УДК 519.21

©2015 р. Д. М. Карвацький

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

ВЛАСТИВОСТІ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОЇ НЕПОВНОЇ СУМИ ЗБІЖНОГО ЗНАКОДОДАТНОГО РЯДУ, ЧЛЕНИ ЯКОГО УТВОРЮЮТЬ УЗАГАЛЬНЕНУ ПОСЛІДОВНІСТЬ ФІБОНАЧЧІ

У статті вивчається Лебегівська структура, топологічні, метричні та фрактальні властивості розподілу випадкової неповної суми збіжного ряду, члени якого є елементами узагальненої послідовності Фібоначчі, а саме, послідовності члени якої (починаючи з третього) володіють властивістю $u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n$, де u_1, u_2, p, s — фіксовані додатні дійсні числа.

In this paper we study Lebesque structure, topological, metric and fractal properties of the distribution of random incomplete sum of the convergent series, whose terms are elements of a Fibonacci generalized sequence, namely, the sequence whose terms satisfy the following condition $u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n$, where u_1, u_2, p, s are fixed positive real numbers.

Вступ.

Послідовність дійсних чисел (u_n), члени якої (починаючи з третього) володіють властивістю

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n, \tag{1}$$

де $u_1, u_2, p, s \in R$, називатимемо *узагальненою послідовністю Фібоначчі.*

Узагальнена послідовність Фібоначчі є чотирьохпараметричним об'єктом, бо з (1) зрозуміло, що вираз її загального члена залежить від параметрів $u_1,\ u_2,\ p,\ s$. Тривіальним прикладом узагальненої послідовності Фібоначчі є $(0) = (0, 0, 0, \ldots)$ — нуль-послідовність. Очевидно, що коли $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ — узагальнена послідовність Фібоначчі, то $(u_n)_{n=m}^{\infty}$ — теж узагальнена послідовність Фібоначчі. Прикладами узагальнених послідовностей Фібоначчі є довільні геометричні прогресії, класична послідовність Фібоначчі, послідовність Люка, послідовність Пелля, послідовність Якобшталя та інші.

Множина

$$F = \{(u_n) :\ u_1, u_2 \in R,\ u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n\}$$

узагальнених послідовностей Фібоначчі, з фіксованими параметрами p та s, утворює двовимірний лінійний простір [8]. На множині таких послідовностей можна природнім способом ввести лінійні операції, скалярний добуток, норму, метрику.

1. Знакододатний ряд, члени якого утворюють узагальнену послідовность Фібоначчі.

Розглянемо знакододатній ряд

$$u_1 + u_2 + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+2},\ u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n, \tag{2}$$

$$u_1, u_2, p, s \in R^+,\ n \in N,$$

тобто ряд, члени якого є елементами узагальненої послідовності Фібоначчі з додатними початковими параметрами u_1, u_2, p, s.

Теорема 1. (Формула типу Біне). Для загального члена ряду (2) справедлива наступна рівність

$$u_{n+1} = \frac{\Phi^n (u_2 - u_1\Psi) - \Psi^n (u_2 - u_1\Phi)}{\Phi - \Psi}, \tag{3}$$

де

$$\Phi = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4s}}{2}, \Psi = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4s}}{2}.$$

Доведення. Задача знаходження загального члена ряду (2) рівносильна задачі розв'язання однорідного різницевого рівняння другого порядку (див. [10])

$$y(x+2) - py(x+1) - sy(x) = 0. \tag{4}$$

Характеристичне рівняння даного різницевого рівняння має вигляд

$$\lambda^2 - p\lambda - s = 0. \tag{5}$$

Оскільки, параметри p та s за умовою є додатними, то коренями рівняння (5) будуть дійсні числа $\Phi = \frac{p+\sqrt{p^2+4s}}{2}$ та $\Psi = \frac{p-\sqrt{p^2+4s}}{2}$, причому $\Phi \neq \Psi$. Корені характеристичного рівняння задають два розв'язки рівняння (4): $y_1(x) = \Phi^x$ та $y_2(x) = \Psi^x$. Отже, загальний розв'язок можна записати як функцію

$$y(x) = c_1\Phi^{x-1}+c_2\Psi^{x-1},$$

а враховуючи початкові умови

$$\begin{cases} c_1y_1(1) + c_2y_2(1) = u_1, \\ c_1y_1(2) + c_2y_2(2) = u_2, \end{cases}$$

