УДК 517.93

©2015 р. І.А. Бойцова

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

УСЕРЕДНЕННЯ У ЛІНІЙНІЙ ЗА КЕРУВАННЯМ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ЗІ ШВИДКИМИ ТА ПОВІЛЬНИМИ ЗМІННИМИ

Задача оптимального керування містить систему диференціальних рівнянь зі швидкими та повільними змінними та термінальний критерій якості. Наводиться схема усереднення диференціальних рівнянь, у яких керування є лінійним. Доводиться, що оптимальне керування усередненої задачі є асимптотично оптимальним керуванням заданої задачі.

An optimal control problem is described by a system of differential equations with rapid and slow variables and by the terminal criterion of quality. We provide a schema of averaging of differential equations with a linear control. We prove that the optimal control of the averaging problem is asymptotically optimal for the initial problem.

1. Вступ. Використання методу усереднення для розв'язування диференціальних рівнянь зі швидкими та повільними змінними має таку особливість, що при усереднені рівнянь повільної підсистеми необхідно враховувати вплив швидких змінних. Тому для побудови усередненої задачі можна використовувати схему, аналогічну схемі М.М. Хапаєва [1–3]. Це означає, що усереднення функцій з правих частин диференціальних рівнянь повільної підсистеми проводиться вздовж швидких розв'язків виродженої задачі. Усереднена задача стає простішою за дану та складається тільки з повільної підсистеми.

Метод усереднення використовується і для розв'язування відповідних задач оптимального керування зі швидкими та повільними змінними і термінальним критерієм якості. Відомими є алгоритми [4,5], за якими будується асимптотично оптимальне керування задачі, якщо існує оптимальне керування усередненої задачі. При цьому множина допустимих керувань даної задачі суттєво відрізняється від множини допустимих керувань усередненої задачі.

В роботах [6–9] розглядаються нелінійні та лінійні за керуванням задачі оптимального керування, диференціальні рівняння яких мають стандартний вигляд, при усереднені яких множина допустимих керувань не змінюється. Доведено, що оптимальне керування усередненої задачі за визначеними умовами є асимптотично оптимальним керуванням даної задачі.

Дана робота присвячена доведенню аналогічного твердження для задач оптимального керування, лінійних за керуванням, та у яких диференціальні рівняння містять швидкі та повільні змінні.

2. Постановка задачі. Розглянемо задачу оптимального керування, яка складається з системи диференціальних рівнянь зі швидкими та повільними змінними

$$\dot{x} = \varepsilon\left[f\left(t,x,y\right) + A\left(t,x,y\right)\cdot u\right],\ x\left(0\right) = x_0,$$
$$\dot{y} = g\left(t,x,y\right),\quad y\left(0\right) = y_0, \tag{1}$$

та термінальним критерієм якості

$$J\left[u\right] = \varphi\left(x\left(T\right)\right) \to \min_{u\in U}, \tag{2}$$

де час $t \in [0,T]$, $T = L\varepsilon^{-1}$, $L > 0$ — задана стала, $\varepsilon > 0$ — малий параметр;

$x\left(t\right) \in D_x \subset R^n$ — повільні змінні;

$y\left(t\right) \in D_y \subset R^m$ — швидкі змінні;

$f\left(t,x,y\right)$ — задана n-вимірна функція;

$g\left(t,x,y\right)$ — задана m-вимірна функція;

$A\left(t,x,y\right)$ — задана $n\times r$-матриця;

$\varphi\left(x\right)$ — задана скалярна функція,

$u\left(t\right) \in U \subset comp\left(R^r\right)$ — керування з компактної множини U у просторі R^r,

x_0, y_0 — задані початкові значення.

Умова 1. Нехай відносно заданих функцій виконуються умови:

– $f(t,x,y)$, $A(t,x,y)$, $g(t,x,y)$ — вимірні функції за змінною t для усіх x, y ;

– $f(t,x,y)$, $A(t,x,y)$, $g(t,x,y)$ — задовольняють умову Липшиця за змінними x, y зі сталою λ для усіх t;

– $f(t,x,y)$ і $A(t,x,y)$ — функції, рівномірно обмежені сталою M;

– $\varphi(x)$ – задовольняє умову Липшиця за змінною x зі сталою λ.

Означення 1. Допустимими керуваннями задачі (1) вважаються вимірні функції $u = u(t)$, $t \in [0,T]$ з компактної множини U, для яких знайдеться $\varepsilon_0 > 0$, яке не залежить від $u(t)$, що для усіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ відповідні до цих керувань розв'язки $x(t) \in D_x$, $y(t) \in D_y$ системи диференціальних рівнянь (1) визначені для усіх $t \in [0,T]$.

