda_k})) < \infty$;

б) Якщо існує послідовність (δ_k) така, що $\delta_k > -\infty$ ($k \geq 0$), $\lim_{k \rightarrow +\infty} \delta_k = e^{-\rho}$, $\rho \in$

$(-\infty, +\infty]$, і $\sum_{k=0}^{+\infty} (1 - F_k(\delta_k^{\lambda_k})) = +\infty$, то $\sigma(F, \omega) \leq \rho$ м.н.

Доведення теореми 6. а) Вважатимемо спочатку, що $\sigma(F, \omega) \geq \rho \in (-\infty, 0]$ м.н., тобто, з (2) маємо, що $(\exists B \in \mathcal{A}, P(B) = 1)(\forall \omega \in B)$:

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f_k(\omega)|}{\lambda_k} \leq -\rho.$$

За означенням верхньої границі

$(\forall \omega \in B)(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^*(\omega) \in \mathbb{N})(\forall k \geq k^*(\omega))$:

$$|f_k(\omega)| < (e^{-\rho} + \varepsilon)^{\lambda_k},$$

Позначимо

$$A_k := \{\omega : |f_k(\omega)| < (e^{-\rho} + \varepsilon)^{\lambda_k}\}.$$

Зрозуміло, що $B \subset C := \bigcup_{N=0}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$, а подія $\overline{C} := \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} \overline{A}_k$ полягає в тому, що “серед подій послідовності (\overline{A}_k) відбувається нескінченна їх кількість”. Оскільки $P(C) = 1$, то $P(\overline{C}) = 0$, а з попарної незалежності випадкових величин $(|f_k(\omega)|)$ впливає попарна незалежність подій (A_k) , і, тому, за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(\overline{A}_k) < +\infty.$$

Залишається врахувати, що

$$P(\overline{A}_k) = 1 - F_k((e^{-\rho} + \varepsilon)^{\lambda_k}).$$

Якщо $\sigma(\omega, F) \geq \rho > 0$ м.н., то для ряду Діріхле $F^*(z, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k^*(\omega) e^{z\lambda_k}$, де $f_k^*(\omega) = f_k(\omega) e^{\rho\lambda_k}$, абсциса збіжності $\sigma^*(\omega) = \sigma(\omega, F) - \rho \geq 0$ м.н., а функція розподілу $|f_k^*(\omega)|$: $F_k^*(x) = F_k(x \cdot e^{-\rho\lambda_k})$, і

$$F_k^*((1 + \varepsilon)^{\lambda_k}) = F_k((e^{-\rho} + \varepsilon_1)^{\lambda_k}), \quad \varepsilon_1 = \varepsilon e^{-\rho}.$$

Цим завершується доведення п.а).

б) Позначимо $A_k = \{\omega : |f_k(\omega)| < \delta_k^{\lambda_k}\}$. Тоді

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(\overline{A}_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - F_k(\delta_k^{\lambda_k})) = +\infty$$

і за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі $P(\overline{C}) = 1$, де $\overline{C} := \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} \overline{A}_k$. Звідси, $(\forall \omega \in \overline{C})(\forall N \in \mathbb{Z}_+)(\exists k_N(\omega) \geq N)$:

$$|f_k(\omega)| \geq \delta_k^{\lambda_k} \quad (k = k_N(\omega), N \geq 1),$$

тому,

$$-\ln |f_k(\omega)| \leq -\lambda_k \ln \delta_k \quad (k = k_N(\omega), N \geq 1),$$

звідки, остаточно м.н.

$$\begin{aligned} \sigma(F, \omega) &= \underline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |f_k(\omega)|}{\lambda_k} \leq \\ &\leq \underline{\lim}_{\substack{N \rightarrow +\infty, \\ k = k_N(\omega)}} \frac{-\ln |f_k(\omega)|}{\lambda_k} \leq -\underline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \ln \delta_k = \rho. \end{aligned}$$

Теорема 7. Нехай $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$.

а) Якщо існують $\rho \in (-\infty, +\infty)$ і послідовність (ε_k) такі, що $\varepsilon_k \rightarrow +0$ ($k \rightarrow +\infty$) і $\sum_{k=0}^{+\infty} (1 - F_k((e^{-\rho} + \varepsilon_k)^{\lambda_k})) < \infty$, то

$$\sigma(F, \omega) \geq \rho \text{ м.н.}$$

б) $\sigma(F, \omega) = -\infty$ м.н. $\implies (\forall E > 1)$: $\sum_{k=0}^{+\infty} (1 - F_k(E^{\lambda_k})) = +\infty$.