можна знайти сталі c_1 та c_2. Матимемо

$$c_1 = \frac{u_2 - u_1\Psi}{\Phi - \Psi}, \quad c_2 = -\frac{u_2 - u_1\Phi}{\Phi - \Psi}.$$

Таким чином, загальний член ряду (2) буде мати вигляд

$$u_n = \frac{\Phi^{n-1}(u_2 - u_1\Psi) - \Psi^{n-1}(u_2 - u_1\Phi)}{\Phi - \Psi}.$$

Наслідок 1. Для членів ряду (2) має місце наступна рівність

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \Phi.$$

Доведення. Використовуючи рівність (3), шукану границю можна записати як

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi^n(u_2 - u_1\Psi) - \Psi^n(u_2 - u_1\Phi)}{\Phi^{n-1}(u_2 - u_1\Psi) - \Psi^{n-1}(u_2 - u_1\Phi)}.$$

Враховуючи те, що для членів ряду (2) початкові параметри u_1, u_2, p, s є додатними, для чисел Φ та Ψ виконуються наступні твердження

$$\Phi = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4s}}{2} > 0,$$

$$\Psi = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4s}}{2} < 0,$$

$$|\Phi| > |\Psi| \quad , \quad u_2 - u_1\Psi \neq 0.$$

Взявши до уваги останні нерівності, можна зробити висновок, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \Phi.$$

Наслідок 2. Для збіжності ряду (2) необхідно і достатньо, щоб виконувалася система нерівностей

$$\begin{cases} 0 < p < 1, \\ 0 < s < 1 - p. \end{cases} \tag{6}$$

Доведення. Оскільки, загальний член ряду (2) має вигляд (3), то очевидно, що для збіжності ряду необхідно і достатньо, щоб виконувалася хоча б одна з трьох систем

$$\begin{cases} |\Phi| < 1, \\ |\Psi| < 1, \end{cases} \begin{cases} |\Phi| < 1, \\ u_2 = u_1\Phi, \end{cases} \begin{cases} |\Psi| < 1, \\ u_2 = u_1\Psi. \end{cases}$$

Врахувавши те, що

$$|\Phi| > |\Psi| \quad , \quad u_2 - u_1\Psi \neq 0,$$

необхідну і достатню умову збіжності ряду можна записати як систему нерівностей

$$\begin{cases} 0 < \Phi < 1, \\ -\Phi < \Psi < 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{p+\sqrt{p^2+4s}}{2} < 1, \\ -1 < \frac{p-\sqrt{p^2+4s}}{2} < 0. \end{cases}$$

Останню можна переписати відносно параметрів p та s у вигляді

$$\begin{cases} 0 < p < 1, \\ 0 < s < 1 - p. \end{cases}$$

Лема 1. Якщо ряд (2) збіжний, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = r = \frac{u_1(1-p) + u_2}{1 - p - s}. \tag{7}$$

Доведення. Нехай виконується умова леми. Використовуючи рівність (3), можна записати наступне

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} u_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi^{n-1}(u_2 - u_1\Psi) - \Psi^{n-1}(u_2 - u_1\Phi)}{\Phi - \Psi}.$$

Оскільки, ряд (2) за умовою збіжний, то з умови (6) слідує, що $|\Phi| < 1$ та $|\Psi| < 1$. Таким чином, сума ряду (2) є сумою двох збіжних геометричних прогресій зі знаменниками Φ та Ψ відповідно, звідки отримуємо наступне

$$r = \frac{u_2 - u_1\Psi}{(\Phi - \Psi)(1 - \Phi)} - \frac{u_2 - u_1\Phi}{(\Phi - \Psi)(1 - \Psi)} =$$

$$= \frac{u_1 - u_1(\Phi + \Psi) + u_2}{1 - (\Psi + \Phi) + \Phi\Psi}.$$

Врахувавши рівності $\Phi \cdot \Psi = -s$ та $\Phi + \Psi = p$, останню тотожність можна записати у вигляді

$$r = \frac{u_1(1-p) + u_2}{1 - p - s}.$$

Лему доведено.