Допустимі керування $u(t)$ задачі (1) обираються з компактної множини U, тому ці керування $u(t) \in L_p(0,T)$, тобто для деякого числа $p \geq 1$ визначенним є значення $\|u(t)\|_p = \left(\int\limits_0^T \|u(t)\|^p dt \right)^{1/p}$.

Означення 2. Оптимальним керуванням задачі (1), (2) вважається таке допустиме керування $u^*(t)$, на якому критерій якості (2) приймає мінімальне значення $J^* = J[u^*]$.

3. Побудова усередненої задачі. Запропонуємо послідовність дій та сформулюємо умови, при виконанні яких можна отримати усереднену задачу оптимального керування відносно заданої задачі (1), (2).

Для системи (1) побудуємо відповідну вироджену задачу при $\varepsilon = 0$, змінну x вважатимемо параметром:

$$\dot{x} = 0, \qquad x(0) = x_0,$$

$$\dot{y} = g(t,x,y), \quad y(0) = y_0. \tag{3}$$

Умова 2. Нехай розв'язок $y = h(t,x,y_0)$ виродженої задачі (3) існує для будь-якого значення y_0, визначений при $t \geq 0$ та задовольняє умову Липшиця за змінною x.

Умова 3. Нехай існують функції $f_0(x)$ та $A_0(x)$, що рівномірно відносно t_0, y_0, $x \in D_x$ виконуються співвідношення

$$\lim_{\Delta\to\infty} \left\| \frac{1}{\Delta} \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta} f(t,x,h(t,x,y_0))dt - \right.$$
$$\left. - f_0(x) \right\| = 0, \tag{4}$$

$$\lim_{\Delta\to\infty} \frac{1}{\Delta} \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta} \|A(t,x,h(t,x,y_0)) -$$
$$-A_0(x)\|^q dt = 0, \tag{5}$$

де $q \geq 1$ задовольняє рівність $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, а матриці $A, A_0 \in L_q(0,T)$.

Задачі оптимального керування (1), (2) поставимо у відповідність усереднену задачу оптимального керування з системою

$$\dot{z} = \varepsilon [f_0(z) + A_0(z) \cdot v], \quad z(0) = x_0, \tag{6}$$

та термінальним критерієм якості

$$J_0[v] = \varphi(z(T)) \to \min_{v\in U}, \tag{7}$$

де функція $v = v(t)$ — допустиме керування для задачі (6), яке обирається з множини U.

За $v^*(t)$ візьмемо оптимальне керування усередненої задачі (6), (7), на якому критерій якості (7) приймає мінімальне значення $J_0^* = J_0[v^*]$.

4. Асимптотичний розв'язок задачі. Доведемо, що за допустимим керуванням системи (1) або (6) будуються відповідні траєкторії систем, які є близькими на асимптотично скінченному інтервалі часу.

Теорема 1. Нехай для систем диференціальних рівнянь (1) та (6) в області $D = \{t \geq 0, x \in D_x \subset R^n, y \in D_y \subset R^m, u \in U \subset comp(R^r)\}$ виконуються умови 1, 2, 3 та

4) для будь-якого допустимого керування $v(t) \in U$ усередненої системи (6) відповідна траєкторія $z(t)$, $z(0) = x_0$ лежить разом зі своїм ρ-околом в області D_x.

Тоді для будь-яких $\eta > 0$ і $L > 0$ знайдеться таке $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ та $t \in [0,T]$ виконується наступне:

I) будь-яке допустиме керування $u(t) \in U$ системи (1) є допустимим керуванням усередненої системи (6) та відповідні траєкторії $x(t) \in D_x$ системи (1) і $z(t) \in D_x$ усередненої системи (6) при умові $x(0) = z(0) = x_0 \in D_0 \subset D_x$ задовольняють оцінку

$$\|x(t) - z(t)\| \leq \eta; \tag{8}$$

II) будь-яке допустиме керування $v(t) \in U$ усередненої системи (6) є допустимим керуванням системи (1) та відповідні траєкторії $z(t) \in D_x$ усередненої системи (6) і $x(t) \in D_x$ системи (1) при умові $z(0) = x(0) = x_0 \in D_0 \subset D_x$ задовольняють оцінку (8).

Доведення. Для доведення першої частини теореми оберемо деяке допустиме керування $u(t) \in U$ системи (1), тоді $x(t)$, $y(t, x_0, y_0)$ — відповідна траєкторія цієї системи, що визначена для усіх $t \geq 0$, $h(t, x, y_0)$ — розв'язок виродженої задачі (3) для швидких змінних, який також визначений при усіх $t \geq 0$, а $z(t)$ — відповідна до цього керування траєкторія системи (6). Керування $u(t) \in U$ повинно бути обрано так, щоб виконувалася умова 4) теореми, тобто бути допустимим і для системи (6).

