УДК 517.956.4

В.В. Городецький, А.О. Широковських

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

НЕЛОКАЛЬНА БАГАТОТОЧКОВА ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧА ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ГАРМОНІЙНИМ ОСЦИЛЯТОРОМ

Встановлено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з гармонійним осцилятором та функціями від такого оператора у просторах типу S та S'.

We establish the well-posedness of a nonlocal multipoint with respect to time problem for an evolution equation with a harmonic oscillator and functions of such an operator in S and S' type spaces.

У розвитку багатьох важливих напрямів математики і фізики значну роль відіграли поняття та методи, які виникли при вивченні рівняння Штурма-Ліувілля та пов'язаного з цим рівнянням оператора Штурма-Ліувілля $A = -d^2/dx^2 + q(x)$. Вони були джерелом нових ідей та задач для спектральної теорії операторів і суміжних розділів аналізу. Г.Гарднер, М.Крускал і Р.Міура знайшли зв'язок спектральної теорії операторів з деякими нелінійними еволюційними рівняннями з частинними похідними. Ж.Дельсарт та Б.М.Левітан у теорії операторів узагальненого зсуву використали оператори перетворення, які виникли в процесі вивчення рівнянь Штурма-Ліувілля. В.А.Марченко застосував оператори перетворення при дослідженні обернених задач спектрального аналізу та асимптотичної поведінки спектральної функції оператора Штурма-Ліувілля.

Оператор Штурма-Ліувілля породжує різні крайові задачі: регулярні (x перебігає скінченний інтервал) та сингулярні (випадок нескінченного проміжку). Вони, як відомо, відрізняються постановками задач, методами дослідження та сферами застосувань. Функці q називається потенціалом; якщо $q(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, то оператор A називається гармонійним осцилятором. Відомо [1], що гармонійним осцилятор є невід'ємним самоспряженим оператором в просторі $L_2(\mathbb{R})$. Еволюційне рівняння

$$u'(t) + Au(t) = 0,\ t \in (0, T], \qquad (1)$$

з таким оператором відноситься до рівнянь параболічного типу, коефіцієнти яких необмежено зростають при $|x| \to \infty$. М.Л. Горбачуком, В.І. Горбачук, О.І. Кашпіровським [1] доведено, що розв'язок рівняння (1) завжди має граничне значення $u(0) = \lim\limits_{t\to+0} u(t)$ у просторах узагальнених функцій нескінченного порядку типу ультрарозподілів (типу S') і за ним завжди однозначно відновлюється. У працях М.Л. Горбачука, П.І. Дудникова, С.Д. Івасишена, В.В. Городецького, В.А. Літовченка та ін. доведено, що простори типу S' є множинами початкових даних задачі Коші для широких класів рівнянь з частинними похідними параболічного типу (до яких відноситься і рівняння (1)), при яких розв'язки є нескінченно диференційовними за просторовими змінними функціями. У праці [2] досліджується еволюційне рівняння $u'(t) + \varphi(A)u(t)$, $t \in (0, T]$, де $\varphi(A)$ трактується як гармонійний осцилятор нескінченного порядку. Знайдено зображення гладких розв'язків вказаного рівняння, описано множини початкових значень таких розв'язків, на підставі чого встановлюється коректна розв'язність задачі Коші з початковою функцією, яка є елементом простору ультрарозподілів типу S'.

Узагальненням задачі Коші є нелокальна багаточкова за часом задача, коли початкова умова $u(t,\cdot)|_{t=0} = f$ замінюється умовою $\sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = f$, де $t_0 = 0$, $\{t_1, ..., t_m\} \subset$

$(0,T]$, $\{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ - фіксовані числа (якщо $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші).

Нелокальна багатоточкова за часом задача відноситься до нелокальних крайових задач для рівнянь з частинними похідними, теорія яких інтенсивно розвивається з сімдесятих років минулого століття. Дослідження таких задач зумовлене багатьма застосуваннями у механіці, фізиці, хімії, біології, екології та інших природничо-наукових дисциплінах, які виникають при математичному моделюванні тих чи інших процесів [3-6]. На доцільність використання нелокальних умов з точки зору загальної теорії крайових задач вперше вказав О.О.Дезін [7], який досліджував розв'язні розширення диференціальних операторів, породжених загальною диференціальною операцією зі сталими коефіцієнтами. Він показав, що для постановки коректної крайової задачі необхідно використовувати поруч з локальними і нелокальні умови. А.Х.Мамян встановив [8], що існують рівняння з частинними похідними в шарі, для яких неможливо сформулювати жодної коректної локальної задачі; водночас коректні задачі існують, якщо залучити нелокальні умови.

У даній роботі встановлюється коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з гармонійним осцилятором та функціями від такого оператора у випадку, коли гранична функція є узагальненою функцією типу ультрарозподілів і ототожнюється з певним формальним рядом Фур'є-Ерміта. Зазначимо, що така постановка задачі є природною, оскільки гранична функція може мати особливість в одній або декількох точках і допускає регуляризацію у тому чи іншому просторі узагальнених функцій типу розподілів, ультрарозподілів, гіперфункцій тощо. Знайдено також зображення розв'язку вказаної задачі.

1. Простори основних та узагальнених елементів.

Нехай A - невід'ємний самоспряжений оператор з дискретним спектром у сепарабельному гільбертовому просторі H зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $||\cdot||$, $\{e_k, \geq 1\}$ - ортонормований базис з його власних векторів, $\{\lambda_k,\ k \geq 1\}$ - послідовність відповідних власних чисел, розміщених у порядку зростання; при цьому кожне власне число береться стільки разів, якоює його кратність, $\sum\limits_{k:\lambda_k \neq 0} \lambda_k^{-p} < \infty$ при деякому $p > 0$.

Позначимо

$$\Phi_m = \{\varphi \in H | \varphi = \sum_{k=1}^{m} c_{k,\varphi} e_k, c_{k,\varphi} \in \mathbb{C}\},$$

$$\Phi = \lim_{m\to\infty} ind \Phi_m$$

(очевидно, що Φ лежить щільно в H і є інваріантним відносно A), а через Φ' - простір усіх антилінійних неперервних функціоналів на Φ зі слабкою збіжністю. Зіставлення

$$H \ni \varphi \to f_\varphi \in \Phi' :< f_\varphi, \psi >= (\varphi, \psi), \forall \psi \in \Phi,$$

визначає вкладення $H \subset \Phi'$ ($< f, \varphi >$ позначає дію функціоналу f на елемент φ). Елементи з Φ' називатимемо узагальненими.

Нехай s - простір усіх числових послідовностей $\{s_k, k \geq 1\}$ ($s_k \in \mathbb{C}$) з покоординатною збіжністю. Відображення

$$\Phi \ni f \xrightarrow{F} \{c_k(f) =< f, e_k >, k \geq 1\} \in s$$

є ізоморфізмом [9]; при цьому збіжність у Φ' рівносильна покоординатній збіжності відповідних послідовностей в s. Зауважимо, що F відображає Φ на множину фінітних послідовностей в s, а H - на l_2; при цьому оператору A відповідає операція $\{s_k, k \geq 1\} \to \{\lambda_k s_k, k \geq 1\}$ і його можна продовжити на Φ' до неперервного оператора $\widehat{A}$: $\widehat{A} f = F^{-1}\{\lambda_k c_k(f), k \geq 1\}$.

Нехай $f \in \Phi'$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, де $c_k =< f, e_k >$, називається рядом Фур'є елемента $f \in \Phi'$, а числа c_k - його коефіцієнтами Фур'є. Для довільного елемента $f \in \Phi'$ його ряд Фур'є збігається в Φ' до f. Навпаки, довільний ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ збігається в Φ' до деякого елемента $f \in \Phi'$ і цей ряд є рядом Фур'є для [9]. Отже, Φ' можна розуміти як простір формальних рядів вигляду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$. Звідси випливає також, що Φ лежить щільно в Φ'.

