

©2015 р. Д.В. Луківська¹, О.В. Шавала²¹Львівський національний університет імені Івана Франка,²Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана ФранкаПРО МЕРОМОРФНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З
ЗАДАНИМИ ПОЛЮСАМИ

Для заданої послідовності комплексних чисел Λ побудовано рівняння $f^{(n)} + Af^m = 0$, $m, n \in \mathbb{N}$ ($f'' + Af = 0$), де A – ціла (мероморфна в \mathbb{C}) функція, які мають мероморфні розв'язки з полюсами в точках Λ . Отриманий результат для рівняння $f'' + Af = 0$ узагальнено для випадку двох послідовностей.

For a given sequence of complex numbers Λ the equations $f^{(n)} + Af^m = 0$, $m, n \in \mathbb{N}$ ($f'' + Af = 0$) were constructed, where A is an entire (meromorphic in \mathbb{C}) function. This equations have meromorphic solutions with poles at the points of Λ . The result obtained for the equation $f'' + Af = 0$ is generalized for the case of two sequences.

Ми досліджуємо мероморфні розв'язки диференціальних рівнянь вигляду

$$f^{(n)} + Af^m = 0, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

і зокрема

$$f'' + Af = 0, \quad (2)$$

за умови, що послідовністю їх полюсів є послідовність Λ комплексних чисел λ_k кратності $p_k \in \mathbb{N}$ без точок скупчення в \mathbb{C} , тобто відображення $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{N}$, де кожному натуральному числу k ставиться у відповідність (λ_k, p_k) . Отримані результати для рівняння (2) поширено на випадок двох послідовностей Λ і M , які можуть бути послідовностями нулів і полюсів, де M – послідовність комплексних чисел μ_k кратності $q_k \in \mathbb{N}$ без точок скупчення в \mathbb{C} , тобто відображення $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{N}$, де кожному натуральному числу k ставиться у відповідність (μ_k, q_k) .

Чи не вперше питання, за яких умов задана послідовність Λ , де $p_k = 1$ може бути послідовністю нулів цілого розв'язку рівняння (2), де A – ціла функція, розглядалось у працях [1] і [2]. Ці результати були узагальнені у працях [1], [3] на випадок двох послідовностей Λ і M з попарно-різними елементами за умови $p_k = q_k = 1$, які можуть бути послідовностями нулів двох лінійно незалежних розв'язків рівняння (2), де A – ціла функція. Огляд цих результатів можна знайти в [4].

Властивості нулів функцій $f_1 f_2$ і $(f_1/f_2)'$ та полюсів функцій $f_1 f_2$ і f_1/f_2 , де $\{f_1, f_2\}$ – фундаментальна система розв'язків рівняння (2), в якому коефіцієнт A – мероморфна функція, досліджувались у [5].

Зазначимо, що розв'язки рівняння (1) можуть мати рухомі особливі точки, що значно ускладнює їхнє дослідження. У даній роботі аналогічно, як у працях [6], [7], де розглядаються ієрархії рівнянь Пенлеве, будемо розглядати ієрархії рівнянь (1), які утворені з рівнянь, що для фіксованої послідовності Λ мають мероморфні розв'язки без нулів з полюсами у цих точках, такі, що функція A є цілою.

Для доведення основних результатів нам знадобиться лема.

Лема. *Нехай функція f має полюс в точці λ кратності p . Тоді $(f^{(k)})^m$ має полюс в точці λ кратності $(p+k)t$.*

Доведення. Покажемо спочатку методом математичної індукції, що, якщо для всіх $k \in \mathbb{N}$ функція f має полюс кратності p в точці $z = \lambda$, то $f^{(k)}$ має полюс кратності $(p+k)$ в точці $z = \lambda$.

За теоремою [8, с. 117-118] в околі полюса p -го порядку $f(z) = (z - \lambda)^{-p} \Psi(z)$, де Ψ – аналітична функція в деякому околі точки λ , така що $\Psi(\lambda) \neq 0$.

Покажемо, що твердження виконується

при $k = 1$. Справді

$$f'(z) = \frac{\Psi'(z)(z - \lambda) - p\Psi(z)}{(z - \lambda)^{p+1}}.$$

Функція $\Psi_1(z) = \Psi'(z)(z - \lambda) - p\Psi(z)$ є аналітичною в деякому околі точки λ , для якої $\Psi_1(\lambda) = -p\Psi(\lambda) \neq 0$. Отже, точка λ для функції f' є полюсом кратності $(p + 1)$.

