УДК 519.21

©2015 р. П. П. Горун, Я. М. Чабанюк

Національний університет "Львівська політехніка",
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

ДИСКРЕТНА МОДЕЛЬ СТОХАСТИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПОРТФЕЛЯ

Досліджено багатовимірну дискретну процедуру стохастичної оптимізації з марковськими перемиканнями в схемі серій. Встановлено достатні умови збіжності такої процедури, використовуючи генератор двокомпонентного марковського процесу дискретної процедури, а також його асимптотичні розклади в схемі усереднення. Розглянута процедура стохастичної оптимізації застосована до задачі пошуку оптимального інвестиційного портфеля.

A multidimensional discrete procedure of stochastic optimization with Markov switchings in the series scheme is investigated. Sufficient conditions for its convergence has been established. Convergence conditions for multidimensional procedure were analized based on the generator of discrete procedure for a double-component Markov process and its asymptotic representations in the averaging scheme. The stochastic optimization procedure was applied to the problem of finding an optimal investment portfolio.

Вступ. У 1952 році Кіфер та Вольфовиць [1] (КВ) розглянули задачу знаходження точки екстремуму u^* функції $C(u)$. У даній статті розглядається процедура оптимізації в припущенні єдиності точки екстремуму функції регресії.

Ідея методу Кіфера–Вольфовиця [2, Глава 4, §2] полягає в тому, щоб розраховувати наближені значення похідної як відношення приросту функції до приросту аргументу Δu та одночасно "сповільнювати" рух $u(t)$ до u^*. При цьому параметри процедури слід вибирати так, щоб по-перше, послідовність $u(t)$ не зупинилась надто швидко, а по-друге, так, щоб погасити вплив випадкових завад.

Основою багатьох робіт з оптимізації збіжності алгоритмів є роботи М.Б. Невельсона та Р.З. Хасьмінського [2], Я.З. Ципкіна [3], Б.Т. Поляка [4], Л. Льюнга [5], Ю.М. Єрмольєва [6], Г. Кушнера [7], В.Я. Катковника [8], П. Урясьєва [9].

1. Стрибкова процедура стохастичної оптимізації в марковському середовищі в схемі усереднення.

Розглянемо функцію регресії $C(u;x)$, $u \in \mathbb{R}^d, x \in X$, що задовольняє умову існування глобального розв'язку супроводжуючих систем [10]:

$$\frac{du_x(t)}{dt} = a(t)\nabla_b C(u_x(t);x),\ x \in X,$$

де X — простір станів марковського процесу [10], а псевдоґрадієнт ∇_b діє за правилом:

$$\nabla_b C(u;\cdot) = \left(\frac{C(u_i^+;\cdot) - C(u_i^-;\cdot)}{2b(t)},\ i = \overline{1,d}\right),$$

$$u_i^\pm = u_i \pm b(t)e_i, \quad e_i = \{0,\dots,1,0,\dots,0\}.$$

Стрибкова процедура стохастичної оптимізації (ПСО) з марковськими переключеннями в схемі серій задається співвідношенням (покладемо $\sum_{k=0}^{-1} a_k^\varepsilon \nabla_b C(u_k^\varepsilon;x_k^\varepsilon) = 0$) [11]:

$$u^\varepsilon(t) = u + \varepsilon \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon)-1} a_k \nabla_b C(u_k^\varepsilon;x_k^\varepsilon),\ u^\varepsilon(0) = u, \tag{1}$$

де $u \in \mathbb{R}^d$, а $\nu(t) = \max\{n : \tau_n \le t\}$ — рахуючий процес моментів відновлення $\tau_n, n \ge 0$, вкладеного ланцюга Маркова (ВЛМ) $x_n = x(\tau_n)$ у рівномірно ергодичний марковський процес $x(t)$ у вимірному просторі $(X, \mathcal{X})$ з генератором Q та потенціалом R_0 [12, Підрозділ 1.6].

В ПСО (1) нормуюча послідовність a_n визначається значеннями керуючої функції $a(t), t \geq 0$:

$$a_n = a(\tau_n),\ n \geq 0.$$

В процедуру (1) вкладена дискретна процедура u_n^ε:

$$u_{n+1}^\varepsilon = u_n^\varepsilon + \varepsilon a_n \nabla_b C(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon);$$

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon),\ x_n^\varepsilon = x(\tau_n^\varepsilon),\ \tau_n^\varepsilon = \tau_n/\varepsilon,\ n \geq 0. \tag{2}$$

Збіжність ПСО (1) розглядається в умовах експоненційної стійкості [2, Глава 4, §4] розв'язку $u(t)$ усередненої системи

$$\frac{du(t)}{dt} = \nabla C(u(t)),\ C(u) = q \int_X \rho(dx) C(u; x), \tag{3}$$

де $\rho(B)$ — стаціонарний розподіл ВЛМ $(x_n,\ n \geq 0)$, $B \in \mathcal{X}$, а ∇ є ґрадієнтом (по першій змінній): $\nabla f(u; \cdot) = \mathrm{grad}_u f(u; \cdot)$.