Введемо деякі класи елементів, пов'язані з оператором A. Позначимо

$$H_\infty(A) = \lim_{\alpha\to+\infty} prH_\alpha(A),\ H_\alpha(A) = D(A^\alpha)$$

($D(A^\alpha)$ - область визначення оператора A^α,

$$D(A^\alpha) = \{\varphi \in H | \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\alpha} |c_k(\varphi)| < \infty,$$

$$c_k(\varphi) = (\varphi, e_k),\ k \in \mathbb{N}\}$$

$$A^\alpha \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha c_k(\varphi) e_k,\ \ \varphi \in D(A^\alpha)),$$

$$(\varphi,\psi)_{H_\alpha} := (\varphi,\psi) + (A^\alpha\varphi, A^\alpha\psi),$$

$$\{\varphi,\psi\} \subset D(a^\alpha),$$

$$G_{\beta,B}(A) := \{\varphi \in H_\infty(A) | \exists c, B > 0\ \forall n \in \mathbb{N} :$$

$$||A^n\varphi|| \le cB^n n^{n\beta}\},$$

де $\beta > 0$ - фіксований параметр. $G_{\beta,B}(A)$ - банаховий простір відносно норми

$$||\varphi||_{\beta,B} = \sup_n (||A^n\varphi|| / (B^n n^{n\beta}))$$

Простір $G_{\{\beta\}}\{A\} := \lim\limits_{B\to\infty} ind G_{\beta,B}(A)$ називається простором Жевре порядку β, породженим оператором A. Якщо через $(H_\infty(A))'$, $(G_{\{\beta\}}(A))'$ позначити простори, топологічно спряжені з просторами $H_\infty(A)$, $G_{\{\beta\}}(A)$ відповідно, то, згідно з [9], прийдемо до ланцюжка щільних і неперевних вкладень

$$\Phi \subset G_{\{\beta\}}(A) \subset H_\infty(A) \subset H \subset (H_\infty(A))' \subset$$

$$\subset (G_{\{\beta\}})' \subset \Phi',\ \beta > 1.$$

Символом $H_{\alpha,\beta}$ позначимо сукупність тих елементів $f \in \Phi'$, для яких при деякому $\alpha > 0$

$$||f||^2_{H_{\alpha,\beta}} := \sum_{k=1}^{\infty} \exp(2\alpha\lambda_k^{1/\beta}) |c_k|^2 < \infty,$$

$$c_k =< f, e_k >,\ k \in \mathbb{N},$$

і покладемо $H_{\{\beta\}} := \lim\limits_{\alpha\to+0} ind H_{\alpha,\beta}$. Відповідно, $(H_{\{\beta\}})' = \lim\limits_{\alpha\to+0} pr(H_{\alpha,\beta})'$, причому, якщо $f \in (H_{\{\beta\}})'$, то (див. [9]) для довільного $\alpha > 0$

$$||f||^2_{(H_{\alpha,\beta})'} := \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-2\alpha\lambda_k^{1/\beta}) |c_k|^2 < \infty,$$

$$c_k =< f, e_k >,\ k \in \mathbb{N},$$

Як доведено в [9], $G_{\{\beta\}}(A) = H_{\{\beta\}}$, $(G_{\{\beta\}}(A))' = (H_{\{\beta\}})'$.

Простори $G_{\{\beta\}}(A)$, $(G_{\{\beta\}}(A))'$ з точки зору поведінки коефіцієнтів Фур'є їхніх елементів описуються так [9]:

$$(f \in G_{\{\beta\}}(A)) \Leftrightarrow (\exists\mu > 0\ \exists c > 0\ \forall k \in \mathbb{N} :$$

$$|c_k(f)| \le c\exp(-\mu\lambda_k^{1/\beta})),$$

$$(f \in (G_{\{\beta\}}(A))') \Leftrightarrow (\forall\mu > 0\ \exists c = c(\mu) > 0$$

$$\forall k \in \mathbb{N} :\ |c_k(f)| \le c\exp(\mu\lambda_k^{1/\beta})).$$

Нехай

$$\{f_1, f_2\} \subset \Phi,\ f_1 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f_1) e_k, f_2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f_2) e_k.$$

У просторі Φ' визначимо операцію "$*$", яку назвемо "абстрактною згорткою" (або просто згоркою), за правилом

$$f_1 * f_2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f_1) c_k(f_2) e_k \equiv \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f_1 * f_2) e_k.$$

тобто $f_1 * f_2$ - узагальнений елемент з простору Φ', коефіцієнти Фур'є якого пов'язані з коефіцієнтами Фур'є узагальнених елементів f_1, f_2 співвідношенням $c_k(f_1 * f_2) = c_k(f_1) \cdot c_k(f_2)$.

Зауваження 1. Нехай $H = L_2[0, 2\pi]$ - гільбертів простір 2π-періодичних функцій, заданих на $\mathbb{R}$. У цьому випадку

$$\Phi_m = \{\varphi \in H | \varphi = \sum_{k=-m}^{m} c_{k,\varphi} e^{ikx},$$

$$c_{k,\varphi} \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}\}, m \in \mathbb{Z}_+,$$

тобто кожний елемент з Φ_m є тригонометричним поліномом степеня m, Φ' - простір усіх формальних тригонометричних рядів, які ототожнюються із узагальненими

2π-періодичними функціями як антилінійними неперервними функціоналами, заданими на просторі тригонометричних поліномів. Згортка двох узагальнених періодичних функцій $\{f, g\} \subset \Phi'$ визначається так [1]:

$$< f * g, \varphi >=< f_x, < g_y, \varphi(x+y) >>, \forall \varphi \in \Phi.$$

Вона має зміст, бо

$$< g_y, \varphi(x+y) >=< g_y, \sum_{k=-m}^{m} c_{k,\varphi} e^{ik(x+y)} >=$$

$$= \sum_{k=-m}^{m} c_{k,\varphi} < g, e^{iky} > e^{ikx} \in \Phi,$$

при цьому

$$c_k(f * g) =< f * g, e^{-ikx} >=$$
$$=< f, < g_y, e^{-ik(x+y)} >>=$$
$$=< f, < g, e^{-iky} > e^{-ikx} >=$$
$$= c_k(f) c_k(g), \ \forall \{f, g\} \subset \Phi'.$$

Звідси випливає комутативність та асоціативність згортки в Φ', тобто Φ' - кільце (відносно згортки) з одиницею, роль якої виконує дельта-функція Дірака. Таким чином, $f * g$ - узагальнена 2π-періодична функція з простору Φ', яка ототожнюється з рядом Фур'є вигляду

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f * g) e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) c_k(g) e^{ikx},$$

а згортка в Φ' збігається з "абстрактною згорткою", введеною раніше.

Із результатів, наведених в [10], випливають такі властивості абстрактної згортки: а) $f_1 * f_2 \in (G_{\{\beta\}}(A))'$ для довільних $f_1, f_2 \in (G_{\{\beta\}}(A))'$; $\beta \in (0,1]$; б) якщо $f \in (G_{\{\beta\}}(A))'$, то $f * \varphi \in G_{\{\beta\}}(A)$ тоді й лише тоді, коли $\varphi \in G_{\{\beta\}}(A)$, $\beta \in (0,1]$.

2. Функції Ерміта. Формальні ряди Фур'є-Ерміта

Функція $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається ваговою, якщо вона невід'ємна і така, що абсолютно збіжними є інтеграли $\alpha_n = \int\limits_{\mathbb{R}} x^n F(x) dx$, $n \in \mathbb{Z}_+$, які називаються степеневими моментами функції F. За F, зокрема, можна взяти функцію $\exp(-x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. За допомогою методу математичної індукції можна довести (див. [11]), що

$$(e^{-x^2})^{(n)} = e^{-x^2} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{n-k} n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k},$$
$$n \in \mathbb{Z}_+, \ x \in \mathbb{R}.$$

Отже, функція

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}, \ n \in \mathbb{Z}_+,$$

є многочленом степеня n. Цей многочлен називається стандартизованим многочленом Ерміта, а відповідна формула - формулою Родріга. Многочлени H_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, ортогональні на $\mathbb{R}$ з ваговою функцією F; при цьому

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H_n(x) dx = \sqrt{\pi} \cdot 2^n n!, \ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже, ортонормовані многочлени Ерміта $\widehat{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, мають вигляд

$$\widehat{H}_n(x) = \frac{h_n(x)}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)},$$
$$n \in \mathbb{Z}_+, \ x \in \mathbb{R}.$$

Многочлени $\widehat{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, побудовані за ваговою функцією $F(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, утворюють ортонормований базис у просторі $L_2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$. У просторі ж $L_2(\mathbb{R})$ ортонормований базис утворюють функції Ерміта

$$h_n(x) = e^{-x^2/2} \widehat{H}_n(x) =$$
$$= (-1)^n \pi^{-1/4} (2^n n!)^{-1/2} e^{x^2/2} (e^{-x^2})^{(n)},$$
$$n \in \mathbb{Z}_+, \ x \in \mathbb{R}.$$