Припустимо, що твердження виконується при $n = k - 1$, тобто функція $g = f^{(k-1)}$ має полюс кратності $(p + k - 1)$. Тоді, за теоремою [8, с. 117-118],

$$g(z) = \frac{\Psi_{k-1}(z)}{(z - \lambda)^{p+k-1}}, \quad g'(z) = \frac{\Psi_k(z)}{(z - \lambda)^{p+k}},$$

де $\Psi_k(z) = \Psi'_{k-1}(z)(z - \lambda) - (p + k - 1)\Psi_{k-1}(z)$ – аналітична функція в деякому околі точки λ така, що $\Psi_k(\lambda) = -(p + k - 1)\Psi_{k-1}(\lambda) \neq 0$. Отже, функція $g' = f^{(k)}$ має полюс в точці $z = \lambda$ кратності $(p + k)$. Таким чином, ми одержали, що

$$(f^{(k)}(z))^m = \frac{\Psi_k^m(z)}{(z - \lambda)^{(p+k)m}},$$

тобто $(f^{(k)})^m$ має полюс в точці $z = \lambda$ кратності $(p + k)m$.

Досліджуючи мероморфні розв'язки рівняння (2), можна отримати наступний результат.

Теорема 1. Для довільної послідовності Λ існує мероморфна функція A з полюсами в точках λ_k кратності 2, така, що рівняння (2) має принаймні один мероморфний розв'язок f без нулів з полюсами в точках λ_k кратності p_k .

Доведення. Для заданої послідовності Λ за теоремою Вейерштрасса існує ціла функція F з нулями в точках λ_k кратності p_k і лише в них. Тоді функція $f = 1/F$ має полюси в точках λ_k кратності p_k і не має нулів. За лемою функція f'' має полюси в точках λ_k кратності $(p_k + 2)$. Крім цього, якщо f задовольняє рівняння (2), то $A = -f''/f$. Отже, коефіцієнт A є мероморфною функцією з полюсами в точках λ_k кратності 2.

Прямим узагальненням рівняння (2) є рівняння (1), для якого виконується наступне твердження.

Теорема 2. Для того, щоб існувала ціла функція A , така, що рівняння (1) має мероморфний розв'язок без нулів з полюсами Λ необхідно і досить, щоб

$$m > 1, \quad n \leq p_k(m - 1), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Доведення. Нехай існує ціла функція A , така, що рівняння (1) має мероморфний розв'язок f без нулів з полюсами в точках λ_k кратності p_k . Тоді, згідно з лемою, $f^{(n)}$ має полюс $(p_k + n)$ -ої кратності, f^m має полюс кратності mp_k в точці λ_k . Оскільки $A = -f^{(n)}/f^m$ і функція A є цілою, то $p_k + n - mp_k \leq 0$. Тому $1 + n/p_k \leq m$ і, отже, виконується (3).

Нехай тепер виконується (3) і рівняння (1) має мероморфний розв'язок без нулів. За теоремою Вейерштрасса існує ціла функція F з нулями в точках λ_k кратності p_k і лише в них. Тоді функція $f = 1/F$ має полюси в точках λ_k кратності p_k і не має нулів. За лемою, $f^{(n)}$ має полюс кратності $(p_k + n)$, а f^m має полюс кратності mp_k в точці λ_k . Покладемо $A = -f^{(n)}/f^m$. Тоді функція A є цілою, оскільки пара нерівностей (3) рівносильна нерівності $p_k + n - mp_k \leq 0$.

Зауваження 1. Зазначена вище умова $n \leq p_k(m - 1)$, $k \in \mathbb{N}$ рівносильна умові $n \leq p(m - 1)$, де $p = \max_{k \in \mathbb{N}} p_k$.

Зауваження 2. Мероморфні розв'язки рівняння $f^{(n)} - f^m = 0$, де m не обов'язково натуральне число, досліджувались у праці [9].

Приклад 1. Розглянемо послідовність $\Lambda = (\pi k, 1)$. Тоді функція $f(z) = \sin^{-1} z$ є мероморфним розв'язком рівняння

$$f''' + (5 \sin^2 z \cos z + \sin^2 z \cos^3 z) f^6 = 0,$$

де коефіцієнт A є цілою функцією.