У банаховому просторі дійснозначних обмежених функцій визначена норма $\|\varphi(\cdot)\| = \sup_{x \in X} |\varphi(x)|$.

Теорема 1. *Нехай для усередненої системи* (3) *виконуються необхідні та достатні умови існування точки екстремуму, крім того існує функція Ляпунова* $V(u) \in C^3(\mathbb{R}^d)$ *усередненої системи* (3) *така, що задовольняє наступні умови:*

$C.1$: *умова експоненційної стійкості усередненої системи* (3)

$$\nabla C(u) \nabla V(u) \leq -k_0 V(u);$$

$C.2$: *мають місце оцінки*

$$\max_{x \in X} \left| (\nabla_b C(u; x))^2 \nabla^2 V(u) \right| \leq k_1 (1 + V(u));$$

$$\max_{x \in X} \left| \nabla_b C(u; x) [q(x) R_0 - \right.$$
$$\left. -I] \nabla_b \widetilde{C}(u; x) \nabla^2 V(u) \right| \leq k_2 (1 + V(u)),$$

$$\max_{x \in X} \left| (\nabla_b C(u; x))^2 [q(x) R_0 - \right.$$
$$\left. -I] \nabla_b \widetilde{C}(u; x) \nabla^3 V(u) \right| \leq k_3 (1 + V(u)),$$

де

$$\widetilde{C}(u; x) = q(x) C(u; x) - C(u);$$

$C.3$: *умова обмеження росту функції Ляпунова та умова Ліпшиця для* $\nabla_b C(u)$ *відповідно:*

$$\|\nabla V(u)\| \leq k_4 (1 + V(u));$$

$$\max_{u \in R^d} \|\nabla_b C(u) - \nabla C(u)\| \leq k_5 b(t);$$

$$k_i > 0,\ i = \overline{0, 5};$$

$C.4$: *послідовності* a_n, b_n *незростаючі, додатні та задовольняють умови:*

$$\sum_{n=0}^\infty a_n = \infty,\ \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n^2}{b_n^2} < \infty,\ \sum_{n=0}^\infty a_n b_n < \infty.$$

Тоді для довільного початкового значення $u^\varepsilon(0) \in \mathbb{R}^d$ *при кожному додатному* $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, ε_0 — *достатньо мале, ПСО* (1) *збігається з ймовірністю 1 до єдиної точки екстремуму усередненої еволюційної системи* (3)*:*

$$P\{\lim_{t \to \infty} u^\varepsilon(t) = u^*\} = 1.$$

Перш ніж перейти до доведення теореми побудуємо генератор ПСО та його асимптотичне представлення.

Розглянемо двокомпонентний марковський процес (МП)

$$(u^\varepsilon(t),\ x_t^\varepsilon = x(t/\varepsilon)). \tag{4}$$

Лема 1. *Генератор двокомпонентного марковського процесу* (4) *на дійснозначних функціях* $\varphi(u; \cdot) \in C^2(\mathbb{R}^d)$ *має асимптотичне представлення*

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon \varphi(u; x) = \varepsilon^{-1} Q \varphi(u; x) + \tag{5}$$
$$+ \quad a(t) Q_1(x) \varphi(u; x) + \varepsilon a^2(t) \theta(x) \varphi(u; x),$$

де

$$Q_1(x) \varphi(u; x) = \nabla_b C(u; x) Q_0 \varphi'_u(u; y), \tag{6}$$

$$\theta(x) \varphi(u; x) = \frac{1}{2} (\nabla_b C(u; x))^2 Q_0 \varphi''_u(\alpha u; x), \tag{7}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq \ & \alpha \leq 1, \\ Q_0 \varphi(\cdot; x) \ &= \ q(x) \mathbf{P} \varphi(\cdot; x), \\ \mathbf{P} \varphi(\cdot; x) \ &= \ \int_X P(x, dy) \varphi(\cdot; y), \end{aligned}$$

а залишковий член $\theta(x)\varphi(u; x)$ *обмежений.*

Доведення. Проведемо доведення у три етапи.