Доведення теореми 2. а) Позначимо тепер $A_k = \{\omega : |f_k(\omega)| < (e^{-\rho} + \varepsilon_k)^{\lambda_k}\}$. Враховуючи, що $1 - F_k((e^{-\rho} + \varepsilon_k)^{\lambda_k}) = P(\overline{A}_k)$, з умови

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (1 - F_k((e^{-\rho} + \varepsilon_k)^{\lambda_k})) < \infty$$

отримаємо $\sum_{k=0}^{+\infty} P(\overline{A}_k) < \infty$, і за першою частиною леми Бореля-Кантелі $P(\overline{C}) = 0$, $\overline{C} := \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} \overline{A}_k$. Звідси $P(C) = 1$, $C := \bigcup_{N=0}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$ і, тому, для кожного $\omega \in C$ існує $k = k^*(\omega)$ таке, що $\omega \in A_k$ для всіх $k \geq k^*(\omega)$, тобто, $(\forall k \geq k^*(\omega)) : |f_k(\omega)| < (e^{-\rho} + \varepsilon_k)^{\lambda_k}$. Звідки,

$$\begin{aligned} \sigma(F, \omega) &= \underline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |f_k(\omega)|}{\lambda_k} \geq \\ &\geq -\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \ln(e^{-\rho} + \varepsilon_k) = \rho \text{ м.н.} \end{aligned}$$

б) За умовою $\sigma(F, \omega) = -\infty$ м.н. Тому, за означенням $\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f_k(\omega)|}{\lambda_k} = +\infty$ м.н.

$(\exists B \in \mathcal{A}, P(B) = 1)(\forall \omega \in B)(\forall E > 1)(\forall N \in \mathbb{Z}_+)(\exists k_N(\omega) \geq N, k_N(\omega) \in \mathbb{N})$:

$$|f_k(\omega)| \geq E^{\lambda_k} \quad (k = k_N(\omega)).$$

Звідси, $B \subset \overline{C} := \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} \overline{A}_k$, де $\overline{A}_k = \{\omega : |f_k(\omega)| \geq E^{\lambda_k}\}$, а, тому, $P(\overline{C}) = 1$. Отже за першою частиною леми Бореля-Кантелі отримуємо $\sum_{k=0}^{+\infty} P(\overline{A}_k) = +\infty$. Залишається знову пригадати, що $P(\overline{A}_k) = 1 - F_k(E^{\lambda_k})$.

3. Деякі наслідки.

Наведемо кілька наслідків.

Твердження 2. Нехай $f \in \mathcal{D}(\Lambda)$, а $(|f_k(\omega)|)$ — попарно незалежні. Якщо існують додатні випадкові величини $a(\omega)$, $b(\omega)$ такі, що $(\exists k_0 \in \mathbb{Z}_+)(\forall x \geq 0)(\forall k \geq k_0): F_k(x) \leq F_a(x) := P\{\omega: a(\omega) < x\} \wedge F_k(x) \geq F_b(x) := P\{\omega: b(\omega) < x\}$ і $F_a(+0) < 1$ та

$$(\forall \varepsilon > 0): \mathbf{M}\left(n_\Lambda\left(\frac{\ln b}{1 + \varepsilon}\right)\right) < +\infty, \quad (6)$$

де $n_\Lambda := \sum_{\lambda_k \leq t} 1$ — лічильна функція послідовності Λ , то $\sigma(F, \omega) = 0$ м.н.

Доведення. Переконаємось спочатку в тому, що можна застосувати п. **б)** теореми 6. Оскільки для $\delta_k = (\lambda_k)^{-1/\lambda_k}$ маємо $\delta_k \rightarrow 1 - 0$, $\delta_k^{\lambda_k} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow +\infty$), то $\rho = 0$ і для всіх досить великих k , $1 - F_a(\delta_k^{\lambda_k}) \geq 1 - F_k(\delta_k^{\lambda_k}) \geq 1 - (1 + F_a(+0))/2 = (1 - F_a(+0))/2 > 0$, тобто, умови п. **б)** теореми 6 виконуються і, тому, $\sigma(F, \omega) \leq 0$ м.н.

Доведемо протилежну нерівність. Переконаємось в тому, що можна застосувати п. **а)** теореми 7. Зауважимо, що

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\left(n_\Lambda\left(\frac{\ln b}{1 + \varepsilon}\right)\right) &= \int_0^{+\infty} n_\Lambda\left(\frac{\ln x}{1 + \varepsilon}\right) dF_b(x) = \\ &= \int_0^{+\infty} (1 - F_b((1 + \varepsilon_0)^t)) dn_\Lambda(t), \end{aligned}$$

де $\varepsilon_0 = e^{1+\varepsilon} - 1$. Тоді з умов нашого Твердження 2 випливає, що для будь-якого $\varepsilon_0 > 0$: $\sum_{k=0}^{+\infty} (1 - F_b((1 + \varepsilon_0)^{\lambda_k})) < +\infty$. Звідси вже нескладно отримати, що виконується умова п. **а)** теореми 7 з $\rho = 0$. Застосування теореми 7 доводить, що $\sigma(F, \omega) \geq 0$ м.н.