Оберемо довільне $\eta > 0$ таке, що $\eta < \rho$, та зафіксуємо його. Оцінимо різницю між відповідними розв'язками системи (1) та (6):

$$x(t) - z(t) \leq$$

$$\leq \varepsilon \int_0^t [f(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) - f_0(z(s))]\, ds +$$

$$+\varepsilon \int_0^t [A(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) - A_0(z(s))] \times$$

$$\times u(s)\, ds \leq$$

$$\leq \varepsilon \int_0^t [f(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) - f_0(x(s))]\, ds +$$

$$+\varepsilon \int_0^t [f_0(x(s)) - f_0(z(s))]\, ds +$$

$$+\varepsilon \int_0^t [A(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) - A_0(x(s))] \times$$

$$\times u(s)\, ds +$$

$$+\varepsilon \int_0^t [A_0(x(s)) - A_0(z(s))]\, u(s)\, ds.$$

Враховуючи умову 1, з останньої нерівності отримаємо

$$\|x(t) - z(t)\| \leq$$

$$\leq \varepsilon \left\| \int_0^t [f(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) - f_0(x(s))]\, ds \right\| +$$

$$+\varepsilon \left\| \int_0^t [A(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) - A_0(x(s))] \times \right.$$

$$\left. \times\, u(s)\, ds \right\| +$$

$$+\varepsilon \int_0^t \|f_0(x(s)) - f_0(z(s))\|\, ds +$$

$$+\varepsilon \int_0^t \|A_0(x(s)) - A_0(z(s))\| \cdot \|u(s)\|\, ds \leq$$

$$\leq \varepsilon \left\| \int_0^t [f(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) - f_0(x(s))]\, ds \right\| +$$

$$+\varepsilon \left\| \int_0^t [A(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) - A_0(x(s))] \times \right.$$

$$\left. \times\, u(s)\, ds \right\| +$$

$$+\varepsilon\lambda \int_0^t \|x(s) - z(s)\| \cdot (1 + \|u(s)\|)\, ds.$$

Допустиме керування $u(t)$ обирається з компактної множини U, тому знайдеться константа $K > 0$, не залежна від $u(t)$, що для будь-якого $t \geq 0$ буде

$$\|u(t)\| \leq K, \tag{9}$$

тоді отримана нерівність прийме вид

$$\|x(t) - z(t)\| \le I_1 + I_2 +$$

$$+\varepsilon\lambda(1+K) \cdot \int_0^t \|x(s) - z(s)\|\, ds, \qquad (10)$$

де введено позначення

$$I_1 = \varepsilon \left\| \int_0^t [f(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) - \right.$$

$$\left. - f_0(x(s))]ds \right\|, \qquad (11)$$

$$I_2 = \varepsilon \left\| \int_0^t [A(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) - \right.$$

$$\left. - A_0(x(s))] \times u(s)\, ds \right\|. \qquad (12)$$

Для подальшого доведення теореми необхідно оцінити різницю швидких розв'язків системи (1) та виродженої системи (3). З урахуванням умови 1 для будь-яких x_0, y_0 отримаємо

$$\|y(t, x_0, y_0) - h(t, x_0, y_0)\| \le$$

$$\le \int_0^t \|g(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) -$$

$$- g(s, x_0, h(s, x_0, y_0))\|\, ds \le$$

$$\le \lambda \int_0^t \|x(s) - x_0\| ds +$$

$$+\lambda \int_0^t \|y(s, x_0, y_0) - h(s, x_0, y_0)\| ds.$$

Окремо оцінимо різницю

$$\|x(s) - x_0\| \le$$

$$\le \varepsilon \int_0^s \|f(\tau, x(\tau), y(\tau, x_0, y_0)) +$$

$$+ A(\tau, x(\tau), y(\tau, x_0, y_0)) \cdot u(\tau)\|\, d\tau \le$$

$$\le \varepsilon M(1+K) \int_0^s d\tau \le \varepsilon M(1+K)s,$$

звідки

$$\|y(t, x_0, y_0) - h(t, x_0, y_0)\| \le$$

$$\le \varepsilon\lambda M(1+K) \int_0^t s ds +$$

$$+\lambda \int_0^t \|y(s, x_0, y_0) - h(s, x_0, y_0)\| ds.$$

За лемою Гронуолла-Беллмана

$$\|y(t, x_0, y_0) - h(t, x_0, y_0)\| \le$$

$$\le \varepsilon\lambda M(1+K) \cdot \frac{t^2}{2} \cdot e^{\lambda t} = \varepsilon\beta(t). \qquad (13)$$

Позначена у (13) функція $\beta = \beta(t)$ є зростаючою за змінною t, тому завжди існує розв'язок рівняння

$$\beta(t) = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}},$$

де C – деяка константа, за $t^*(\varepsilon)$ візьмемо корінь цього рівняння. Тоді $\varepsilon\beta(t^*) = C\sqrt{\varepsilon}$, а $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\beta(t^*) = 0$.