Функції Ерміта допускають продовження в комплексну площину, при цьому, як доведено в [12, с.39-43], для функцій Ерміта комплексного аргументу правильними є оцінки

$$|h_n(x+iy)| \leq$$
$$\leq c_{\tau,n} \exp\left(-\frac{e^\tau - 1}{4(e^\tau + 1)} x^2 + \frac{e^\tau + 1}{e^\tau - 1} y^2\right) \equiv$$
$$\equiv c_{\tau,n} \exp\left(-\frac{1}{4} th(\tau/2) x^2 + cth(\tau/2) y^2\right),$$

$$n \in \mathbb{Z}_+, \qquad (2)$$

де $\tau > 0$ - довільно фіксований параметр,

$$c_{\tau,n} = \max\{e\pi^{-1/2}, \pi^{-1/4}(e^{2\tau}-1)^{-1/4}\}\times$$

$$\times \exp\left(\frac{n+1}{2}\tau\right).$$

У просторі $H = L_2(\mathbb{R})$ розглянемо гармонійний осцилятор - невідємний самоспряжений оператор A, який є замиканням оператора $-d^2/dx^2 + x^2$, заданого на множині фінітних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій. Спектр цього оператора дискретний, його власні значення - числа $\lambda = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, а відповідними власними функціями є функції Ерміта h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$ [1]. Простір Φ у даному випадку складається з функцій вигляду

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m} c_{k,\varphi} h_k(x), c_{k,\varphi} \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Оскільки

$$h'_k(x) = \sqrt{\frac{k}{2}} h_{k-1}(x) - \sqrt{\frac{k+1}{2}} h_{k+1}(x),$$

$$k \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R},$$

$$h'_0(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} h_1(x), \ x \in \mathbb{R},$$

то $\varphi' \in \Phi$, якщо $\varphi \in \Phi$, причому $\varphi'_\nu \to \varphi'$, $\nu \to \infty$, у просторі Φ, коли $\varphi_\nu \to \varphi$, $\nu \to \infty$, у просторі Φ. Отже, у просторі Φ визначена і неперервна операція диференціювання.

У просторі Φ', топологічно спряженому з Φ, операція диференціювання визначається формулою

$$\forall f \in \Phi' : < f^{(n)}, \varphi >= (-1)^n < f, \varphi^{(n)} >,$$

$$\varphi \in \Phi, \ n \in \mathbb{N}.$$

Ця операція лінійна і неперервна в Φ', оскільки також є відповідна операція в просторі Φ. Отже, кожний елемент з простору Φ' є нескінченно диференційовним.

Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k$, де $c_k =< f, h_k >$, називається рядом Фур'є-Ерміта функціоналу $f \in \Phi'$, а числа c_k, $k \in \mathbb{Z}_+$ - його коефіцієнтами Фур'є (надалі елементи простору Φ' називатимемо узагальними функціями). Простір Φ' у даному конкретному випадку можна розуміти як простір формальних рядів вигляду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k$.

3. Простори типу S та S'

І.М.Гельфанд і Г.Є.Шилов ввели в [13] серію просторів, названих ними просторами типу S. Вони складаються з нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, на які накладаються певні умови спадання на нескінченності. Ці умови задаються за допомогою нерівностей

$$|x^k \varphi^{(n)}| \le c_{kn}, \ \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+, \ x \in \mathbb{R},$$

де $\{c_{kn}\}$ - деяка подвійна послідовність додатних чисел. Якщо на елементи послідовності $\{c_{kn}\}$ не накладаються ніякі обмеження (тобто c_{kn} змінюються довільним чином разом з функцією φ), то маємо, очевидно, простір S Л.Шварца швидко спадних на нескінченності функцій. Якщо ж числа c_{kn} задовольняють певні умови, то відповідні конкретні простори містяться в S і називаються просторами типу S. Означимо деякі з них.

Для довільних фіксованих $\alpha, \beta > 0$ покладемо

$$S_\beta^\alpha(\mathbb{R}) \equiv S_\beta^\alpha :\equiv \Big\{\varphi \in S | \exists c > 0 \ \exists A > 0$$

$$\exists B > 0 \ \forall \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+ \Big\}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x^k \varphi^{(n)}| \le c A^k B^n k^{k\alpha} n^{n\beta}.$$

Введені простори можна охарактеризувати ще й так [13].

S_β^α складається з тих й лише тих нескінченно диференційовних на функцій, які задовольняють нерівності

$$|\varphi^{(n)}(x)| \le c B^n n^{n\beta} \exp(-a|x|^{1/\alpha}),$$

$$n \in \mathbb{Z}_+, \ x \in \mathbb{R},$$

з деякими додатними сталими c, b і a, залежними лише від функції φ.

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \ge 1 - \beta$, то S_α^β складається з тих і тільки тих функцій φ, які аналітично продовжуються в $\mathbb{C}$ і задовольняють нерівність

$$|\varphi(x+iy)| \leq c\exp(-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}),$$

$$c, a, b > 0.$$

Простір S_α^1, $\alpha > 0$, складається з функцій φ, які аналітично продовжуються в деяку смугу $|y| < \delta$ (залежну від φ) і при цьому

$$|\varphi(x+iy)| \leq c\exp(-a|x|^{1/\alpha}), c, a, \delta > 0, x \in \mathbb{R}.$$

Простори S_α^β не є тривіальними за умови $\alpha + \beta \geq 1$ і утворюють щільні в $L_2(\mathbb{R})$ множини. При $\beta > 1$ простір S_α^β містить фінітні функції.

Топологічна структура в просторі S_α^β визначається так. Символом $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in S_\alpha^\beta$, які задовольють умову:

$$\forall\delta > 0\ \forall\rho > 0\ \exists c_{\delta\rho} :$$

$$|x^k\varphi^{(n)}(x)| \leq c_{\delta\rho}(A+\delta)^k(B+\rho)^n k^{k\alpha}n^{n\beta},$$

$$\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Ця множина перетворюється в повний зліченно-нормований простір, якщо в ній ввести систему норм

$$||\varphi||_{\delta,\rho} = \sup_{x,k,n} \frac{|x^k\varphi^{(n)}(x)|}{(A+\delta)^k(B+\rho)^n k^{k\alpha}n^{n\beta}},$$

$$\{\delta, \rho\} \subset \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\}.$$

Якщо $A_1 < A_2$, $B_1 < B_2$, то $S_{\alpha,A_1}^{\beta,B_1}$ неперервно вкладається в $S_{\alpha,A_2}^{\beta,B_2}$ і $S_\alpha^\beta = \bigcup\limits_{A,B>0} S_{\alpha,A}^{\beta,B}$.

Якщо P - деякий фіксований многочлен, то у просторі S_α^β визначена і неперервна операція множення на P. Зокрема, звідси випливає, що функції Ерміта h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, належить до простору $S_{1/2}^{1/2}$. Справді, $|\exp(-z^2/2)| = \exp(-x^2/2 + y^2/2)$, якщо $z = x + iy$ і $1/\alpha = 1/(1-\beta) = 2$, тобто $\alpha = \beta = 1/2$, а кожна функція Ерміта має вигляд $P(x)\exp(-x^2/2)$, де P - многочлен Ерміта. Зауважимо, що цей же факт випливає також з оцінки (2).

В S_α^β визначені і неперервні операції зсуву аргументу і диференціювання, які переводять S_α^β в себе. Відзначимо також, що простори S_α^β є досконалими [13], тобто просторами, усі обмежені множини яких компактні.

Простір усіх лінійних неперервних функціоналів на S_α^β зі слабкою збіжністю позначається символом $(S_\alpha^\beta)'$. Елементи з $(S_\alpha^\beta)'$ називаються ультрарозподілами Жевре порядку β.

У праці [1] доведено, що $S_{\beta/2}^{\beta/2} = G_{\{\beta\}}(A)$ при $\beta \geq 1$, де A - гармонійний осцилятор. Тоді, як випливає із загальної теорії невід'ємних самоспряжених операторів з дискретним спектром (див. п.1), простори S_β^β, $(S_\beta^\beta)'$, $\beta \geq 1/2$, можна охарактеризувати так.