Лема 2. Якщо ряд (2) збіжний, то

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n = r_k = \frac{u_{k+1} + su_k}{1 - p - s}. \qquad (8)$$

Доведення. Нехай виконується умова леми. Використовуючи рівність (3), можна записати наступне

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n =$$

$$= \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\Phi^{n-1}(u_2 - u_1\Psi) - \Psi^{n-1}(u_2 - u_1\Phi)}{\Phi - \Psi}.$$

Оскільки, ряд (2) за умовою збіжний, то $|\Phi| < 1$ та $|\Psi| < 1$. Число r_k є сумою залишків двох збіжних геометричних прогресій зі знаменниками Φ та Ψ відповідно, звідки отримаємо

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(u_2 - u_1\Psi)}{\Phi - \Psi}\Phi^{n-1} -$$

$$- \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(u_2 - u_1\Phi)}{\Phi - \Psi}\Psi^{n-1} =$$

$$= \frac{(u_2 - u_1\Psi)\Phi^k}{(\Phi - \Psi)(1 - \Phi)} - \frac{(u_2 - u_1\Phi)\Psi^k}{(\Phi - \Psi)(1 - \Psi)} =$$

$$= \frac{u_{k+1} - \Phi\Psi u_k}{(1 - \Psi)(1 - \Phi)}.$$

Врахувавши той факт, що $\Phi \cdot \Psi = -s$ та $\Phi + \Psi = p$, останню рівність можна записати у вигляді

$$r_k = \frac{u_{k+1} - \Phi\Psi u_k}{1 - (\Psi + \Phi) + \Phi\Psi}) = \frac{u_{k+1} + su_k}{1 - p - s}.$$

Лему доведено.

2. Властивості множини неповних сум ряду.

Означення. Якщо $M \in 2^N$, або іншими словами $M \subseteq N$ (N — множина натуральних чисел), то число

$$x = x(M) = \sum_{n \in M} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n, \qquad (9)$$

де

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n \in M, \\ 0, & n \notin M, \end{cases}$$

називається *неповною сумою ряду.*

З роботи I. E. Nyman та R. A. Saenz [5] відомо, що множина неповних сум довільного збіжного знакододатного ряду є однією з трьох типів: скінченним об'єднанням відрізків, множиною канторівського типу або канторвалом.

Означення. *Циліндром* k-ого рангу з основою $c_1c_2\ldots c_k$, де $c_i \in \{0, 1\}$, називається множина $\Delta'_{c_1c_2\ldots c_k}$, яка містить всі неповні суми ряду (2) виду

$$\sum_{n=1}^{k} c_n u_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} \varepsilon_n u_n, \text{ де } \varepsilon_n \in \{0, 1\}.$$

Означення. *Циліндричним відрізком* рангу k з основою $c_1c_2\ldots c_k$ називається відрізок

$$\Delta_{c_1c_2\ldots c_k} = \left[\inf \Delta'_{c_1c_2\ldots c_k}, \sup \Delta'_{c_1c_2\ldots c_k}\right] =$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{k} c_n u_n, r_k + \sum_{n=1}^{k} c_n u_n\right].$$

В залежності від (u_n) і набору $c_1c_2\ldots c_k$ можливі випадки, коли $\Delta'_{c_1c_2\ldots c_k}$ і $\Delta_{c_1c_2\ldots c_k}$ співпадають та не співпадають, але завжди $\Delta'_{c_1c_2\ldots c_k} \subset \Delta_{c_1c_2\ldots c_k}$. Безпосередньо з означення випливають наступні властивості циліндричних множин:

1. $$\inf \Delta_{c_1c_2\ldots c_k} = \inf \Delta'_{c_1c_2\ldots c_k},$$

$$\sup \Delta_{c_1c_2\ldots c_k} = \sup \Delta'_{c_1c_2\ldots c_k}.$$

2. $$\Delta_{c_1c_2\ldots c_k} \supset \Delta_{c_1c_2\ldots c_k 0} \bigcup \Delta_{c_1c_2\ldots c_k 1},$$

$$\Delta'_{c_1c_2\ldots c_k} = \Delta'_{c_1c_2\ldots c_k 0} \bigcup \Delta'_{c_1c_2\ldots c_k 1}.$$

3. $\inf \Delta_{c_1c_2\ldots c_k} = \inf \Delta_{c_1c_2\ldots c_k0} < \inf \Delta_{c_1c_2\ldots c_k1}$,

$$\sup \Delta_{c_1c_2\ldots c_k} = \sup \Delta_{c_1c_2\ldots c_k1} > \sup \Delta_{c_1c_2\ldots c_k0}.$$

4. $|\Delta_{c_1c_2\ldots c_k}| = r_k \to 0$, при $k \to \infty$.