Визначимо функцію

$$\Delta(\varepsilon) = \min\left\{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}};\ t^*(\varepsilon)\right\}, \qquad (14)$$

яка задовольняє властивостям

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Delta(\varepsilon) = +\infty, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\Delta(\varepsilon) = 0. \qquad (15)$$

Розіб'ємо часовий інтервал $[0, T]$ на рівні частини точками $t_i = i\Delta$, $i = 0, 1, ..., N$, $N = E\left(\frac{T}{\Delta}\right)$, $E(a)$ — ціла частина числа a.

З позначення (13) маємо, що на кожному інтервалі часу $t \in [t_i, t_{i+1}]$ різниця між швидкими розв'язками системи (1) та виродженної системи (3) оцінюється величиною

$$\|y(t, x_i, y_i) - h(t, x_i, y_i)\| \le$$

$$\le \varepsilon\beta(\Delta) = C\sqrt{\varepsilon}. \qquad (16)$$

Зафіксуємо довільний момент часу $t \in [0, T]$, для якого знайдеться інтервал $[t_k, t_{k+1})$, що $t \in [t_k, t_{k+1})$. При цьому k буде найбільшим значенням номеру, при якому $t_k \le t$, тому виконуються співвідношення

$$k\Delta \le T = \frac{L}{\varepsilon}, \quad \varepsilon k\Delta \le L. \qquad (17)$$

Для інтегралу I_1 з (11), враховуючи що $t \in [t_k, t_{k+1})$, виділимо окремо цей інтервал

$$I_1 = \varepsilon \left\| \int\limits_0^{t_k} [f(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) - - f_0(x(s))]ds \right\| + +\varepsilon \left\| \int\limits_{t_k}^{t} [f(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) - - f_0(x(s))]ds \right\|. \qquad (18)$$

Для першого доданка у (18) справедливо

$$\varepsilon \left\| \int\limits_0^{t_k} [f(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) - - f_0(x(s))]ds \right\| \le$$
$$\le \varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [f(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) - - f_0(x(s))]ds \right\| \le$$
$$\le \varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [f(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) - - f(s, x(t_i), y(s, x(t_i), y(t_i)))]ds \right\| +$$
$$+\varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [f(s, x(t_i), y(s, x(t_i), y(t_i))) - - f(s, x(t_i), h(s, x(t_i), y(t_i)))]ds \right\| +$$
$$+\varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [f(s, x(t_i), h(s, x(t_i), y(t_i))) - - f_0(x(t_i))]ds \right\| +$$
$$+\varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [f_0(x(t_i)) - f_0(x(s))]ds \right\|, \qquad (19)$$

у якому оцінимо кожний доданок окремо. Для першого доданку в (19) при виконанні умови 1 та співвідношень (17) отримаємо

$$\varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [f(s, x(s), y(s, x_0, y_0)) - - f(s, x(t_i), y(s, x(t_i), y(t_i)))]ds \right\| \le$$
$$\le \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \lambda(\|x(s) - x(t_i)\| + + \|y(s, x_0, y_0) - y(s, x(t_i), y(t_i))\|)ds \le$$
$$\le \varepsilon\lambda \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} (\varepsilon M(1+K)\Delta + 0)ds \le$$
$$\le \varepsilon\lambda \cdot k\Delta\varepsilon \cdot M(1+K)\Delta \le$$
$$\le \varepsilon\Delta\lambda LM(1+K).$$

Для другого доданка в (19) з умови 1 та співвідношень (16), (17) випливає, що

$$\varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [f(s, x(t_i), y(s, x(t_i), y(t_i))) - - f(s, x(t_i), h(s, x(t_i), y(t_i)))]ds \right\| \le$$
$$\le \varepsilon\lambda \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|y(s, x(t_i), y(t_i)) - - h(s, x(t_i), y(t_i))\| \, ds \le$$
$$\le \varepsilon\lambda k\Delta\varepsilon\beta(\Delta) \le \varepsilon\beta(\Delta)\lambda L.$$