<u>*Етап I (Вигляд генератора).*</u> Генератор $\mathbf{L}_t^\varepsilon$ МП (4) визначається співвідношенням [2, Глава 3, §5]

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon\varphi(u;x) = \lim_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}\big(-\varphi(u;x) + \tag{8}$$
$$+\quad \mathbf{E}\big[\varphi(u^\varepsilon(t+\Delta);x_{t+\Delta}^\varepsilon)|u^\varepsilon(t)=u;x_t^\varepsilon=x\big]\big).$$

Обчислимо умовне математичне сподівання:

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}[\varphi(u^\varepsilon(t+\Delta);x_{t+\Delta}^\varepsilon)|u^\varepsilon(t)=u,x_t^\varepsilon=x]=\\ =\ &\mathbf{E}_{u,x}[\varphi(u^\varepsilon(t+\Delta);x_{t+\Delta}^\varepsilon)]=\\ =\ &\mathbf{E}_{u,x}[\varphi(u^\varepsilon(t+\Delta);x_{t+\Delta}^\varepsilon)]\times\\ &\times[I(\theta_x\le\varepsilon^{-1}\Delta)+I(\theta_x>\varepsilon^{-1}\Delta)].\end{aligned}\tag{9}$$

Оскільки $I(\theta_x\le\varepsilon^{-1}\Delta)=1-e^{-\varepsilon^{-1}\Delta q(x)}=\varepsilon^{-1}\Delta q(x)+O(\Delta^2)$, то для першого доданку в (9) маємо

$$\mathbf{E}_{u,x}[\varphi(u^\varepsilon(t+\Delta),x_{t+\Delta}^\varepsilon)]I(\theta_x\le\varepsilon^{-1}\Delta)=$$
$$=\mathbf{E}_{u,x}[\varphi(u+\Delta u^\varepsilon(t),x_{t+\Delta}^\varepsilon)]\varepsilon^{-1}\Delta q(x)+O(\Delta^2),$$

де $\Delta u^\varepsilon(t)=u^\varepsilon(t+\Delta)-u^\varepsilon(t)$ — прирости еволюцій, які визначаються процедурою (1) співвідношенням

$$\Delta u^\varepsilon(t)=\varepsilon a(t)\nabla_b C(u;x).$$

З того, що $I(\theta_x>\varepsilon^{-1}\Delta)=e^{-\varepsilon^{-1}\Delta q(x)}=1-\varepsilon^{-1}\Delta q(x)+O(\Delta^2)$ для другого доданку в (9) отримуємо

$$\mathbf{E}_{u,x}[\varphi(u^\varepsilon(t+\Delta),x_{t+\Delta}^\varepsilon)]I(\theta_x>\varepsilon^{-1}\Delta)=$$
$$=\mathbf{E}_{u,x}[\varphi(u+\Delta u^\varepsilon(t),x_{t+\Delta}^\varepsilon)][1-\varepsilon^{-1}\Delta q(x)+O(\Delta^2)].$$

Оскільки при $\Delta\to 0$ для останнього виразу $\Delta u^\varepsilon(t)\to 0$ і $x_{t+\Delta}^\varepsilon\to x$, то в результаті матимемо

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_{u,x}[\varphi(u^\varepsilon(t+\Delta);x_{t+\Delta}^\varepsilon)]=\varphi(u;x)+\\ &+\varepsilon^{-1}\Delta q(x)\big(\mathbf{E}_{u,x}\varphi(u+\varepsilon a(t)\nabla_b C(u;x);y)-\\ &-\varphi(u;x)\big)+O(\Delta^2),\end{aligned}\tag{10}$$

де $y=x_{t+\Delta}^\varepsilon$ — значення процесу $x(t)$ в момент наступного стрибка ($y\in X$).

Нарешті, підставивши (10) у (8), з послідовності перетворень знайдемо вигляд генератора $\mathbf{L}_t^\varepsilon$:

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon\varphi(u;x)=\varepsilon^{-1}Q\varphi(u;x)+\varepsilon^{-1}\mathbf{C}_t^\varepsilon(x)\varphi(u;x),\tag{11}$$

де

$$\mathbf{C}_t^\varepsilon(x)\varphi(u;x)=q(x)\int_X P(x,dy)\big[-\varphi(u;y)+$$
$$+\varphi(u+\varepsilon a(t)\nabla_b C(u;x);y)\big].\tag{12}$$

<u>*Етап II (Вигляд генератора на дійснозначних функціях $\varphi(u;\cdot)\in C^2(\mathbb{R}^d)$).*</u> Використовуючи гладкість функцій $\varphi(u;x)$, останній доданок в (11) перепишемо у формі:

$$\varepsilon^{-1}\mathbf{C}_t^\varepsilon(x)\varphi(u;x)=$$
$$=\varepsilon^{-1}q(x)\int_X P(x,dy)\big[\varepsilon a(t)\nabla_b C(u;x)\varphi_u'(u;y)+$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon^2a^2(t)(\nabla_b C(u;x))^2\varphi_u''(\alpha u;y)\big],\tag{13}$$
$$0\le\alpha\le 1.$$

Підставивши (13) у (11), отримаємо (5)–(7).