5. $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_{c_1c_2\ldots c_k} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta'_{c_1c_2\ldots c_k} \equiv$

$$\equiv \Delta_{c_1c_2\ldots c_k\ldots} = x \subset \left[0\,,\ \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}\right].$$

6.

$$\frac{|\Delta_{c_1c_2\ldots c_kc_{k+1}}|}{|\Delta_{c_1c_2\ldots c_k}|} = \frac{r_{k+1}}{r_{k+1}+u_{k+1}} =$$

$$= \frac{1}{\delta_{k+1}+1}, \text{де } \delta_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{r_{k+1}}.$$

7. $\Delta_{c_1c_2\ldots c_k} = \Delta_{s_1s_2\ldots s_k} \leftrightarrow c_i = s_i, i = \overline{1,k}$.

8.

$$\Delta_{c_1c_2\ldots c_k1} \bigcap \Delta_{c_1c_2\ldots c_k0} =$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{k} c_n u_n + u_{n+1}, \sum_{n=1}^{k} c_n u_n + r_n\right],$$

якщо $u_{k+1} < r_{k+1}$;

$$\Delta_{c_1c_2\ldots c_k1} \bigcap \Delta_{c_1c_2\ldots c_k0} =$$

$$= \Delta_{c_1c_2\ldots c_k10\ldots0\ldots}, \text{ якщо } u_{k+1} = r_{k+1};$$

$$\Delta_{c_1c_2\ldots c_k1} \bigcap \Delta_{c_1c_2\ldots c_k0} = \emptyset, \text{ якщо } u_{k+1} > r_{k+1}.$$

9.

$$\left|\Delta_{c_1c_2\ldots c_k1} \bigcap \Delta_{c_1c_2\ldots c_k0}\right| =$$

$$= \begin{cases} r_{k+1} - u_{k+1}, & \text{якщо } u_{k+1} < r_{k+1}, \\ 0, \ \text{якщо } u_{k+1} \geq r_{k+1}. \end{cases}$$

Теорема 2 ([1]). Множина неповних сум Δ' збіжного знакододатного ряду має наступні властивості:

1. вона є досконалою множиною (замкненою без ізольованих точок);
2. $\Delta' = \bigcup\limits_{c_1c_2\ldots c_m} \Delta'_{c_1c_2\ldots c_m}$ для довільного $m \in N$, причому всі $\Delta'_{c_1c_2\ldots c_m}$, які входять в об'єднання, є ізометричними;
3. вона являє собою скінченне об'єднання відрізків, якщо нерівність $r_n < u_n$ виконується лише для скінченного числа n;
4. вона є ніде не щільною множиною, якщо нерівність $r_n \geq u_n$ виконується лише для скінченного числа n.

Теорема 3. Якщо для ряду (2) виконується система нерівностей

$$\begin{cases} 0 < p < 1, \\ \max\{0, \frac{1}{4} - \frac{p}{2}\} \leq s < 1-p, \end{cases} \tag{10}$$

то ряд збігається, а множина його неповних сум являє собою скінченне об'єднання відрізків.

Доведення. Якщо виконується умова теореми, то автоматично виконується система (6), яка є необхідною і достатньою умовою збіжності ряду. Систему (10) відносно чисел Φ та Ψ можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} \frac{1}{2} < \Phi < 1, \\ -\Phi < \Psi < 0. \end{cases}$$

Для ряду (2) введемо до розгляду величину

$$\delta_n = \frac{u_n}{r_n},$$

де u_n — n-ий член, а r_n — відповідно n-ий залишок ряду. Використовуючи рівності (3) та (8), можна встановити наступне

$$\delta_n = \frac{\Phi^{n-1}(u_2 - u_1\Psi) - \Psi^{n-1}(u_2 - u_1\Phi)}{\frac{(u_2 - u_1\Psi)\Phi^n}{1-\Phi} - \frac{(u_2 - u_1\Phi)\Psi^n}{1-\Psi}}.$$

Враховуючи, що $|\Phi| > |\Psi|$ при додатних параметрах p та s, правильною буде рівність

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \delta_n = \frac{1-\Phi}{\Phi}.$$

Оскільки, $\frac{1}{2} < \Phi < 1$, то можна зробити висновок, що $\delta < 1$, або іншими словами нерівність $r_n < u_n$ для ряду (2) виконується лише скінченну кількість разів. Звідси, за теоремою 2, множина неповних сум ряду буде являти собою скінченне об'єднання відрізків. Теорему доведено.