Нескладно зауважити, що умова (6) виконується як тільки

$$\begin{aligned} (\exists \alpha, \beta \in (0, +\infty)): n_\Lambda(t) &\leq \beta t^\alpha \quad (t \geq t_0), \\ \mathbf{M}((\ln^+ b)^\alpha) &< +\infty. \end{aligned}$$

Якщо $\lambda_k \equiv k$, то можна вибрати $\alpha = 1$ і, звідси отримуємо теорему 2.1 з [18].

Цілком подібно до Твердження 2 доводиться таке твердження.

Твердження 3. Нехай $f \in \mathcal{D}(\Lambda)$, а $(|f_k(\omega)|)$ — попарно незалежні. Якщо існують додатні випадкові величини $a(\omega)$, $b(\omega)$ такі, що $(\exists k_0 \in \mathbb{Z}_+)(\forall x \geq 0)(\forall k \geq k_0):$

$F_k(x) \leq F_a(x) \wedge F_k(x) \geq F_b(x)$ і $F_a(e^{-\rho} + 0) < 1$ та

$$\int_0^{+\infty} (1 - F_b((e^{-\rho} + \varepsilon)^x)) dn_\Lambda(x) < +\infty \quad (7)$$

для кожного $\varepsilon > 0$, то $\sigma(F, \omega) = \rho$ м.н.

Умову (7) нескладно переписати у вигляді (6) через математичне сподівання.

Автори статті щиро вдячні А.О. Куриляку за цінні зауваження.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Мандельбройт С.* Ряды Дирихле, принципы и методы. — М.: Мир, 1973.
2. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент. — М.: Наука, 1976.
3. *Шеремета М.М.* Цілі ряди Діріхле. — К.: ІСДО, 1993.
4. *Задорожна О.Ю., Скасків О.Б.* Елементарні зауваження про абсциси збіжності інтегралів Лапласа-Стілт'єса // Буковинський матем. журн. — 2013. — Т.1, №3-4. С.45-50.
5. *Kahane J.-P.* Some random series of functions. — 2nd. ed. — Cambridge stud. in adv. math. 5. — Cambridge Univ. Press, 1985. — 308 p.
6. *Tian F.* Growth of random Dirichlet series // Acta Math. Sci. — 2000. V.20, №3. — P.390-396.
7. *Filevych P.V.* On the relations between the abscissa of convergence and the abscissa of absolute convergence of random Dirichlet series // Mat. Stud. — 2003. — V.20, №1. — P.33-39.
8. *Ding X., Xiao Y.* Natural boundary of random Dirichlet series // Укр. матем. журн. — 2006. — Т.58, №7. — С.997-1005.
9. *Ryll-Nardzewski C.* D.Blackwell's conjecture on power series with random coefficients // Studia Math. — 1953. — V.13. — P.30-36.
10. *Erdős P., Rényi A.* On Cantor's series with convergent $\sum 1/q_n$ // Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös. Sect. Math. — 1959. — V.2. — P.93-109.
11. *Petrov V.V.* Sums of independent random variables. — New York: Springer, 1975.
12. *Мартикайнен А.И., Петров В.В.* О лемме Бореля-Кантелли // Записки научн. сем. Ленинград. отдел. мат. инст. Стеклова. — 1990. — Т.184. — С.200-207 (English transl. in: J. Math. Sci., 1994, **63**, 540-544).
13. *Billingsley P.* Probability and measure. — New York: Wiley, 1986.
14. *Скасків О.Б.* Теорія ймовірностей. — Львів: Число, 2012. — 143 с.

-
15. *Shapovalovska L.O., Skaskiv O.B.* On the radius of convergence of random gap power series // Int. Journal of Math Analysis. – 2015 (подано до друку)
 16. *Arnold L.* Über die Konvergenz einer zufälligen Potenzreihe // J. Reine Angew. Math. – 1966. – V.222. – P.79–112.
 17. *Arnold L.* Konvergenzprobleme bei zufälligen Potenzreihen mit Lücken // Math. Zeitschr. – 1966. – Bd.92. – S.356–365.
 18. *Roters K.* Convergence of random power series with pairwise independent Banach-space-valued coefficients // Statistics and Probability Letters. – 1993. – V.18. – P.121–123.