<u>*Етап III (Обмеженість залишкового члена).*</u> Обмеженість залишкового члена $\theta^\varepsilon(x)\varphi(u;x)$ в (5) випливає з представлення (7), умови $C.2$ теореми 1 і гладкості функцій $\varphi(u;x)$. Маємо:

$$\|\theta(\cdot)\varphi(u;\cdot)\|\le k\|1+\varphi(u;\cdot)\|, k>0,$$

тобто

$$\varepsilon a^2(t)\|\theta(\cdot)\varphi(u;\cdot)\|\to 0,\ \varepsilon\to 0.$$

□

Розв'яжемо проблему сингулярного збурення (ПСЗ) для оператора $\mathbf{L}_t^\varepsilon$ на збуреній функції Ляпунова

$$V^\varepsilon(u;x)=V(u)+\varepsilon a(t)V_1(u;x),\tag{14}$$

де $V(u)$ — функція Ляпунова для усередненої системи (3).

Лема 2. *Генератор $\mathbf{L}_t^\varepsilon$ на збуреній функції Ляпунова $V^\varepsilon(u;x)$ такій, що $V(u)\in C^3(\mathbb{R}^d)$, має асимптотичне представлення*

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u;x) &= a(t)\nabla_b C(u)V'(u)+\\ &+\varepsilon a^2(t)\theta(x)V(u),\end{aligned}\tag{15}$$

де

$$\begin{aligned}\theta(x)V(u) &= \nabla_b C(u;x)\big[q(x)R_0 - \\ &\quad -I\big]\nabla_b\widetilde{C}(u;x)V''(u), \quad (16)\\ \widetilde{C}(u;x) &= q(x)C(u;x) - C(u). \quad (17)\end{aligned}$$

Доведення. Розв'яжемо ПСЗ тільки для зрізаного до $\mathbf{L}_t^\varepsilon$ оператора $\mathbf{L}_{t0}^\varepsilon$, оскільки залишковий член в (5) не впливає на розв'язок ПСЗ (див. [13, Підрозділ 3.1] або [12]):

$$\mathbf{L}_{t0}^\varepsilon = \varepsilon^{-1}Q + a(t)Q_1(x).$$

Розклад оператора $\mathbf{L}_{t0}^\varepsilon$ на функціях $V^\varepsilon(u;x)$ подамо у вигляді

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{t0}^\varepsilon V^\varepsilon(u;x) &= \varepsilon^{-1}QV(u) + \\ &+ a(t)[QV_1(u,x) + Q_1(x)V(u)] + \\ &+ \varepsilon a^2(t)Q_1(x)V_1(u;x).\end{aligned}$$

З умови розв'язності останнього розкладу (див. наприклад, [13, Підрозділ 3.1]) маємо

$$QV_1(u;x) + Q_1(x)V(u) = \widehat{Q}_1 V(u), \quad (18)$$

де

$$\widehat{Q}_1\Pi = \Pi Q_1(x)\Pi. \quad (19)$$

Обчислимо праву частину (19). З представлення (6) маємо

$$\Pi Q_1(x)\Pi V(u) = \Pi q(x)\nabla_b C(u;x)V'(u) =$$

$$= \int_X \pi(dx)q(x)\nabla_b C(u;x)V'(u) =$$

$$= q\int_X \rho(dx)\nabla_b C(u;x)V'(u) = \nabla_b C(u)V'(u).$$

Таким чином, з (18) отримуємо:

$$QV_1(u;x) = (\widehat{Q}_1 - Q_1(x))V(u).$$

Враховуючи, що $R_0Q\varphi = (\Pi - I)\varphi$, а також (6) та (19), для збурення $V_1(u;x)$ функції Ляпунова $V(u)$ з останнього маємо розв'язок:

$$V_1(u;x) = R_0\nabla_b\widetilde{C}(u;x)V'(u), \quad (20)$$

де $\widetilde{C}(u;x)$ має представлення (17).

Тоді з (20) та з того, що

$$q(x)\int_X P(x,dy)R_0 = q(x)R_0 + \Pi - I$$

випливає:

$$\begin{aligned}&\theta(x)V(u) = \\ &= \nabla_b C(u;x)[q(x)R_0 - I]\nabla_b\widetilde{C}(u;x)V''(u).\end{aligned}$$

Таким чином, маємо представлення

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{t0}^\varepsilon V^\varepsilon(u;x) &= a(t)\nabla_b C(u)V'(u) + \\ &+ \varepsilon a^2(t)\theta(x)V(u),\end{aligned}$$

де $\theta(x)V(u)$ має вигляд (16).