Якщо $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k \in \Phi'$, $c_k =< f, h_k >$, то правильним є такі співвідношення еквівалентності:

а)$(f \in S_\beta^\beta) \Leftrightarrow \Big(\exists\mu > 0\ \ \exists c > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+ :$

$$|c_k| \leq c\exp(-\mu(2k+1)^{1/(2\beta)})\Big); \qquad (3a)$$

б) $f \in (S_\beta^\beta)') \Leftrightarrow \Big(\forall\mu > 0 \exists c = c(\mu) > 0$

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ : |c_k| \leq c\exp(\mu(2k+1)^{1/(2\beta)})\Big). \qquad (3б)$$

4. Функції від гармонійного осцилятора

Нехай A - невід'ємний самоспряжений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі H зі щільною в H областю визначення $D(A)$, $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ - деяка неперервна функція, монотонно зростає на $[0,\infty)$, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} f(\lambda) = +\infty$. За функцією f та оператором A на множині

$$D(f(A)) = \{\varphi \in H | \int_0^\infty f^2(\lambda)d(E_\lambda\varphi, \varphi) < \infty\},$$

де E_λ, $\lambda \in [0,\infty)$ - розклад одиниці (спектральна функція) оператора A, побудуємо оператор $f(A)$:

$$f(A)\varphi = \int_0^\infty f(\lambda)dE_\lambda\varphi,\ \ \varphi \in D(f(A)), \qquad (4)$$

який також є невід'ємним і самоспряженим в H, при цьому $\overline{D(f(A))} = H$ [1]. Інтеграл (4) береться, фактично, лише по спектру $\sigma(A)$ оператора A, тобто

$$f(A)\varphi = \int\limits_{\sigma(A)} f(\lambda)dE_\lambda\varphi, \ \ \varphi \in D(f(a)).$$

Якщо A - гармонійний осцилятор, то $\sigma(A) = \{\lambda_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, де $\lambda_k = 2k+1$. Спектральна функція E_λ, $\lambda \in [0,\infty)$, оператора A кусково-стала і має розриви лише в точках λ_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, причому стрибок $E_{\lambda_k+0} - E_{\lambda_k}$ є оператором проектування на власний підпростір оператора A, що відповідає власному значенню λ_k. Цей підпростір одновимірний, відповідна функція Ерміта h_k утворює його базис. Отже,

$$(E_{\lambda_k+0} - E_{\lambda_k})\varphi = (\varphi, h_k)\cdot h_k = c_k(\varphi)h_k;$$

спектральна функція E_λ, $\lambda \in [0,\infty)$, у цьому випадку має вигляд

$$(E_\lambda\varphi)(x) = \sum_{\lambda_k<\lambda} c_k(\varphi)h_k(x), \ \ \varphi \in L_2(\mathbb{R}),$$

а інтеграла (4) є таким:

$$(f(A)\varphi)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k)c_k(\varphi)h_k(x), \varphi \in D(f(A)),$$

при цьому

$$D(f(A)) = \Big\{\varphi \in L_2(\mathbb{R}) | \sum_{k=0}^{\infty} f^2(\lambda_k)\times$$

$$\times|c_k(\varphi)|^2 < \infty, \lambda_k = 2k+1\Big\}$$

$f(\lambda_k)$ - власні значення оператора $f(A)$.

Надалі використовуватимемо позначення: $f(A) := A_f$.

Оперотор $f(A)$ продовжимо на Φ' до неперервного оператора $\widehat{f}(A)$:

$$\widehat{f}(A)\varphi = F^{-1}\{f(\lambda_k)c_k(\varphi)\}_{k=0}^{\infty},$$

$$\Phi' \ni \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\varphi)h_k.$$

Розглянемо узагальнений елемент (узагальнену функцію) G_f з простору Φ', побудований за функцією $f : G_f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k)h_k(x)$. Тоді $\widehat{f}(A)$ - оператор згортки, який діє у просторі Φ' за правилом:

$$\widehat{f}(A)\varphi = G_\alpha * \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k)c_k(\varphi)h_k.$$

Оператор $f(A) \equiv A_f$ розумітимемо як звуження оператора $f(A)$ на простір $S_{1/2}^{1/2} = G_{\{1\}}(A)$.

Лема 1. *Оператор A_f неперервний у просторі $S_{1/2}^{1/2}$ тоді й лише тоді, коли $G_f \in (S_{1/2}^{1/2})'$.*

Доведення. Нехай $G_f \in (S_{1/2}^{1/2})'$. Передусім зазначимо, що з властивостей абстрактної згортки (див. п.1) випливає, що $G_f * \varphi \in (S_{1/2}^{1/2})'$ для довільної функції $\varphi \in (S_{1/2}^{1/2})'$. Отже, оператор A_f відображає простір $S_{1/2}^{1/2}$ в себе. Доведемо, що A_f неперервний оператор у просторі $S_{1/2}^{1/2}$, тобто кожну обмежену множину цього простору він відображає у обмежену множину цього ж простору (зазначимо, що у просторі $S_{1/2}^{1/2}$ клас неперервних операторів співпадає з класом обмежених операторів [13]).

Оскільки $G_f \in (S_{1/2}^{1/2})'$, то

$$\forall \mu > 0 \ \exists c = c(\mu) > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ :$$

$$f(\lambda_k) \le ce^{\mu\lambda_k}, \ \ \lambda_k = 2k+1, \ \ k \in \mathbb{Z}_+. \quad (5)$$

Нехай L - обмежена множина в просторі $S_{1/2}^{1/2} = G_{\{1\}}(A) = \bigcup\limits_{\alpha>0} H_{\alpha,1}$. Тоді L - обмежена множина в гільбертовому просторі $H_{\alpha,1}$ при деякому $\alpha > 0$, тобто

$$\exists b > 0 \ \ \forall \psi \in L : \|\psi\|_{H_{\alpha,1}}^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\alpha(2k+1)}|c_k(\psi)|^2 \le b,$$

або

$$\exists b_1 > 0 \ \ \forall \psi \in L : |c_k(\psi)| \le b_1 e^{-\alpha(2k+1)}, k \in \mathbb{Z}_+.$$

В нерівності (5) покладемо $\mu = \alpha/2$. Тоді

$$|c_k(A_f\psi)| = f(2k+1)|c_k(\psi)| \le$$

$$\leq cb_1 e^{-(\alpha-\mu)(2k+1)} =$$

$$= b_2 e^{-\alpha_1(2k+1)}, \ \ \alpha_1 = \alpha/2, \ \ b_2 = cb_1$$

і

$$|c_k(A_f\psi)| e^{\frac{\alpha_1}{2}(2k+1)} \leq b_2 e^{-\frac{\alpha_1}{2}(2k+1)}, \ \ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Звідси вже випливає збіжність ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k(A_f\psi)|^2 \exp(\alpha_1(2k+1))$. Отже, множина $A_f L$ обмежена в просторі $H_{\frac{\alpha_1}{2},1} = H_{\frac{\alpha}{4},1}$, тобто в просторі $S_{1/2}^{1/2}$. Обернене твердження доводиться аналогічно.

Зауваження 2. Умова $G_f \in (S_{1/2}^{1/2})$ еквівалентна такій умові на функцію f:

$$\forall \mu > 0 \ \ \exists c = c(\mu) > 0 : 0 \leq f(\alpha) \leq ce^{\mu\lambda},$$
$$\lambda \in [0, \infty). \qquad (6)$$

Зазначимо також, що якщо $f(\lambda) = \lambda^n$, $\lambda \in [0, \infty)$ ($n \in \mathbb{N}$ - фіксоване), то f задовольняє умову (6), тобто оператор $f(A) = A^n = (-d^2/dx^2 + x^2)^n$ обмежений (неперервний) в просторі $S_{1/2}^{1/2}$. Цей же результат випливає з таких міркувань. Відомо [1], якщо $\varphi \in S$, то A^n, де A - гармонійний осцилятор, діє на φ за правилом

$$(A^n\varphi)(x) = \sum_{0 \leq p+q \leq 2n} c_{p,q}^{(n)} x^p \varphi^{(q)}(x), x \in \mathbb{R} \quad (7)$$

при цьому коефіцієнти $c_{p,q}^{(n)}$ задовольняють нерівності

$$|c_{p,q}^{(n)}| \leq 10^n n^{n-\frac{1}{2}(p+q)}.$$

Оскільки в просторі $S_{1/2}^{1/2}$ визначені і є неперервними операції множення на незалежну змінну та диференціювання, то з (7) випливає неперервність оператора A^n у просторі $S_{1/2}^{1/2}$.

Надалі вважатимемо, що функція f додатково задовольняє умову

$$\exists d_0 > 0 \ \ \forall \lambda \in [0, \infty) : f(\lambda) \geq d_0 \lambda. \qquad (8)$$

5. Нелокальна багатоточкова за часом задача

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_f u = 0, \ \ (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \quad (9)$$

де A_f - оператор, побудований у п.4. Під розв'язком рівняння (9) розумітимемо функцію $u(t, \cdot) \in C^1((0, T], S_{1/2}^{1/2})$, яка задовольняє це рівняння.

Поставимо задачу: знайти функцію u, яка є розв'язком рівняння (9) та задовольняє умову

$$\mu u(0, \cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k u(t_k, \cdot) = g, \ \ g \in L_2(\mathbb{R}), \ (10)$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, ..., \mu_m\} \subset (0, \infty)$, $\{t_1, ..., t_m\} \subset (0, T]$ - фіксовані числа, $\mu > \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k$, $t_1 < t_2 < ... < t_m \leq T$. При цьому $u(0, \cdot)$ розуміємо як $\lim\limits_{t \to +0} u(t, \cdot)$, де границя розглядається в $L_2(\mathbb{R})$, тобто вважаємо, що існує функція $u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ така, що $\|u(t, \cdot) - u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \to 0$, $t \to +0$, $u_0(x) \equiv u(0, x)$.

Надалі задачу (9), (10) називатимемо нелокальною багатоточковою за часом задачею для рівняння (9).