З існування границі (4) згідно з умовою 3 маємо, що існує монотонно спадаюча функція $\psi = \psi(\Delta)$ така, що $\lim\limits_{\Delta\to\infty} \psi(\Delta) = 0$, та для третього доданка в (19) справедливо

$$\varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [f(s, x(t_i), h(s, x(t_i), y(t_i))) - - f_0(x(t_i))]ds \right\| \le$$
$$\le \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, x(t_i), h(s, x(t_i), y(t_i))) \, ds -\right.$$

$$- \Delta \cdot f_0 (x (t_i))\| \le$$

$$\le \varepsilon\Delta \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \frac{1}{\Delta} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f (s, x (t_i), h (s, x (t_i), y (t_i))) \, ds - \right.$$

$$- f_0 (x (t_i))\| \le$$

$$\le \varepsilon k \Delta \psi (\Delta) \le L \psi (\Delta).$$

Для останього доданку в (19) з умови 1 та співвідношень (17) маємо, що

$$\varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [f_0 (x (t_i)) - f_0 (x (s))] ds \right\| \le$$

$$\le \varepsilon\lambda \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|x (t_i) - x (s)\| ds \le$$

$$\le \varepsilon\lambda k \Delta \cdot \varepsilon M (1 + K) \Delta \le$$

$$\le \varepsilon \Delta \lambda L M (1 + K).$$

В (18) оцінимо другий доданок. При виконанні умови 1

$$\varepsilon \left\| \int\limits_{t_k}^{t} [f (s, x (s), y (s, x_0, y_0)) - f_0 (x (s))] ds \right\| \le$$

$$\le \varepsilon \int\limits_{t_k}^{t} \|f (s, x (s), y (s, x_0, y_0))\| \, ds +$$

$$+ \varepsilon \int\limits_{t_k}^{t} \|f_0 (x (s))\| \, ds \le 2\varepsilon \Delta M.$$

Остаточно для I_1 з (18)

$$I_1 \le 2\varepsilon\Delta\lambda LM(1 + K) + \varepsilon\beta(\Delta)\lambda L +$$

$$+ L\psi(\Delta) + 2\varepsilon\Delta M. \qquad (20)$$

Для інтегралу I_2 з (12), враховуючи що $t \in [t_k, t_{k+1})$, виділимо окремо цей інтервал

$$I_2 = \varepsilon \left\| \int\limits_{0}^{t_k} [A (s, x (s), y (s, x_0, y_0)) - \right.$$

$$- A_0 (x (s))] \times u (s) \, ds\| +$$

$$+ \varepsilon \left\| \int\limits_{t_k}^{t} [A (s, x (s), y (s, x_0, y_0)) - \right.$$

$$- A_0 (x (s))] \times u (s) \, ds\|. \qquad (21)$$

Перший доданок у (21) перетворимо наступним чином

$$\varepsilon \left\| \int\limits_{0}^{t_k} [A (s, x (s), y (s, x_0, y_0)) - \right.$$

$$- A_0 (x (s))] \times u (s) \, ds\| \le$$

$$\le \varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [A (s, x (s), y (s, x_0, y_0)) - \right.$$

$$- A_0 (x (s))] \times u (s) \cdot u (s) \, ds\| \le$$

$$\le \varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [A (s, x (s), y (s, x_0, y_0)) - \right.$$

$$- A (s, x (t_i), y (s, x (t_i), y (t_i)))] \cdot u (s) \, ds\| +$$

$$+ \varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [A (s, x (t_i), y (s, x (t_i), y (t_i))) - \right.$$

$$- A (s, x (t_i), h (s, x (t_i), y (t_i)))] \cdot u (s) \, ds\| +$$

$$+ \varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [A (s, x (t_i), h (s, x (t_i), y (t_i))) - \right.$$

$$- A_0 (x (t_i))] \cdot u (s) \, ds\| +$$

$$+ \varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [A_0 (x (t_i)) - A_0 (x (s))] \cdot u (s) \, ds \right\|, \qquad (22)$$

у якому аналогічно до (19) оцінимо кожний доданок окремо. Для першого доданку в (22) отримаємо

$$\varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [A (s, x (s), y (s, x_0, y_0)) - \right.$$

$$- A (s, x (t_i), y (s, x (t_i), y (t_i)))] \cdot u (s) \, ds\| \le$$

$$\le \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|A (s, x (s), y (s, x_0, y_0)) -$$

$$-A\left(s,x\left(t_i\right),y\left(s,x\left(t_i\right),y\left(t_i\right)\right)\right)\|\cdot\|u\left(s\right)\|\,ds\le$$
$$\le\varepsilon\Delta\lambda LM\left(1+K\right)K.$$