Зауважимо, що з гладкості функцій $C(u;x), V(u)$, умови $C.2$ теореми 1 та обмеженості оператора R_0 для (16) отримуємо оцінку для $\theta(x)$:

$$\|\theta(\cdot)V(u)\| < k(1 + V(u)), \ k > 0, \ x \in X.$$

□

Доведення теореми 1 проведемо в декілька етапів. Спочатку встановимо ключову нерівність.

Лема 3. *Генератор $\mathbf{L}_t^\varepsilon$ на збуреній функції Ляпунова* (14) *в умовах теореми 1 допускає оцінку:*

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u;x) \le g(t)(1+V(u)) - \alpha(t)V(u), \quad (21)$$

де

$$\alpha(t) > 0, \ g(t) > 0,$$

$$\int_0^\infty \alpha(t)dt = \infty, \ \int_0^\infty g(t)dt < \infty.$$

Доведення. Використовуючи умову C.1 теореми 1 експоненційної стійкості системи (3), оцінки C.2 (там же) для залишкового члена $\theta_L(x)V(u)$, умову Ліпшиця (умова C.3), а також монотонність та обмеженість функцій $a(t)$, $b(t)$ (умова C.4), отримаємо наведену оцінку (21). □

По-друге, використовуючи явний вигляд збурення (20), а також умову C.2 теореми 1, отримаємо оцінку збуреної функції Ляпунова:

$$0 \ < \ -\varepsilon a(t)\delta(1+V(u))+V(u)<V^{\varepsilon}(u;x)< \\ < \ \varepsilon a(t)\delta(1+V(u))+V(u) \qquad (22)$$

для всіх[1] $\varepsilon<\varepsilon_0$ ($\delta>c_0+c_1>0$).

По-третє, встановимо, що процес

$$V_n^{\varepsilon}=V^{\varepsilon}(u_n^{\varepsilon};x_n^{\varepsilon}),\ n\geq 0, \qquad (23)$$

є невід'ємним супермартингалом. Для цього зауважимо, що розширений процес марковського відновлення (2) породжує на тест-функціях $\varphi(u;\cdot)\in C^3(\mathbb{R}^d)$, мартингал

$$\mu_{n+1} \ = \ \varphi(u_{n+1}^{\varepsilon},x_{n+1}^{\varepsilon})-\varphi(u_0;x_0)- \\ -\varepsilon\sum_{k=0}^{n}\theta_{k+1}\mathbf{L}_{\tau_k^{\varepsilon}}^{\varepsilon}\varphi(u_k^{\varepsilon};x_k^{\varepsilon}), \qquad (24)$$

відносно потоку σ-алгебр $\mathcal{X}_n^{\varepsilon} = \sigma\{u_k^{\varepsilon},x_k^{\varepsilon},\tau_k^{\varepsilon},\ k=\overline{0,n}\},\ n\geq 0$. Дійсно, в позначенні $\varphi_n^{\varepsilon}=\varphi(u_n^{\varepsilon};x_n^{\varepsilon})$ маємо

$$\mathbf{E}[\mu_{n+1}-\mu_n|\mathcal{X}_n^{\varepsilon}]=$$

$$=\mathbf{E}_{\mathcal{X}_n^{\varepsilon}}[\varphi_{n+1}^{\varepsilon}-\varphi_n^{\varepsilon}]-\mathbf{E}_{\mathcal{X}_n^{\varepsilon}}[\varepsilon\theta_{n+1}\mathbf{L}_{\tau_n^{\varepsilon}}^{\varepsilon}\varphi_n^{\varepsilon}]. \qquad (25)$$

Враховуючи означення породжуючого оператора (генератора) (8), обчислимо другий доданок в (25):

$$\mathbf{E}_{\mathcal{X}_n^{\varepsilon}}[\varepsilon\theta_{n+1}\mathbf{L}_{\tau_n^{\varepsilon}}^{\varepsilon}\varphi_n^{\varepsilon}]=\varepsilon g(x_n^{\varepsilon})\mathbf{L}_{\tau_n^{\varepsilon}}^{\varepsilon}\varphi_n^{\varepsilon}=$$

$$=\varepsilon g(x_n^{\varepsilon})\varepsilon^{-1}q(x_n^{\varepsilon})\mathbf{E}_{\mathcal{X}_n^{\varepsilon}}[\varphi_{n+1}^{\varepsilon}-\varphi_n^{\varepsilon}]=$$

$$=\mathbf{E}_{\mathcal{X}_n^{\varepsilon}}[\varphi_{n+1}^{\varepsilon}-\varphi_n^{\varepsilon}].$$

Таким чином, з (25) маємо мартингальну властивість для (24):

$$\mathbf{E}[\mu_{n+1}-\mu_n|\mathcal{X}_n^{\varepsilon}]=0,\ n\geq 0. \qquad (26)$$

Використаємо (26) для доведення наступної леми.