Нехай u - розв'язок рівняння (9). Оскільки $u(t, \cdot) \in S_{1/2}^{1/2} \subset L_2(\mathbb{R})$ при кожному $t \in (0, T]$, то

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{c_k}(t) h_k(x), \ \ (t, x) \in \Omega,$$

$$\widetilde{c_k}(t) \equiv c_k(u(t, \cdot)) = (u(t, \cdot), h_k)_H,$$
$$h = L_2(\mathbb{R}), \ \ k \in \mathbb{Z}_+,$$

причому

$$\|u(t, \cdot)\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{c_k}(t)|^2, \ \ t \in (0, T].$$

Для відшукання $\widetilde{c_k}(t)$ домножимо (9) скалярно на h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$; в результаті прийдемо до співвідношення

$$(u'_t, h_k) + (A_f u, h_k) = 0.$$

При фіксованому $k \in \mathbb{Z}_+$ маємо:

$$(A_f u, h_k) = (u, A_f h_k) = (u, f(\lambda_k) h_k) =$$
$$= f(\lambda_k)(u, h_k) = f(\lambda_k)\tilde{c_k}(t), \ \ \lambda_k = 2k + 1,$$

(тут враховано, що h_k - власна функція оператора A_f, а $f(\lambda_k)$ - його власне число).

Із диференційовності $u(t,\cdot)$ (за змінною $t\in(0,T]$) випливає диференційовність функцій $\tilde{c_k}(t)=(u(t,\cdot),h_k)$ на $(0,T]$. Отже,

$$\frac{d}{dt}\tilde{c_k}(t)=\frac{d}{dt}(u(t,\cdot),h_k)=\Big(\frac{d}{dt}u(t,\cdot),h_k\Big),$$

$k\in\mathbb{Z}_+$.

Зауважимо також, що існує $\lim\limits_{t\to+0}\tilde{c_k}(t)=\tilde{c_k}(0)=c_k(u(0.\cdot))$. Справді,

$$\tilde{c_k}(t)=(u(t,\cdot),h_k),\ \ \tilde{c_k}(0)=(u(0,\cdot),h_k),$$

$$|\tilde{c_k}(t)-\tilde{c_k}(0)|=|(u(t,\cdot)-u(0,\cdot),h_k)|\le$$

$$\le\|u(t,\cdot)-u(0,\cdot)\|\to 0,\ \ t\to+0.$$

Функція $\tilde{c_k}(t)$ задовольняє рівняння

$$\tilde{c_k}'(t)+f(\lambda_k)\tilde{c_k}(t)=0,\ \ k\in\mathbb{Z}_+,$$

загальний розв'язок якого має вигляд:

$$\tilde{c_k}(t)=c_k\exp(-tf(\lambda_k)),\ \ c_k=const,\ \ k\in\mathbb{Z}_+.$$

Тоді

$$u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\exp(-tf(\lambda_k))h_k(x),(t,x)\in\Omega. \tag{11}$$

Для відшукання c_k, $k\in\mathbb{Z}_+$, помножимо (10) скалярно на h_k, $k\in\mathbb{Z}_+$; у результаті прийдемо до співвідношення:

$$\mu\tilde{c_k}(0)-\sum_{n=1}^{m}\mu_k\tilde{c_k}(t_n)=c_k(g),$$

$$c_k(g)=(g,h_k),\ \ k\in\mathbb{Z}_+.$$

Урахувавши вигляд $\tilde{c_k}(t)$ знайдемо, що

$$c_k\Big(\mu-\sum_{n=1}^{m}\mu_n\exp(-t_nf(\lambda_k))\Big)=c_k(g).$$

Отже,

$$c_k=c_k(g)\Big(\mu-\sum_{n=1}^{m}\mu_n\exp(-t_nf(\lambda_k))\Big)^{-1},$$

$k\in\mathbb{Z}_+$.

Введемо позначення:

$$Q_1(t,\lambda_k):=\exp(-tf(\lambda_k)),$$

$$Q_2(\lambda_k):=\Big(\mu-\sum_{n=1}^{m}\mu_n\exp(-t_nf(\lambda_k))\Big)^{-1}\equiv$$

$$\equiv\Big(\mu-\sum_{n=1}^{m}\mu_nQ_1(t_n,\lambda_k)\Big)^{-1}.$$

Тоді

$$\tilde{c_k}(t)\equiv c_k(u(t,\cdot))=Q_1(t,\lambda_k)q_2(\lambda_k)c_k(g),$$

$$u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{c_k}(t)h_k(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)c_k(g)h_k(x)= \tag{12}$$

$$=G(t,x)*g(x),\ \ (t,x)\in\Omega,$$

де

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(g)h_k(x),$$

$$G(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)h_k(x).$$

Із обмежень, накладених на функцію f та параметри задачі (9), (10) випливає, що при кожному $t\in(0,T]$ справджуються нерівності

$$|c_k(G)|=|Q_1(t,\lambda_k)|\cdot|Q_2(\lambda_k)|\le$$

$$\le c_1\exp(-d_0t\lambda_k)\Big(\mu-\sum_{n=1}^{m}\mu_n\exp(-d_0t_n\lambda_k)\Big)^{-1}\le$$

$$\le c_1\Big(\mu-\sum_{n=1}^{m}\mu_n\Big)^{-1}\exp(-d_0t\lambda_k),$$

$$\lambda_k=2k+1,\ \ k\in\mathbb{Z}_+$$

(тут враховано, що $\mu>\sum\limits_{n=1}^{m}\mu_n$). Звідси та з характеристики класу $S_{1/2}^{1/2}$ випливає, що $G(t,\cdot)\in S_{1/2}^{1/2}$ при кожному $t\in(0,T]$. Оскільки $u(t,\cdot)=G(t,\cdot)*g$, де $g\in H\subset(S_{1/2}^{1/2})'=(G_{\{1\}}(A))'$, то на підставі відповідної властивості абстрактної згортки твердимо, що $u(t,\cdot)\in S_{1/2}^{1/2}$ при кожному $t\in(0,T]$.

Розв'язок задачі (9), (10) єдиний. Для доведення цієї властивості скористаємося тим, що розв'язок рівняння (9) зображається формулою (11), тобто

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(G_1) c_k(\tilde{g}) h_k(x) \equiv$$
$$\equiv G_1(t,x) * \tilde{g}(x), \qquad (13)$$

де $\tilde{g} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(\tilde{g}) h_k(x)$, $c_k(\tilde{g}) = (\tilde{g}, h_k)$, $G_1(t,x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k) h_k(x)$, $G_1(t,x)$ - фіксована функція з простору $S_{1/2}^{1/2}$ (при кожному $t \in (0,T]$), $\tilde{g}$ - довільна функція з $L_2(\mathbb{R})$ (те, що $G_1(t,\cdot) \in S_{1/2}^{1/2}$ випливає з оцінки $|Q_1(t,\lambda_k)| \le c \exp(-d_0 t \lambda_k)$ та твердження 3а))

Зауважимо, що правильним є і обернене твердження: якщо функція $u(t,x)$ має вигляд (13) (або ж (11)), то вона є розв'язком рівняння (9). Справді,

$$A_f u = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) c_k(u) h_k =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k f(\lambda_k) \exp(-t f(\lambda_k)) h_k.$$

Функція $u(t,x)$ диференційовна по t (при кожному $x \in \mathbb{R}$). Справді, нехай $t \in [\varepsilon, T]$, де $\varepsilon > 0$. Доведемо, що ряд

$$-\sum_{k=0}^{\infty} c_k f(\lambda_k) \exp(-t f(\lambda_k)) h_k(x) \eqqcolon \gamma(t,x) \quad (14)$$

збігається рівномірно по t (при фіксованому $x \in \mathbb{R}$), бо тоді $\partial u(t,x)/\partial t = \gamma(t,x)$, $t \in [\varepsilon, T]$. Оскільки $|h_k(x)| \le 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$, то, внаслідок (8) знайдемо, що

$$|-c_k f(\lambda_k) \exp(-t f(\lambda_k)) h_k(x)| \le$$
$$\le |c_k| f(\lambda_k) \exp(-\varepsilon f(\lambda_k)) \le$$
$$\le \frac{2c}{\varepsilon} \exp\Big(-\frac{\varepsilon d_0}{2} \lambda_k\Big), \ \ \lambda_k = 2k+1, \ \ k \in \mathbb{Z}_+.$$

(тут враховано також, що $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \le c < +\infty$). Отже, ряд (14) збігається рівномірно при $t \ge \varepsilon$. Цим доведено, що функція $u(t,x)$ диференційовна по t на відрізку $[\varepsilon, T]$. Оскільки $\varepsilon > 0$ - довільне, то функція $u(t,x)$ диференційовна по t на проміжку $(0,T]$, при цьому правильним є співвідношення $\partial u(t,x)/\partial t = \gamma(t,x)$, $t \in (0,T]$, $x \in \mathbb{R}$. Звідси вже випливає, що u - розв'язок рівняння (9).