Для другого доданку в (22)

$$\varepsilon\left\|\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left[A\left(s,x\left(t_i\right),y\left(s,x\left(t_i\right),y\left(t_i\right)\right)\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\,A\left(s,x\left(t_i\right),h\left(s,x\left(t_i\right),y\left(t_i\right)\right)\right)\right]\cdot u\left(s\right)ds\right\|\le$$
$$\le\varepsilon\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\|A\left(s,x\left(t_i\right),y\left(s,x\left(t_i\right),y\left(t_i\right)\right)\right)-$$
$$-A\left(s,x\left(t_i\right),h\left(s,x\left(t_i\right),y\left(t_i\right)\right)\right)\|\cdot\|u\left(s\right)\|\,ds\le$$
$$\le\varepsilon\beta\left(\Delta\right)\lambda LK.$$

Оцінимо третій доданок у (22), для чого скористаємося нерівністю Гельдера

$$\varepsilon\left\|\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left[A\left(s,x\left(t_i\right),h\left(s,x\left(t_i\right),y\left(t_i\right)\right)\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\,A_0\left(x\left(t_i\right)\right)\right]\cdot u\left(s\right)ds\right\|\le$$
$$\le\varepsilon\sum_{i=0}^{k-1}\left\|\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left[A\left(s,x\left(t_i\right),h\left(s,x\left(t_i\right),y\left(t_i\right)\right)\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\,A_0\left(x\left(t_i\right)\right)\right]\cdot u\left(s\right)ds\right\|\le$$
$$\le\varepsilon\sum_{i=0}^{k-1}\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\|A\left(s,x\left(t_i\right),h\left(s,x\left(t_i\right),y\left(t_i\right)\right)\right)-\right.$$
$$\left.-\,A_0\left(x\left(t_i\right)\right)\|^q\,ds\right)^{1/q}\times\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\|u\left(s\right)\|^p ds\right)^{1/p}\le$$
$$\le\varepsilon\sum_{i=0}^{k-1}\left(\psi\left(\Delta\right)\cdot\Delta\right)^{1/q}\times\left(K^p\cdot\Delta\right)^{1/p}\le$$
$$\le\varepsilon k\Delta\cdot K\psi^{1/q}\left(\Delta\right)\le LK\psi^{1/q}\left(\Delta\right),$$

де $\lim\limits_{\Delta\to\infty}\psi\left(\Delta\right)=0$.

Для четвертого доданку у (22)

$$\varepsilon\left\|\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left[A_0\left(x\left(t_i\right)\right)-A_0\left(x\left(s\right)\right)\right]\cdot u\left(s\right)ds\right\|\le$$
$$\le\varepsilon\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\|A_0\left(x\left(t_i\right)\right)-A_0\left(x\left(s\right)\right)\|\times$$
$$\times\|u\left(s\right)\|\,ds\le\varepsilon\Delta\lambda LM\left(1+K\right)K.$$

Оцінимо другий доданок у (21). При виконанні умови 1

$$\varepsilon\left\|\int\limits_{t_k}^{t}\left[A\left(s,x\left(s\right),y\left(s,x_0,y_0\right)\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\,A_0\left(x\left(s\right)\right)\right]\times u\left(s\right)ds\right\|\le$$
$$\le\varepsilon\int\limits_{t_k}^{t}\left[\|A\left(s,x\left(s\right),y\left(s,x_0,y_0\right)\right)\|+\right.$$
$$\left.+\,\|A_0\left(x\left(s\right)\right)\|\times\|u\left(s\right)\|\right]ds\le$$
$$\le2\varepsilon\Delta MK.$$

Остаточно для I_2 з (21)

$$I_2\le2\varepsilon\Delta\lambda LM(1+K)K+\varepsilon\beta(\Delta)\lambda LK+$$
$$+L\psi^{1/q}(\Delta)K+2\varepsilon\Delta MK.\qquad(23)$$

Враховуючи отримані оцінки (20) для I_1 та (23) для I_2 з нерівності (10) за лемою Гронуолла-Беллмана

$$\|x\left(t\right)-z\left(t\right)\|\le$$
$$\le\big(2\varepsilon\Delta\lambda LM(1+K)^2+\varepsilon\beta(\Delta)\lambda L\left(1+K\right)+$$
$$+\,L\left(\psi\left(\Delta\right)+\psi^{1/q}(\Delta)K\right)+2\varepsilon\Delta M\left(1+K\right)\big)\times$$
$$\times e^{\lambda L(1+K)}.$$