Наведемо далі означення α-мірної міри Гаусдорфа та розмірності Гаусдорфа–Безиковича (детальніше описання в [7]), які будуть потрібні далі.

Нехай E — довільна обмежена підмножина R^1, $d(E)$ — діаметр множини E і Υ —

сім'я всіх непорожніх підмножин простору R^1. Тоді для довільних $\alpha > 0$ і $\varepsilon > 0$ можна означити величину

$$m_\alpha^\varepsilon(E) = \inf_{d(E_j)\le\varepsilon} \left\{ \sum_j d^\alpha(E_j) \right\},$$

де інфімум береться по всіх не більш ніж зчисленних ε-покриттях $\{E_j\}$ множини E множинами $E_j \in \Upsilon$. Величина $m_\alpha^\varepsilon(E)$ називається наближаючою мірою порядку ε.

Означення. Невід'ємне число

$$H_\alpha(E) = \lim_{\varepsilon\to 0} m_\alpha^\varepsilon(E) = \sup_{\varepsilon>0} m_\alpha^\varepsilon(E)$$

називається *α-мірою Гаусдорфа–Безиковича множини E.*

Якщо Υ - сім'я всіх відкритих підмножин з R^1 або сім'я всіх замкнених підмножин з R^1, то отримуємо ту ж міру Гаусдорфа $H_\alpha(E)$, хоча наближаючі міри порядку ε можуть відрізнятися одна від одної.

Означення. Невід'ємне число

$$\alpha_0(E) = \sup\{\alpha : H_\alpha(E) = +\infty\} =$$
$$= \inf\{\alpha : H_\alpha(E) = 0\}$$

називається *розмірністю Гаусдорфа–Безиковича множини E.*

Теорема 4. ([7]). Якщо ряд (2) задовольняє умову $a_k \ge r_k$ для довільного $k \in N$ (це еквівалентно тому, що $\delta_k = \frac{a_k}{r_k} \ge 1$), тоді розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини його неповних сум обчислюється за формулою

$$\alpha_0(A) = \left[\overline{\lim_{k\to\infty}} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \log_2(\delta_i + 1) \right) \right]^{-1}.$$

Наслідок 3. Якщо для ряду (2) виконуються умови теореми 4 та $\lim_{n\to\infty} \delta_n = \delta$, то розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини його неповних сум обчислюється як

$$\alpha_0(A) = \log_2{}^{-1}(\delta + 1).$$

Теорема 5. Якщо для ряду (2) виконується система нерівностей

$$\begin{cases} 0 < p < \frac{1}{2}, \\ 0 < s < \frac{1}{4} - \frac{p}{2}, \end{cases} \tag{11}$$

то ряд буде збігатися, а множина його неповних сум буде:

1. досконалою;
2. ніде не щільною;
3. нульової міри Лебега;
4. розмірності Гаусдорфа-Безиковича

$$\alpha_0 = -\log_\Phi 2.$$

Доведення. Якщо виконується умова теореми, то автоматично виконується система (6), яка є необхідною і достатньою умовою збіжності ряду. Умову (11) відносно чисел Φ та Ψ можна записати наступним чином

$$\begin{cases} 0 < \Phi < \frac{1}{2}, \\ -\Phi < \Psi < 0. \end{cases}$$

У такому випадку

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \delta_n = \frac{1-\Phi}{\Phi} > 1.$$

Тоді, згідно теореми 2, множина неповних сум ряду буде досконалою та ніде не щільною, оскільки нерівність $r_n \ge u_n$ $(\delta > 1)$ виконується лише для скінченного числа n.

Міра Лебега множини неповних сум ряду (2) обчислюється за формулою (в загальному випадку не перевищує числа λ)

$$\lambda(\Delta') = \lim_{n\to\infty} 2^n r_n = \lim_{n\to\infty} 2^n \frac{u_{n+1} + s u_n}{1-p-s} =$$
$$= \frac{1}{1-p-s} \left(\lim_{n\to\infty} 2^n u_{n+1} + s \lim_{n\to\infty} 2^n u_n \right).$$

Неважко переконатися, що при виконанні умови теореми

$$2^n r_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Це і доводить нульмірність за Лебегом множини неповних сум ряду (2).