Таким чином, функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (9) тоді й лише тоді, коли вона зображається формулою (11) (або (13)). У зв'язку з цим задачу (9), (10) можна розуміти так: у множині розв'язків рівняння (9) вигляду (11) (або (13)) знайти функцію, яка задовольняє умову (10). Ця функція дається формулою (12), при цьому $c_k(g) Q_2(\lambda_k) = c_k(\tilde{g})$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Якщо $g = 0$, то $c_k(g) = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, звідки й випливає співвідношення $u(t,x) = 0$ для кожного $t \in (0,T]$, що й доводить єдиність розв'язку задачі (9), (10).

Доведемо тепер, що розв'язок задачі (9), (10) неперервно залежить від умови (10). Нехай $\{g, g_n, n \ge 1\} \subset H$, $H = L_2(\mathbb{R})$, причому $g_n \to g$, $n \to \infty$, у просторі H, тобто $\|g_n - g\| \to 0$ при $n \to \infty$. Це рівносильно тому, що $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k(g_n - g)|^2 \to 0$, $n \to \infty$.

Нехай u_n - розв'язок задачі (9), (10), який відповідає функції g_n, за допомогою якої задається умова (10). Тоді

$$\|u_n - u\|^2 = \|G * (g_n - g)\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(G)| \cdot |c_k(g_n - g)|^2.$$

Із доведеного раніше випливає, що $|c_k(G)| \le \tilde{c}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, де $\tilde{c} = c\Big(\mu - \sum\limits_{p=1}^{m} \mu_p\Big)^{-1}$. Отже,

$$||u_n - u||^2 \le \tilde{c}^2 \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(g_n - g)|^2 \to, \ \ n \to \infty,$$

що й потрібно було довести.

Підсумуємо одержані результати у вигляді такого твердження.

Теорема 1. *Нелокальна багатоточкова за часом задача (9), (10) коректно розв'язна, розв'язок дається формулою*

$$u(t,x) = G(t,x) * g(x), \ \ (t,x) \in \Omega,$$

де

$$G(t,x) = \sum_{t=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) h_k(x),$$

$$g=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(g)h_k \in L_2(\mathbb{R}),$$

при цьому $\{G(t,\cdot),u(t,\cdot)\}\subset S_{1/2}^{1/2}$, $t\in(0,T]$.

Операцію "$*$" можна розглядати і у випадку, коли $g\in (S_{1/2}^{1/2})'=(G_{\{1\}}(A))'$ при цьому, знову ж таки внаслідок відповідної властивості вказаної операції матимемо, що $u(t,\cdot)=G(t,\cdot)*g\in S_{1/2}^{1/2}$ при кожному $t\in(0,T]$. Доведемо, що тоді функція $u(t,\cdot)$ є розв'язком рівняння (9), але умову (10), де $g\in(S_{1/2}^{1/2})'$, $u(t,\cdot)$ задовольняє в тому розумінні, що

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot)-\sum_{k=1}^{m}\mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot)=g,$$

$$g\in(S_{1/2}^{1/2})', \tag{15}$$

границі розглядаються в просторі $(S_{1/2}^{1/2})'$.

Лема 2. *Функція* $G(t,\cdot)$, $t\in(0,T]$, *як абстрактна функція параметра* t *із значеннями в просторі* $S_{1/2}^{1/2}$, *диференційовна по* t.

Доведення. Зафіксуємо довільно $t\in(0,T]$. Оскільки

$$S_{1/2}^{1/2}=G_{\{1\}}(A)=H_{\{1\}}=\bigcup_{\alpha>0}H_{\alpha,1}=\bigcup_{\alpha>0}H_{\alpha},$$

де A - гармонійний осцилятор, то для доведення твердження досить показати, що

$$\Phi_{\Delta t}:=\frac{1}{\Delta t}[G(t+\Delta t,x)-G(t,x)]\underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow}\frac{\partial}{\partial t}G(t,x)$$

у просторі $H_{\{1\}}$ (якщо $\Delta t<0$, то вважаємо Δt таким, що $t+\Delta t\geq t/2$).Це означає, що:

1) множина функцій $\{\Phi_{\Delta t}:|\Delta t|\leq\varepsilon_0,\ \Delta t\ni 0\}$ ($\varepsilon>0$ - досить мале фіксоване число) обмежена в просторі $H_{\{1\}}$, тобто

$$\exists c>0\ \forall \delta t\ (|\Delta t|\leq\varepsilon_0,\Delta t\neq 0):||\Phi_{\Delta t}||^2\leq c$$

при деякому $\alpha>0$;

2) $\Phi_{\Delta t}\to\frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)$ при $\Delta t\to 0$ у просторі $H_{\{1\}}$, тобто

$$\left\|\Phi_{\Delta t}-\frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)\right\|_{H_\alpha}^2\to 0,\ \ \Delta\to 0.$$

Передусім зазначимо, що функція $G(t,x)$ диференційовна по $t\in(0,T]$ при кожному $x\in\mathbb{R}$. Доведення цієї властивості аналогічне доведенню диференційовності функції, яка дається формулою (13); при цьому

$$\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}=-\sum_{t=0}^{\infty}f(\lambda_k)Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)h_k(x).$$

Оскільки

$$\Phi_{\Delta t}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Delta t}\Big[t^{-(t+\Delta t)f(\lambda_k)}-e^{-tf(\lambda_k)}\Big]\times$$

$$\times Q_2(\lambda_k)h_k(x)=-\sum_{k=0}^{\infty}f(\lambda_k)e^{-(t+\theta\Delta t)f(\lambda_k)}\times$$

$$\times Q_2(\lambda_k)h_k(x),\quad 0<\theta<1,$$

то

$$c_k(\Phi_{\Delta t})=-f(\lambda_k)Q_1(t+\theta\Delta t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)$$

(якщо $\Delta t<0$, то внаслідок домовленості щодо Δt маємо, що $t+\theta\Delta t>t+\Delta t\geq t/2$). Тоді для довільного фіксованого $\alpha<td_0/2$ (d_0 - стала з нерівності (8)) справджуються співвідношення:

$$||\Phi_{\Delta t}||_{H_\alpha}^2=\sum_{k=0}^{\infty}\exp(2\alpha\lambda_k)|c_k(\Phi_{\Delta t})|^2=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}f^2(\lambda_k)\exp(2\alpha\lambda_k)\exp(-2(t+\theta\Delta t)f(\lambda_k))\times$$

$$\times Q_2^2(\lambda_k)\leq(\mu-\mu_0)^{-2}\sum_{k=0}^{\infty}f^2(\lambda_k)\exp(2\alpha\lambda_k)\times$$

$$\times\exp(-2tf(\lambda_k)),\ \ \mu_0=\sum_{k=1}^{m}\mu_k.$$

Оскільки

$$f^2(\lambda_k)\exp(-2tf(\lambda_k))\leq\frac{2}{t^2}\exp(-tf(\lambda_k))\leq$$

$$\leq\frac{2}{t^2}\exp(-td_0\lambda_k),\ \ k\in\mathbb{Z}_+,$$

то

$$||\Phi_{\Delta t}||_{H_\alpha}^2\leq\frac{2}{t^2}(\mu-\mu_0)^{-2}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}(-(td_0-2\alpha)\lambda_k)<\infty,\ \ \lambda_k=2k+1.$$

Отже, множина функцій $\{\Phi_{\Delta t}, |\Delta t| \le \varepsilon_0, \Delta t \neq 0\}$ обмежена в просторі $H_{\{1\}}$.

Перевіримо виконання умови 2). Нехай $\Psi_{\Delta t}(x) := \Phi_{\Delta t}(x) - \frac{\partial}{\partial t}G(t,x)$. Тоді

$$\Psi_{\Delta t}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[t^{-tf(\lambda_k)} - e^{-(t+\theta\Delta t)f(\lambda_k)}\right]\times$$
$$\times Q_2(\lambda_k)f(\lambda_k)h_k(x).$$

Звідси випливає, що

$$||\Psi_{\Delta t}|^2_{H_2} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\alpha\lambda_k}|c_k(\Psi_{\Delta t})|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\alpha\lambda_k}\times$$
$$\times|e^{-tf(\lambda_k)} - e^{-(t+\theta\Delta t)f(\lambda_k)}|^2 Q_2^2(\lambda_k)f^2(\lambda_k) \le$$
$$\le \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\alpha\lambda_k}\cdot e^{-2(t+\theta_1\Delta t)f(\lambda_k)}f^4(\lambda_k)\times$$
$$\times\theta^2(\Delta t)^2 Q_2^2(\lambda_k) \le (\mu-\mu_0)^{-2}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty} e^{2\alpha\lambda_k}e^{-2tf(\lambda_k)}f^4(\lambda_k)(\Delta t)2, \ \ 0<\theta_1<1.$$

Оскільки $f^4(\lambda_k)\exp(-tf(\lambda_k)) \le 4!/t^4$ і $\alpha < td_0/2$, то

$$||\Psi_{\Delta t}||^2_{H_\alpha} \le 4!(\mu-\mu_0)^{-2}t^{-4}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty} e^{-(td_0-2\alpha)\lambda_k}(\Delta t)^2 \le \tilde{c}(\Delta t)^2,$$

де

$$\tilde{c} = 4!(\mu-\mu_0)^{-2}t^{-4}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-(td_0-2\alpha)\lambda_k} < +\infty$$

Отже, $||\Psi_{\Delta t}||_{H_\alpha}$ при $\Delta t \to 0$ (для $\alpha \in (0, td_0/2)$), тобто $\Phi_{\Delta t} \to \frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)$ при $\Delta t \to 0$ у поосторі $H_{\{1\}} = s^{1/2}_{1/2}$.