Теорема 3. Для довільних послідовностей Λ і M , де $p_n = 1$ і $\lambda_n \neq \mu_k$ для всіх $n, k \in \mathbb{N}$ існує мероморфна функція A з полюсами в точках μ_k кратності 2 і простими полюсами або точками голоморфності λ_k , така, що рівняння (2) має мероморфний розв'язок f з простими нулями в точках λ_k і полюсами в точках μ_k кратності q_k .

Доведення. За теоремою Вейерштрасса існує ціла функція g з нулями в точках μ_k кратності q_k і лише в них та існує ціла функція h з простими нулями в точках λ_k і лише в них. Нехай $f = h/g$. Згідно з лемою f'' має полюси в точках μ_k кратності $(q_k + 2)$. Тоді з рівності $A = -f''/f$ випливає, що функція A має полюси в точках μ_k кратності 2. Оскільки $f(z) = (z - \lambda_k)\varphi(z)$, де $\varphi(z)$ – аналітична функція в деякому околі точки λ_k , така що $\varphi(\lambda_k) \neq 0$, то з рівності

$$\frac{f''(z)}{f(z)} = \frac{2\varphi'(z)}{(z - \lambda_k)\varphi(z)} + \frac{\varphi''(z)}{\varphi(z)}$$

маємо, що точки λ_k є простими полюсами або точками голоморфності функції A .

Наведемо деякі приклади, щоб показати, що обидва випадки (λ_k є полюсами або точками голоморфності функції A) реалізуються.

Приклад 2. Розглянемо послідовності $\Lambda = (1/2 + k, 1)$ і $M = (k, 1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Тоді функція $f(z) = \cot \pi z$ є розв'язком рівняння (2), де $A(z) = -2\pi^2 \csc^2 \pi z$ – мероморфна функція з полюсами в точках $\mu_k = k$ кратності 2, для якої $\lambda_k = 1/2 + k$ є точками голоморфності.

Приклад 3. Розглянемо послідовності $\Lambda = ((1/2 + k)^2, 1)$ і $M = (k, 1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Тоді функція $f(z) = \cos \pi \sqrt{z} / \sin \pi z$ є розв'язком рівняння (2), де

$$A(z) = \frac{\pi^2}{4z} - \frac{\pi}{4z\sqrt{z}} \tan \pi \sqrt{z} - \frac{\pi^2}{\sqrt{z}} \cot \pi z \tan \pi \sqrt{z} - 2\pi^2 \cot^2 \pi z - \pi^2$$

– мероморфна функція з полюсами в точках $\mu_k = k$ кратності 2 і простими полюсами в точках $\lambda_k = (1/2 + k)^2$.

Приклад 4. Розглянемо послідовності $\Lambda = (1/2 + k, 1)$ і $M = (k, 1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Тоді функція $f(z) = e^z \cot \pi z$ є розв'язком рівняння (2), де $A(z) = -1 - 2\pi^2 \csc^2 \pi z + 4\pi \csc 2\pi z$ – мероморфна функція з полюсами в точках $\mu_k = k$ кратності 2 і простими полюсами в точках $\lambda_k = 1/2 + k$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Šeda V. On some properties of solutions of the differential equation $y'' = Q(z)y$, where $Q(z) \neq 0$ is an entire function // Acta F.R.N. Univ. Comen. Mathem. – 1959. – **4**. – P. 223-253 (in Slovak).
2. Bank S. A note on the zero-sequences of solutions of linear differential equations // Results in Mathematics. – 1988. – **13**. – P. 1-11.
3. Shen L.-C. Construction of differential equation $y'' + Ay = 0$ with solutions having the prescribed zeros // Proceedings of the AMS. – 1985. – **95**, N4. – P. 544-546.
4. Heittokangas J., Laine I. Solutions of $f'' + A(z)f = 0$ with prescribed sequences of zeros // Acta Math. Univ. Comenianae. – 2005. – **74**, N2. – P. 287-307.
5. Bank S., Laine I. On the zeros of meromorphic solutions of second-order linear differential equations // Comment. Math. Helvetici. – 1983. – **58**, N1. – P. 656-677.
6. Кудряшов Н. А. Нелинейные дифференциальные уравнения четвертого порядка с решениями в виде трансцендент // Теоретическая и математическая физика. – 2000. – **122**, N1. – С. 72-87.
7. Кудряшов Н. А. Обобщения уравнений Пенлеве // Теоретическая и математическая физика. – 2003. – **137**, N3. – С. 408-423.
8. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
9. Eremenko A., Liao L., Ng T. Meromorphic solutions of higher order Briot-Bouquet differential equations // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 2009. – **146**. – P. 197-206.