Розглянемо в (24) замість довільної тест-функції $\varphi(u;x)$, $u\in\mathbb{R}^d$, $x\in X$, збурену функцію Ляпунова $V^{\varepsilon}(u;x)$.

Лема 4. *Процес* (23) *є невід'ємним супермартингалом.*

Доведення. Доведення леми 4 проводиться аналогічно до доведення теореми 3.2 [13, Розділ 3 §3].

З (26) отримуємо $\mathbf{E}[\mu_{n+1}^{\varepsilon}|\mathcal{X}_n^{\varepsilon}]=\mu_n^{\varepsilon}$. Тоді використаємо мартингальну характеризацію процесу (23):

$$\mathbf{E}[V_{n+1}^{\varepsilon}|\mathcal{X}_n^{\varepsilon}]=V_0^{\varepsilon}+\varepsilon\mathbf{E}\big[\sum_{k=0}^{n}\theta_{k+1}\mathbf{L}_{\tau_k^{\varepsilon}}^{\varepsilon}V_k^{\varepsilon}\big]+\mu_n^{\varepsilon}, \qquad (27)$$

У (27) підставимо (24) замість μ_n^{ε}:

$$\mathbf{E}[V_{n+1}^{\varepsilon}|\mathcal{X}_n^{\varepsilon}]=V_0^{\varepsilon}+\varepsilon g(x_n^{\varepsilon})\mathbf{L}_{\tau_n^{\varepsilon}}^{\varepsilon}V_n^{\varepsilon}+$$

$$+\varepsilon[\sum_{k=0}^{n-1}\theta_{k+1}\mathbf{L}_{\tau_k^{\varepsilon}}^{\varepsilon}V_k^{\varepsilon}]+V_n^{\varepsilon}-V_0^{\varepsilon}-\varepsilon[\sum_{k=0}^{n-1}\theta_{k+1}\mathbf{L}_{\tau_k^{\varepsilon}}^{\varepsilon}V_k^{\varepsilon}].$$

Далі маємо $\mathbf{E}[V_{n+1}^{\varepsilon}|\mathcal{X}_n^{\varepsilon}] = V_n^{\varepsilon} + \varepsilon g(x_n^{\varepsilon})\mathbf{L}_{\tau_n^{\varepsilon}}^{\varepsilon}V_n^{\varepsilon}$. А разом з основною нерівністю (21) отримуємо $\mathbf{E}[V_{n+1}^{\varepsilon}|\mathcal{X}_n^{\varepsilon}]\geq V_n^{\varepsilon},\ n\geq 0$. □

Тепер розглянемо доведення теореми 1.

Доведення. Оскільки виконані умови модельної граничної теореми Королюка [10, Підрозділ 3.2, с. 51], а також теореми 7.1 Невельсона-Хасьмінського [2, Глава 2, §7], має місце слабка збіжність процесів за скінченновимірними розподілами

$$u^{\varepsilon}(t)\Rightarrow u(t),\ \varepsilon\to 0.$$

Використання оцінок (21) та (22), а також леми 4 завершує доведення теореми 1. □

2. Знаходження оптимального портфеля.

Вперше модель двокритеріального портфеля з критеріями прибутковості і ризику була запропонована Г. Марковіцем в 1951 р. у наступному спрощеному вигляді [14] [2]:

$$\begin{cases} r(u)=\sum\limits_{i=1}^{d}r_iu_i\to max, \\ \widetilde{C}(u;x)=\sum\limits_{i=1}^{d}\sum\limits_{j=1}^{d}S_{ij}(x)u_iu_j\to min, \\ S_{ij}(x)=c_{ij}x_ix_j, \\ \sum\limits_{i=1}^{d}a_{ij}u_i=b_j,\ j=\overline{1,m}, \\ \sum\limits_{i=1}^{d}u_i=1,\ u_i\geq 0, \end{cases} \qquad (28)$$

[1] Легко перевірити, що можна покласти $\varepsilon_0=\frac{1}{a(t)\delta}\frac{V(u)}{1+V(u)}$.

[2] Детальніше ця модель розглянута у праці [14], а також у монографіях [15, 16].