Лема доведена.

Лема 3. *Для функції*

$$u(t,x) = G(t,x)*g = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)\times$$
$$\times c_k h_k(x), (t,x)\in\Omega, \qquad (16)$$

де

$$G(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)h_k(x),$$

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k \in (S^{1/2}_{1/2})',\ c_k =< g, h_k >,\ k\in\mathbb{Z}_+,$$

правильним є зображення

$$u(t,x) =< g, \tilde{G}_{t,x}(\cdot) >,$$

$$\tilde{G}_{t,x}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)h_k(x)h_k(y).$$

Доведення. Нехай

$$S_{n,t,x} := \sum_{k=0}^{n} Q_!(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)h_k(x)h_k(y).$$

Твердження леми випливає з того, що послідовність частинних сум $S_{n,t,x}$ збігається до $\tilde{G}_{t,x}$ при $n\to\infty$ у просторі $S^{1/2}_{1/2} = H_{\{1\}}$ при фіксованих $t>0$, $x\in\mathbb{R}$ (при доведенні вказаної властивості використовуються оцінки $h_k : |h_k(x)| \le 1$, $k\in\mathbb{Z}_+$, $x\in\mathbb{R}$ [11]) та функцій $Q_1(t,\lambda_k)$, $Q_2(\lambda_k)$.

Справді, внаслідок лінійності та неперервності функціоналу g

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)c_k(g)h_k(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k) < g, h_k(y) > h_k(x) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k) < g, h_k(y) > h_k(x) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} < g, \sum_{k=0}^{n} Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)h_k(x)h_k(y) >=$$
$$\lim_{n\to\infty} < g, S_{n,t,x}(\cdot) >=< g, \lim_{n\to\infty} S_{n,t,x}(\cdot) >=$$
$$=< g, \tilde{G}_{t,x}(\cdot) > .$$

Лема 4. *Функція $u(t,x)$, яка зображається формулою (16), диференційовна по t, при цьому*

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} =< g, \frac{\partial}{\partial t}\tilde{G}_{t,x}(\cdot) >= \frac{\partial}{\partial t}G(t,x)*g.$$

Доведення. Із леми 2 випливає, що функція $\tilde{G}_{t,x}$, як абстрактна функція аргументу

t із значеннями в просторі $S_{1/2}^{1/2}$, диференційовна по t (при фіксованому $x \in \mathbb{R}$). Отже,

$$\tilde{\Phi}_{\Delta t,t,x}(y) := \frac{1}{\Delta t}\Big[\tilde{G}_{t+\Delta t,x}(y) - \tilde{G}_{t,x}(y)\Big] \to$$

$$\to \frac{\partial}{\partial t}\tilde{G}_{t,x}(y)$$

при $\Delta t \to 0$ у просторі $S_{1/2}^{1/2}$. Тоді, врахувавши неперервність функціоналу g, прийдемо до співвідношень:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta t}[u(t+\Delta t, x) - u(t,x)] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} < g, \frac{1}{\Delta t}[\tilde{G}_{t+\Delta t,x}(\cdot) - \tilde{G}_{t,x}(\cdot)] >=$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} < g, \tilde{\Phi}_{\Delta t,t,x}(\cdot) >=$$

$$=< g, \lim_{\Delta t \to 0} \tilde{\Phi}_{\Delta t,t,x}(\cdot) >=< g, \frac{\partial}{\partial t}\tilde{G}_{t,x}(\cdot) > .$$

Той факт, що $\partial u/\partial t$ можна також подати у вигляді згортки $\frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t} * g$, доводиться за схемою доведення леми 2. Лема доведена.

Лема 5. *Нехай*

$$u(t,x) = G(t,x) * g, \;\; g \in (S_{1/2}^{1/2})', \;\; (t,x) \in \Omega;$$

тоді в просторі $(S_{1/2}^{1/2})'$ *справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t \to +0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} u(t,\cdot) = g. \quad (17)$$

Доведення. Для доведення (17) візьмемо довільний елемент $\psi(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k((\psi)h_k(x) \in S_{1/2}^{1/2}$ і зазначимо, що внаслідок неперервності вкладення $S_{1/2}^{1/2}$ у просторі $(S_{1/2}^{1/2})'$ та ортонормованості базису $\{h_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$

$$\langle u(t,\cdot), \psi\rangle = (u(t,\cdot), \psi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(t,\cdot))c_k(\psi) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)c_k(g)c_k(\psi), \lambda_k = 2k+1.$$

Тоді

$$\mu \lim_{t \to +0} < u(t,\cdot), \psi > - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \lim_{t \to t_n} < u(t,\cdot), \psi >=$$

$$= \mu \lim_{t \to +0} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(t,\cdot))c_k(\psi) -$$

$$- \sum_{n=1}^{m} \mu_n \lim_{t \to t_n} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(t,\cdot))c_k(\psi);$$

при цьому ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(u(t,\cdot))c_k(\psi)$ збігається рівномірно на (0,T]. Цей факт випливає з вигляду коефіцієнтів $c_k(u(t,\cdot))$, $k \in \mathbb{Z}_+$, та нерівності

$$|c_k(u(t,\cdot))| \cdot |c_k(\psi)| \le \tilde{c}|c_k(g)| \cdot |c_k(\psi)|,$$

$$t \in (0,T], k \in \mathbb{Z}_+.$$

Справді, за умовою, $g \in (S_{1/2}^{1/2})'$, тобто

$$\forall \mu > 0 \; \exists c = c(\mu) > 0 \; \forall k \in \mathbb{Z}_+ :$$

$$|c_k(g)| \le ce^{\mu(2k+1)}.$$

Функція $\psi \in S_{1/2}^{1/2}$, тому, внаслідок умови 3а),

$$\exists \mu_0 > 0 \; \exists c_0 > 0 \; \forall k \in \mathbb{Z}_+ :$$

$$|c_k(\psi)| \le c_0 e^{-\mu_0(2k+1)}.$$

Покладемо $\mu = \mu_0/2$. Тоді

$$|c_k(g)||c_k(\psi)| \le cc_0 \exp\Big(-\frac{\mu_0}{2}(2k+1)\Big), \;\; k \in \mathbb{Z}_+.$$

Із останньої нерівності випливає сформульована властивість.

Таким чином,

$$\lim_{t \to t_n} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(t,\cdot))c_k(\psi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(t_n,\cdot))c_k(\psi) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)c_k(g)c_k(\psi). \quad (18)$$

$$\lim_{t \to +0} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(t,\cdot))c_k(\psi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(0,\cdot))c_k(\psi) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} Q_2(\lambda_k)c_k(g)c_k(\psi). \quad (19)$$

Урахувавши (18), (19) знайдемо, що

$$\mu \lim_{t\to+0} < u(t,\cdot),\psi > -$$

$$-\sum_{n=1}^{m} \mu_n \lim_{t\to t_n} < u(t,\cdot),\psi >=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} \Big[\Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n Q_1(t_n,\lambda_k)\Big) Q_2(\lambda_k)\Big] \times$$

$$\times c_k(g) c_k(\psi) =$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu - \sum\limits_{n=1}^{m} \mu_n Q_1(t_n,\lambda_k)}{\mu - \sum\limits_{n=1}^{m} \mu_n Q_1(t_n,\lambda_k)} c_k(g) c_k(\psi) =$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(g) c_k(\psi) =< g,\psi >,$$

$$\psi \in S_{1/2}^{1/2},\ g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(g) h_k \in (S_{1/2}^{1/2})',$$

що й потрібно було довести.

Лема 5 дозволяє ставити багатоточкову задачу для рівняння (9) у розумінні (15). Правильним є таке твердження.