Згідно з наслідком 3, розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини неповних сум ряду можна обчислити за формулою

$$\alpha_0(A) = \log_2{}^{-1}(\delta + 1) =$$
$$= \log_2{}^{-1}\left(\frac{1}{\Phi}\right) = -\log_\Phi 2.$$

Теорему доведено.

3. Розподіл випадкової неповної суми ряду, члени якого є елементами узагальненої послідовності Фібоначчі.

Розглянемо випадкову величину ξ, що задається наступним чином

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k u_k, \tag{12}$$

де ξ_k — послідовність незалежних випадкових величин з розподілами: $P\{\xi_k = 0\} = p_{0k} \geq 0, P\{\xi_k = 1\} = p_{1k} \geq 0, p_{0k} + p_{1k} = 1$, а $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ — збіжний знакододатній ряд (2), члени якого утворюють узагальнену послідовність Фібоначчі з додатними початковими параметрами.

Властивості випадкової величини ξ визначаються властивостями нескінченної стохастичної матриці $||p_{ik}||$ та властивостями членів ряду (2), причому не залежить від суми r ряду (вважаючи, що еквівалентні розподіли мають однакові властивості). З теореми Джессена-Вінтнера [2] випливає, що ξ має чистий розподіл (чисто дискретний, чисто абсолютно неперервний, або чисто сингулярний). Теорема П. Леві [3] дає необхідні і достатні умови дискретності: випадкова величина ξ — дискретна тоді і тільки тоді, коли

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0.$$

Означення. *Спектром* S_ξ функції розподілу F_ξ випадкової величини ξ називається множина всіх точок росту функції розподілу F_ξ, тобто

$$S_\xi = \{x : F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x-\varepsilon) > 0 \; \forall \, \varepsilon > 0\}$$

$$= \{x : P\{\xi \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\} > 0 \; \forall \, \varepsilon > 0\}.$$

Спектр розподілу випадкової величини ξ є підмножиною множини неповних сум числового ряду (2).

В залежності від тополого-метричних властивостей спектра, розрізняють три чисті типи сингулярних розподілів:

1. $C-$типу (канторівського типу), якщо міра Лебега спектра дорівнює нулю;
2. $S-$типу (салемівського типу), якщо

$$S_\xi \supset \bigcup_i [a_i, b_i] \;\text{ і }\; \mu_\xi \left(S_\xi \backslash \bigcup_i [a_i, b_i] \right) = 0,$$

   де μ_ξ — міра, що відповідає розподілу випадкової величини ξ;
3. $P-$типу (квазіканторівського типу), якщо S_ξ є ніде не щільною множиною додатної міри Лебега.

Теорема 6. Якщо $M = 0$, а для (u_n) виконується система нерівностей

$$\begin{cases} 0 < p < \frac{1}{2}, \\ 0 < s < \frac{1}{4} - \frac{p}{2}, \end{cases}$$

то випадкова величина ξ має чисто сингулярний розподіл канторівського типу.

Доведення. При $M = 0$ випадкова величина ξ за теоремою П. Леві має неперервний розподіл, тобто він кожній одноточковій множині приписує нульову ймовірність. Множина неповних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, згідно теореми 5, є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега. Оскільки спектр випадкової величини S_ξ є підмножиною множини неповних сум ряду (2), то його міра Лебега також дорівнює нулю. Отже, випадкова величина ξ має сингулярний розподіл канторівського типу. Теорему доведено.

Функцію розподілу $F_\xi(x)$ випадкової величини ξ досить визначити в точках спектра розподілу S_ξ, оскільки в інших точках вона довизначається за неперервністю та монотонністю.

4. Поведінка модуля характеристичної функції однієї випадкової величини.