Виходячи з властивостей функцій $\varepsilon\Delta$ у (15), $\varepsilon\beta\left(\Delta\right)$ у (16), $\psi\left(\Delta\right)$ отримаємо, що вираз у дужках прямує до нуля, тому для будь-яких $\eta>0$ і $L>0$ знайдеться таке $\varepsilon_0\left(\eta,L\right)>0$, що для всіх $\varepsilon\in\left(0,\varepsilon_0\right]$ та $t\in[0,T]$ справедлива нерівність

$$\|x\left(t\right)-z\left(t\right)\|\le\eta<\rho.$$

Отримана оцінка $\|x\left(t\right)-z\left(t\right)\|<\rho$ для довільного $t\in[0,T]$ означає, що для будь-якого допустимого керування $u(t)$ та розв'язку $x\left(t\right)$ системи (1) відповідний до цього ж керування розв'язок $z\left(t\right)$ усередненої системи (6) знаходиться в ρ-околі розв'язку $x(t)$ системи (1) та при виконанні умови 4) теореми не виходить на границю області D_x ні в який момент часу. Тому обране керування $u(t)$ системи (1) є допустимим і для системи (6) та справедливою є оцінка (8). Перша частина теореми доведена.

Доведення другої частини теореми проводиться аналогічно, тільки замість допустимого керування $u(t)$ системи (1) обирається допустиме керування $v(t)$ усередненої системи (6) та будуються відповідні до цього керування траєкторії системи (1) та (6). При цьому отримана оцінка $\|x(t) - z(t)\| < \rho$ для довільного $t \in [0, T]$ означає, що для будь-якого допустимого керування $v(t)$ та розв'язку $z(t)$ усередненої системи (6) відповідний до цього ж керування розв'язок $x(t)$ системи (1) знаходиться у ρ-околі розв'язку $z(t)$ усередненої системи (6), який при виконанні умови 4) теореми повністю належить області D_x. Тому обране допустиме керування $v(t)$ усередненої системи (6) дійсно є допустимим і для системи (1) та справедливою є оцінка (8).

Теорема доведена.

5. Асимптотично оптимальний розв'язок задачі. Встановимо відповідність між оптимальним розв'язком задачі (1), (2) та оптимальним розв'язком усередненої задачі (6), (7), враховуючи додатково, що множина U є опуклою.

Теорема 2. Нехай для задач оптимального керування (1), (2) та (6), (7) в області $D = \{t \geq 0, x \in D_x \subset R^n, y \in D_y \subset R^m, u \in U \subset comp(R^r)\}$ виконуються умови теореми 1.

Тоді оптимальний розв'язок задачі (6), (7) є асимптотично оптимальним розв'язком задачі (1), (2), тобто для будь-яких $\eta > 0$ та $L > 0$ існує таке $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і $t \in [0, T]$ справедливими є оцінки

$$|J_0^* - J^*| \leq \eta; \qquad J[v^*] - J^* \leq \eta, \tag{24}$$

де J_0^* та J^* – оптимальні значення критеріїв якості усередненої задачі (6), (7) та задачі (1), (2) відповідно, $J[v^*]$ – значення критерію якості задачі (1), (2) на оптимальному керуванні усередненої задачі.

Доведення. Особливістю задач оптимального керування (1), (2) та (6), (7) є те, що допустимі керування $u(t)$ і $v(t)$ входять до них лінійно та обираються з компактної та опуклої множини U. Тому [10, п 4.3] при виконанні умов теореми існує оптимальне керування $u^*(t)$, відповідна оптимальна траєкторія $x^*(t)$ та оптимальне значення критерію якості $J^* = J[u^*]$ задачі (1), (2). Крім того, існує оптимальне керування $v^*(t)$, відповідна оптимальна траєкторія $z^*(t)$ та оптимальне значення критерію якості $J_0^* = J_0[v^*]$ усередненої задачі (6), (7).