де $r_i = r_i(t)$ — прибутковість i-го сектора інвестування (с.і.), $x_i = x_i(t)$ — ризик несприятливої зміни ринкових котирувань для i-го с.і. Він також залежить від довжини інвестиційного горизонту, а в якості його оцінки використовується середньоквадратичне відхилення, обчислене за історичними чи змодельованими даними прибутковостей вкладів і відображає агреговану оцінку валютного, цінового та процентного ризиків [15]. $c_{ij} = c_{ij}(t),\ i,j = \overline{1,n}$ — коефіцієнти кореляції випадкових величин прибутковостей с.і. Вони відображають ризик додавання до портфелю i-го j-го виду активу. Додатково накладаються лінійні обмеження на долі розміщених інвестицій і без зменшення загальності вважається, що такі лінійні обмеження мають вигляд рівностей.

Необхідно знайти долі $(u_1, \ldots, u_d)$ капіталу, який слід вкласти у d можливих секторів інвестування, так, щоб мінімізувати варіацію $\widetilde{C}(u;x)$ ефективності портфеля та максимізувати його прибутковість $r(u)$. *Головний недолік моделі — велика кількість вхідних даних S_{ij}, які складно отримати.*

Оскільки на площині $r(u) \times \widetilde{C}(u;x)$ множина ефективних портфелів задачі (28) в загальному випадку є неперервною опуклою догори кривою [14], то для опису цієї множини використовують сімейство дотичних, залежних від деякого параметра μ, який визначає кут нахилу:

$$-\mu r(u) + \widetilde{C}(u;x) = C(u;x),\ \mu \in [0,\infty).$$

З урахуванням того, що дані прямі повинні бути дотичними до опуклої кривої, мінімум $\widetilde{C}(u;x)$ для конкретного μ визначається з умови:

$$-\mu \sum_{i=1}^{d} r_i u_i + \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} S_{ij}(x) u_i u_j \to \min_{u \in U}, \quad (29)$$

$$U = \Big\{ u \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^{d} a_{ij} u_i = b_j,$$
$$j = \overline{1,m},\ u_i \geq 0,\ i = \overline{1,d} \Big\}.$$

Задача (29) є лінійною згорткою двокритеріальної задачі (28) і належить до класу задач опуклого квадратичного програмування, оскільки квадратична форма (завдяки властивостям коваріаційної матриці) є симетричною та невід'ємно визначеною. Оскільки U — опукла множина, то згідно з теоремою Гурвіца [14] множина розв'язків задачі параметричного квадратичного програмування (29) співпадатиме з множиною парето-оптимальних розв'язків задачі (28).

3. Результати моделювання.

Для наочності розглянемо двовимірний випадок, тобто ситуацію, коли є тільки два сектори інвестування (нехай це буде валютний ринок). Потрібно знайти вектор $(u_1, u_2)^T$, що забезпечуватиме мінімум функціоналу $C(u;x)$. У такому випадку $S_{ij}(x)$ — коефіцієнт кореляції валют i та j відносно базової за однаковий період часу. Умови, що накладаються:

- випадкові величини $x = x(t)$ мають марковську властивість;
- $\mathbf{E}x^2(t) < const$, розмах їх коливань приймає значення $\Delta(x) = (0.4, 0.4)$;
- математичне сподівання ризику рівне $\overline{x} = (0.5, 0.5)$;
- при моделюванні припускається, що ризик x може перебувати в одному з трьох станів: $(\overline{x} + \Delta(x), \overline{x} - \Delta(x), \overline{x})$ (максимальна, мінімальна, відсутня зміна ризику).

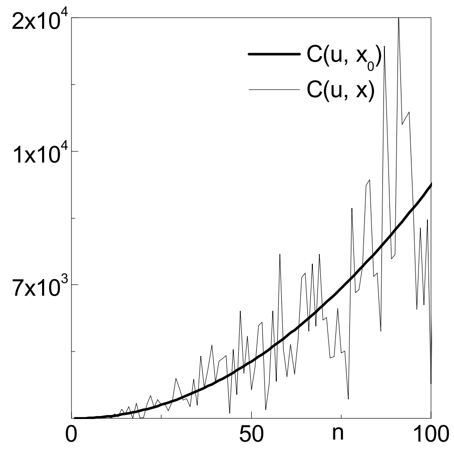

Рис. 1: Проекція цільової функції на площину (u_1, n)

Для прикладу вибрано таку цільову функцію:

$$C(u;x) = -1.3u_1 - 1.6u_2 + x_1u_1^2 + x_1x_2u_1u_2 + x_2u_2^2.$$

На рис. 1 подано її проекцію на площину (u_1, n) при $n = \overline{1,100}$ та $u_2 = u_1$ за умови відсутності $(C(u;x_0))$ та наявності зміни ризиків $(C(u;x))$.