Розглянемо частковий випадок випадкової величини ξ, при наступних значеннях параметрів: $u_1 = \frac{2}{9}, u_2 = \frac{10}{81}, p = \frac{2}{9}, s = \frac{1}{27}$ та $M = 0$. Згідно теореми 6, випадкова величина ξ, за таких умов, матиме чисто сингулярний розподіл канторівського типу. Використовуючи рівність (3), можна записати наступне

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \left(\left(\frac{1}{3}\right)^k + \left(-\frac{1}{9}\right)^k \right).$$

Означення. *Характеристичною функцією* випадкової величини ξ називається математичне сподівання випадкової величини $e^{it\xi}$, тобто

$$f_\xi(t) = Me^{it\xi}.$$

З [9] відомо, що величина

$$L_\xi = \lim_{|t|\to\infty} \sup |f_\xi(t)|$$

набуває значення 1 у випадку дискретності випадкової величини ξ та значення 0 у випадку, коли ξ має абсолютно неперервний розподіл. Для сингулярних розподілів L_ξ може набувати довільного значення з відрізку $[0,1]$.

Таким чином, характеристична функція дає змогу дослідити властивості сингулярного розподілу випадкової величини ξ, порівняти його близькість за властивосями до дискретних або абсолютно неперервних.

Лема 3. Характеристична функція випадкової величини ξ має вигляд

$$f_\xi(t) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(p_{0k} + p_{1k}e^{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^k + \left(-\frac{1}{9}\right)^k\right)ti}\right),$$

а її модуль записується у вигляді

$$|f_\xi(t)| = \prod_{k=1}^{\infty}|f_k(t)|,$$

де

$$|f_k(t)| = \\ = \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k}\sin^2\left(\left(\frac{1}{3}\right)^k + \left(-\frac{1}{9}\right)^k\right)\frac{t}{2}}.$$

Доведення. Використовуючи означення характеристичної функції та властивості математичного сподівання, отримуємо

$$f_\xi(t) = Me^{it\xi} = M\exp\left(it\sum_{k=1}^{\infty}u_k\xi_k\right) =$$

$$= M\left(e^{it\xi_1u_1}\cdot e^{it\xi_2u_2}\cdot\ldots\cdot e^{it\xi_ku_k}\cdot\ldots\right) =$$

$$= Me^{it\xi_1u_1}\cdot Me^{it\xi_2u_2}\cdot\ldots\cdot Me^{it\xi_ku_k}\cdot\ldots =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty}\left(p_{0k} + p_{1k}e^{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^k + \left(-\frac{1}{9}\right)^k\right)ti}\right) = \prod_{k=1}^{\infty}f_k(t),$$

$$|f_k(t)| = \sqrt{p_{0k}^2 + 2p_{0k}p_{1k}\cos tu_k + p_{1k}^2} =$$

$$= \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k}\sin^2\frac{t}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^k + \left(-\frac{1}{9}\right)^k\right)}.$$

Лему доведено.

Теорема 8. Має місце нерівність

$$L_\xi = \lim_{|t|\to\infty}\sup|f_\xi(t)| > 0,39.$$

Доведення. Зробимо оцінки

$$|f_\xi(t)| = \prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k}\sin^2\frac{t}{2}u_k} \geq$$

$$\geq \prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{1 - \sin^2\frac{t}{2}u_k} = \prod_{k=1}^{\infty}\left|\cos\frac{t}{2}u_k\right| =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty}\left|\cos\frac{t}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^k + \left(-\frac{1}{9}\right)^k\right)\right|.$$

Матимемо, що

$$L_\xi \geq \lim_{n\to\infty}|f_\xi(t_n)| \geq \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{\infty}|f_k(t)| \geq$$

$$\geq \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{\infty}\left|\cos\frac{t}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^k + \left(-\frac{1}{9}\right)^k\right)\right|.$$

Виберемо послідовність $t = t_n = 2\pi 9^n$. Виразимо

$$\left|\cos\frac{t}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^k + \left(-\frac{1}{9}\right)^k\right)\right| =$$

$$= \left|\cos\left(3^{2n-k}\pi + (-1)^k 9^{n-k}\pi\right)\right| =$$

$$= \begin{bmatrix} 1, \text{якщо } k \leq n, \\ \cos\frac{\pi}{9^{k-n}}, \text{якщо } n < k \leq 2n, \\ \cos\left(\frac{\pi}{3^{k-2n}} + \frac{(-1)^k\pi}{9^{k-n}}\right), \text{якщо } k > 2n. \end{bmatrix}$$