При виконанні умов теореми оптимальне керування $u^*(t)$ задачі (1), (2) є допустимим керуванням для задачі (6), (7). Тому, для будь-яких $\eta_0 > 0$ і $L > 0$ існує $\varepsilon_0(\eta_0, L) > 0$ таке, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ та $t \in [0, T]$ відповідна до цього керування траєкторія $\tilde{z}(t)$, $\tilde{z}(0) = x^*(0) = x_0 \in D_0 \subset D_x$ усередненої системи (6) задавольняє нерівність

$$\|x^*(t) - \tilde{z}(t)\| \leq \eta_0.$$

Наведена нерівність зодовольняється при будь-якому $t \in [0, T]$, а тому і при $t = T$. Тому при виконанні умови 1 буде

$$\left|J^* - \tilde{J}_0\right| = |\ J[u^*(t)] - J_0[u^*(t)]| =$$
$$= |\varphi(x^*(T)) - \varphi(\tilde{z}(T))| \leq$$
$$\leq \lambda \|x^*(T) - \tilde{z}(T)\| \leq \lambda\eta_0 = \eta. \tag{25}$$

Крім того, оптимальне керування $v^*(t)$ задачі (6), (7) є допустимим керуванням для задачі (1), (2). Тому, відповідна до цього керування траєкторія $\tilde{x}(t)$, $\tilde{x}(0) = z^*(0) = x_0 \in D_0 \subset D_x$ системи (1) задовольняє нерівність

$$\|z^*(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \eta_0.$$

та відповідно,

$$\left|\ J_0^* - \tilde{J}\ \right| = |\ J_0[v^*(t)] - J[v^*(t)]\ | =$$
$$= |\ \varphi(z^*(T)) - \varphi(\tilde{x}(T))\ | \leq$$
$$\lambda \|z^*(T) - \tilde{x}(T)\| \leq \lambda\eta_0 = \eta. \tag{26}$$

Оптимальні значення критеріїв якості (2) та (7) зазвичай задовольняють нерівностям

$$J^* \leq \tilde{J}, \qquad J_0^* \leq \tilde{J}_0 \tag{27}$$

та одному із співвідношень

$$J^* \geq J_0^*, \tag{28}$$

$$J^* < J_0^*. \tag{29}$$

В першому випадку з (27), (28), (26) випливають нерівності

$$\tilde{J} \geq J^* \geq J_0^* \geq \tilde{J} - \eta,$$

звідки

$$|J_0^* - J^*| \leq \eta.$$

У другому випадку з (27), (29), (25) маємо, що

$$\tilde{J}_0 \geq J_0^* > J^* \geq \tilde{J}_0 - \eta,$$

звідки

$$|J_0^* - J^*| \leq \eta.$$

В обох випадках справедливою є перша нерівність з (24). Вікonання другої нерівності з (24) витікає з відношення (26) та першої нерівності з (24).

Теорема доведена.

6. Висновки. Метод усереднення зручно використовувати для розв'язування досить складних систем диференціальних рівнянь та відповідних задач оптимального керування. Для систем диференціальних рівнянь зі швидкими та повільними змінними метод усереднення дозволяє побудувати більш просту систему, яка до того ж складається тільки з повільної підсистеми. Однак усереднення проводиться вздовж розв'язків виродженої системи відносно швидких змінних, враховуючи їх вплив на поведінку повільних змінних.

Усереднення задачі оптимального керування, в яку керування входить лінійно, дозволяє також побудувати більш просту задачу. При цьому множина допустимих керувань даної задачі не змінюється при усередненні, а остається такою ж і для усередненої задачі. У теоремах сформульовано умови, при яких допустиме керування однієї задачі є допустимим керуванням і для другої задачі, при цьому відповідні до цього керування траєкторії є близькими. Крім того доведено, що оптимальне керування усередненої задачі є асимптотично оптимальним керуванням для початкової задачі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Хапаев М.М.* Усреднение в теории устойчивости. – М.: Наука, 1986. – 192 с.

2. *Хапаев М.М.* Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. – М.: Высш. шк., 1988. – 184 с.

3. *Хапаев М.М.* Усреднение и устойчивость. – М.: Знание, 1991. – 48 с.

4. *Плотников В.А.* Метод усреднения в задачах управления. – Киев-Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.

5. *Плотников В.А., Бойцова И.А.* Усреднение в задачах оптимального управления системами с быстрыми и медленными переменными // Проблемы управления и информатики. – 2000. – N5. – С. 152–156.

6. *Добродзій Т.В.* Дослідження задач оптимального керування системами диференціальних рівнянь, лінійних по керуванню, методом усереднення // Український математичний вісник. – 2009. – **6**, N2. – С. 150-172.

7. *Добродзій Т.В.* Метод усереднення в задачах оптимального керування періодичними системами, що лінійні за керуванням // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. – 2010. – **501**. – С. 20-23.

8. *Добродзій Т.В.* Метод усереднення в задачах керування періодичними системами // Нелінійні коливання. – 2010. – **13**, N2. – С. 147-154.

9. *Станжицкий, А.Н., Добродзій Т.В.* Исследование задач оптимального управления на полуоси методом усреднения // Дифференциальные уравнения. – 2011. – **47**, N2. – С. 264-277.

10. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972. – 576 с.