Теорема 2. *Багатоточкова задача (9), (15) коректно розв'язна, розв'язок дається формулою*

$u(t,x) = g * G(t,x),\ \ (t,x) \in \Omega,\ \ g \in (S_{1/2}^{1/2})',$

$u(t,\cdot) \in S_{1/2}^{1/2}$ *при кожному* $t \in (0,T]$.

Доведення. Із властивостей абстрактної згортки випливає, що $u(t,\cdot) \in S_{1/2}^{1/2}$ при кожному $t \in (0,T]$.

Функція $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (9). Справді

$$A_f(g * G(t,x)) = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) c_k(g * G(t,x)) h_k(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) c_k(G) c_k(g) h_k(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) c_k(g) Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) h_k(x).$$

З іншого боку (див. лему 4),

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = g * \frac{\partial}{\partial t} G(t,x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\frac{\partial}{\partial t} G) c_k(g) h_k(x) =$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(g) h_k(x).$$

Звідси вже випливає, що функція $u(t,x) = g * G(t,x)$ є розв'язком рівняння (9). Крім того, з леми 5 випливає, що $u(t,x)$ задовольняє умову (15) (у вказаному сенсі). Отже, $u(t,x)$ - розв'язок задачі (9), (15).

Доведемо єдиність розв'язку задачі (9), (15). Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A_f u = 0,\ (t,x) \in [0,t_0) \times \mathbb{R} \equiv \Omega',$$

$$0 \le t < t_0 \le T, \tag{20}$$

$$u(t,\cdot)|_{t=t_0} = \psi, \psi \in (S_{1/2}^{1/2})'. \tag{21}$$

Умову (21) розуміємо в слабому сенсі, тобто $< u(t,\cdot),\omega > \to < \psi,\omega >$, $t \to t_0$, для довільної функції $\omega \in S_{1/2}^{1/2}$. Задача Коші (20), (21) коректно розв'язна, при цьому $u(t,\cdot) \in S_{1/2}^{1/2}$ при кожному $t \in [0,t_0)$ (див [2]).

Нехай $Q_{t_0}^t : (S_{1/2}^{1/2})' \to S_{1/2}^{1/2}$ - оператор, який зіставляє функціоналу $\psi \in (S_{1/2}^{1/2})'$ розв'язок задачі (20), (21). Оператор $Q_{t_0}^t$ - лінійний і неперервний, він визначений для довільних t і t_0 таких, що $0 \le t < t_0 \le T$; при цьому

$$\frac{dQ_{t_0}^t \psi}{dt} - A_f Q_{t_0}^t \psi = 0,\ \ \lim_{t\to t_0} Q_{t_0}^t \psi = \psi$$

(границя розглядається в просторі $(S_{1/2}^{1/2})'$).

Далі розв'язок задачі (9), (15) розумітимемо як регулярний функціонал з простору $(S_{1/2}^{1/2})' \supset S_{1/2}^{1/2}$. Доведемо, що задача (9), (15) має єдиний розв'язок у просторі $(S_{1/2}^{1/2})'$. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння при нульовій граничній функції може бути лише функціонал $u(t,x) \equiv 0$. Застосуємо функціонал $u(t,x)$ до функції $Q_{t_0}^t \tilde{g} \in S_{1/2}^{1/2} \subset (S_{1/2}^{1/2})'$, де $\tilde{g}$ - довільно фіксований елемент простору $S_{1/2}^{1/2}$, $0 < t < t_0 \le T$. Диференціюючи по t, використовуючи рівняння (9), (20) та самоспряженість оператора A_f, знаходимо, що

$$\frac{d}{dt} < u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \tilde{g} >=< \frac{du}{dt}, Q_{t_0}^t \tilde{g} > + < u, \frac{d}{dt} Q_{t_0}^t \tilde{g} >=$$

$$=< -A_f u, Q_{t_0}^t \tilde{g} > + < u, A_f Q_{t_0}^t \tilde{g} >=$$

$$= - < A_f u, Q_{t_0}^t \tilde{g} > + < A_f u, Q_{t_0}^t \tilde{g} >= 0,$$

$$\tilde{g} \in S_{1/2}^{1/2}, \ \ 0 < t < t_0 \le T.$$

Звідси випливає, що $< u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \tilde{g} >$ є сталою величиною.

Із властивостей абстрактних функцій [13] випливає співвідношення

$$\lim_{t\to t_0} < u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \tilde{g} >=< u(t,\cdot), \tilde{g} >= const \equiv c,$$

у довільній точці $t_0 \in (0,T]$. Отже, якщо в (15) $g = 0$, то

$$\mu \lim_{t\to +0} < u(t,\cdot), \tilde{g} > - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} < u(t,\cdot), \tilde{g} >=$$

$$= c\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k\Big) = 0,$$

тобто $c = 0$. Таким чином, $< u(t,\cdot), \tilde{g} >= 0$ для довільного $\tilde{g} \in S_{1/2}^{1/2}$, тобто $u(t_0, x)$ - нульовий функціонал з простору $(S_{1/2}^{1/2})'$. Оскільки $t_0 \in (0,T]$ і t_0 вибрано довільним чином, то $u(t,\cdot) \equiv 0$ для всіх $t \in (0,T]$.

Залишається переконатися в тому, що розв'язок задачі (9), (15) неперервно залежить від граничної умови. Нехай $\{g, g_n, n \ge 1\} \subset (S_{1/2}^{1/2})'$, причому $g_n \to g$, $n \to \infty$, у просторі $(S_{1/2}^{1/2})'$. Звідси випливає, що

$$c_k(g_n) =< g_n, h_k > \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} < g, h_k >= c_k(g)$$

для кожного $k \in \mathbb{Z}_+$. Крім того, $\{u(t,\cdot), u_N(t,\cdot)\} \subset S_{1/2}^{1/2}$ для кожного $t \in (0,T]$, де $u_n(t,\cdot)$ - розв'язок задачі (9), (15), який відповідає граничному елементу $g_n \in (S_{1/2}^{1/2})'$. Тоді

$$\forall \varphi \in S_{1/2}^{1/2} : \langle u_n, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(G) c_k(g_n) c_k(\varphi) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$$

$$\to \sum_{k=0}^{\infty} c_k(G) c_k(g) c_k(\varphi) = (u, \varphi) =< u, \varphi > .$$

Отже, $u_n \to u$ при $n \to \infty$ у просторі $(S_{1/2}^{1/2})'$.

Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Горбачук В.И.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений / В.И. Горбачук, М.А. Горбачук. – К.: Наук.думка, 1984. – 283 с.

2. *Гома Н.М.* Еволюційні рівняння з гармонійним осцилятором у просторах типу S та S' /Н.М. Гома, В.В. Городецький // Науковий вісник Чернівецького університету: зб. наук. пр. Вип. 269. Математика. – Чернівці: Рута, 2005. – С. 13-25.

3. *Нашухев А.М.* О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями /А.М. Нахушев // Дифференц. уравнения. – 1985. – **Т.21**, N1. – С. 92-101.

4. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии /А.М. Нахушев –М.: Высшая школа, 1995. – 301 с.

5. *Белавин И.А.* Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения /И.А. Белавин, С.П. Капица, С.П. Курдюмов // Журн. вычислит. матем. и мат. физики. – 1988. – **Т.38**, N6. – С. 885-902.

6. *Майков А.Р.* Экономический метод вычисления нестационарных нелокальных по времени условий излучения для волновых систем /А.Р. Майков, А.Д. Поезд, С.А. Якунин // Журн. вычислит. матем. и мат. физики. – 1990. – **Т.30**, N8. – С. 1267-1271.

7. *Дезин А.А.* Операторы с первой производной по "времени"и нелокальные граничные условия /А.А. Дезин // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1967. – **Т.31**, N1. – С. 61-86.

8. *Мамян А.Х.* Общие граничные задачи в слое /А.Х. Мамян // Докл. АН СССР. – 1982. – **Т.267**, N2. – С. 291-296.

9. *Горбачук В.И.* О разрешимости задачи Дирихле для дифференциально-операторного уравнения второго порядка /В.И. Горбачук // Прямые и обратные задачи спектральной теории дифференциальных операторов: сб. науч. трудов. –К., 1985. – С. 8-22.

10. *Городецкий В.В.* Многоточечная задача для одного класса эволюционных уравнений /В.В. Городецкий, О.В. Мартынюк // Дифференц. уравнения. – 2013. – **Т.49**, N8. – С. 1005-1015.

11. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены /П.К. Суетин –М.: Наука, 1976. – 328 с.

12. *Городецький В.В.* Множини початкових значень гладких розв'язків діеренціально-операторних рівнянь параболічного типу /В.В. Городецький. – Чернівці: Рута, 1998. – 219 с.

13. *Гельфанд И.М.* Пространства основных и обобщеных финкций /И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов.– М.:Физматгиз, 1958. – 307 с.