Таким чином,

$$\prod_{k=1}^{\infty}|f_k(t_n)| \geq \prod_{k=n+1}^{2n}\cos\frac{\pi}{9^{k-n}}\cdot$$

$$\cdot\prod_{k=2n+1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{3^{k-2n}} + \frac{(-1)^k\pi}{9^{k-n}}\right).$$

Для $k > n$ справедлива оцінка

$$\cos\frac{\pi}{9^{k-n}} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{2\cdot 9^{k-n}} > 1 - \frac{\pi^2}{2\cdot 81^{k-n}}.$$

Для $k > 2n$ справедлива оцінка

$$\cos\left(\frac{\pi}{3^{k-2n}} + \frac{(-1)^k\pi}{9^{k-n}}\right) =$$

$$= 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2\cdot 3^{k-2n}} + \frac{(-1)^k\pi}{2\cdot 9^{k-n}}\right) >$$

$$> 1 - \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{3^{k-2n}} + \frac{(-1)^k}{9^{k-n}}\right)^2 >$$

$$> 1 - \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{3^{k-2n}} + \frac{1}{9^{k-n}}\right)^2.$$

Отже,

$$\prod_{k=1}^{\infty}|f_k(t_n)| > \prod_{k=n+1}^{2n}\left(1 - \frac{\pi^2}{2\cdot 81^{k-n}}\right)\cdot$$

$$\cdot\prod_{k=2n+1}^{\infty}\left(1 - \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{3^{k-2n}} + \frac{1}{9^{k-n}}\right)^2\right) >$$

$$> \prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\pi^2}{2\cdot 81^i}\right)\cdot$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{3^j} + \frac{1}{9^{j+2}}\right)^2\right).$$

Згідно з ознакою збіжності нескінченного добутку, останній є збіжним, оскільки ряди

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{2\cdot 81^i} \quad \text{та} \quad \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{3^j} + \frac{1}{9^{j+2}}\right)^2$$

є збіжними.

Враховуючи отримані твердження та оцінки, буде справедливою наступна нерівність

$$L_\xi = \lim_{n\to\infty}\sup|f_\xi(t_n)| > \prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\pi^2}{2\cdot 81^i}\right)\cdot$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{3^j} + \frac{1}{9^{j+2}}\right)^2\right) = c.$$

Матимемо, що $L_\xi > c \approx 0,3909693738 > 0$.

Таким чином, можна зробити висновок, що ξ не є мірою Райхмана [4], бо $L_\xi \neq 0$. Розподіл випадкової величини за своїми властивостями не є близьким до абсолютно неперервних розподілів.

В загальній постановці задачі випадкова неповна сума ряду (2) може мати дискретний, абсолютно неперервний або сингулярний розподіл, в залежності від параметрів u_1, u_2, p, s та ймовірностей p_{0k}, p_{1k}.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Gontcharenko Ya. V., Pratsiovytyi M. V., Torbin G. M. Fractal properties of probability distributions on the set of incomplete sums of positive series, Transactions of the Dragomanov National Pedagogical University of Ukraine. Series 1. Phys.-Math. Sciences, Dragomanov National Pedagogical University of Ukraine, Kyiv, (2005), no. 6, 232–250.

2. Jessen B., Wintner A. Distribution functions and Rieman Zeta-function // Trans. Amer. Math. Soc., 38 (1), 1935, p.48-88.

3. Levy P. Sur les series dont les termes sont des variables independantes // Studia math., 1931 (3), p.119-155.

4. Lyons R. Seventy years of Rajchmann measures // J. Fourier Anal. Appl., Spesial issue. — 1995. — P. 363-377.

5. Nyman I.E., Saenz R. A. On a paper of Guthrie and Nyman on subsums of infinite series // Colloquium matematicum. – 2000. – 10, N1. – vol. 83.

6. Pratsiovytyi M. V. Distributions of sums of random power series // Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukrain. – 1996, N5. – C. 32-37.

7. Pratsiovytyi M. V. Fractal Approach to Investigations of Singular Probability Distributions // Dragomanov National Pedagogical University, Kyiv, – 1998.

8. Карвацький Д. М., Василенко Н. М. Математичні структури у просторах узагальнених послідовностей Фібоначчі // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — 13(1). — К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. — С. 118-128.

9. Лукач Е. Характеристичиские функции. — М.: Наука, 1979. — 424 с.

10. Романко В.К. Разностные уравнения. — М.: Бином, 2006. — 112 с.