Відомо [17, Глава 2, §3], що для такої функції існує функція Ляпунова. Легко перевірити, що виконані всі умови теореми 1. Тобто має місце слабка збіжність ПСО (1) до точки екстремуму усередненої системи (3).

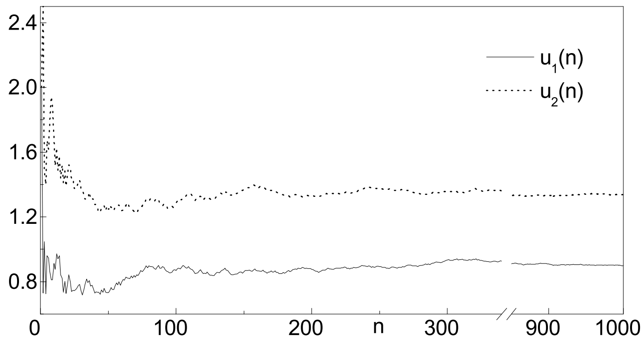

Рис. 2: Результати моделювання

Результати моделювання показано на рис. 2, які в нормованому вигляді мають значення: $\widetilde{u}_1^* \approx 40.2\%,\ \widetilde{u}_2^* \approx 59.8\%$.

Точка мінімуму усередненої системи: $u_1^* = 40\%,\ u_2^* = 60\%$.

Відносна похибка становить: $\delta u_1^* \approx 0.5\%,\ \delta u_2^* \approx 0.3\%$.

Висновки. Досліджено багатовимірну дискретну процедуру стохастичної оптимізації з марковськими перемиканнями в схемі серій.

Використовуючи генератор дискретної процедури для двокомпонентного марковського процесу та його асимптотичне представлення в схемі усереднення, встановлено достатні умови збіжності розглянутої процедури. Ці умови використовуються для дослідження її асимптотичної нормальності.

Також описану процедуру застосовано до знаходження оптимального інвестиційного портфеля. Для цього розроблено відповідну програму в середовищі Matlab. Результати моделювання підтверджують хорошу збіжність процедури до точки екстремуму u^*.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Kiefer J., Wolfowitz J.* Stochastic estimation of the maximum of a regression function //Ann. Math. Satist., — 1952. — №3, — Vol.23, — P. 462-466.

2. *Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З.* Стохастическая апроксимация и рекуррентное оценивание. — М.: Наука, — 1972. — 304 с.

3. *Цыпкин Я.З.* Основы теории автоматических систем. — М.: Наука, — 1977. — 560 с.

4. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.:Наука, 1983.

5. *Льюнг Л., Сёдерстрём Т.* Идентификация систем: теория для пользователя. //М.: Наука, — 1991. — 431 с.

6. *Ермольев Ю.М.* Методы стохастического программирования. М.: Наука, 1976.

7. *Kushner H.J., Yin G.G.* Stochastic Approximation Algorithms and Applications. New York: Springer-Verlag, — 1997. — 415 p.

8. *Катковник В.Я.* Линейные оценки и стохастические задачи оптимизации. — М.: Наука, — 1976. — 487 с.

9. *Урясъев СП.* Адаптивные алгоритмы стохастической оптимизации и теории игр. — М.:Наука, — 1990. — 182 с.

10. *Королюк В.С.* Стохастичні моделі систем. — К.: Либідь, — 1993. — 136 с.

11. *Горун П.П., Чабанюк Я.М., Кукурба В.Р.* Генератор стрибкової процедури оптимізації в марковському середовищі. /XVI International Conference "Problems of decision making under uncertainties"(PDMU-2010, October 4-8, 2010). Київ: Освіта України. — С. 54

12. *Koroliuk V., Limnios N.* Stochastic Systems in Merging Phase Space. — World Scientific Publishing, — 2005. — 330 p.

13. *V.S. Korolyuk and V.V. Korolyuk.* Stochastic Models of Systems. — London: Kluwer acad.pub., — 1999. — 185 p.

14. *Толочко Ю.М.* Двухуровневая математическая модель нахождения оптимального инвестиционного портфеля по рассматриваемым последовательно группам равноправных критериев. //Сб. научных статей под общей редакцией М.М. Ковалева Минск: БГУ, — 2003. — С. 233–257.

15. *Шарп У.* Инвестиции /Шарп У., Александер Г., Бэйли Дж.; пер. с англ. — М.: Инфра-М, — 2001. — XII, 1028 с.

16. *Наталья Костюченко.* Анализ кредитных рисков. ИТД "Скифия", — 2010. — 440 с.

17. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.:Наука, — 1970. — 240 с.