УДК 517.95+512.743.5

©2015 р. В.М. Лучко, В.С. Лучко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ПЕРІОДИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ НАД ПОЛЕМ p-АДИЧНИХ ЧИСЕЛ

Розглянуто задачу про знаходження періодичного розв'язку параболічного рівняння над полем p-адичних чисел.

We considered the problem to find periodic solutions of parabolic equation over the field of p-adic numbers.

Вступ. У 90-х роках минулого століття у математичній фізиці зріс інтерес до p-адичних чисел. У теорії суперструн (М. Гріна, Дж. Шварца і Е. Віттена [2] та І.В. Воловіча, І.Я. Ареф'євої [1]), яка апелює до фантастично малих відстаней порядку 10^{-33} см, немає причин вважати, що звичайні представлення про простір-час там можуть бути застосовані.

Однієї з альтернативних можливостей для описання структури простору-час є використання поля $\mathbb{Q}_p$ p-адичних чисел замість множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел. На можливість використання p-адичних чисел у математичній фізиці було вперше вказано у 1984 р. у роботі [3] Владімірова В.С. та Воловіча І.В.

У праці [4] побудована теорія узагальнених функцій над простором функцій з $\mathbb{Q}_p$ в $\mathbb{C}$, яка застосовується до тих задач, що виникають у математичній фізиці. Теорія у багато чому аналогічна відповідній теорії над множиною $\mathbb{R}$, але є певні суттєві відмінності. Основну увагу приділяється теорії згортки, представленню Фур'є, аналогу оператора Рімана-Ліувілля, обчисленню інтегралів.

Параболічні рівняння над полем p-одичних чисел вивчалися у праці А.Н. Кочубея [5], в якій при певних припущеннях відносно коефіцієнтів побудовано і досліджено фундаментальний розв'язок задачі Коші, доведені існування та єдиність розв'язку у класах зростаючих функцій, знайдені умови невід'ємності фундаментального розв'язку.

1. У даній роботі розглядається рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + a(t)(D^{\alpha}u)(t,x) = f(t,x), \qquad (1)$$
$$x \in \mathbb{Q}_p, t \geq 0,$$

де $\mathbb{Q}_p$ – поле p-адичних чисел (p – просте число), коефіцієнт та неоднорідність рівняння є неперервними періодичними функціями з деяким періодом $\omega > 0$

$$a(t+\omega) = a(t), f(t+\omega, x) = f(t,x).$$

Розв'язок $u(t,x)$ – дійсна функція, $\alpha \geq 1$, D^{γ} ($\gamma > 0$) – p-адичний аналог оператора дробового диференціювання, який введений В.С. Владіміровим [4].

Наведемо деякі поняття p-адичного аналізу, які будуть використовуватися у подальших міркуваннях. Детальне їх викладення міститься у [2, 4, 6].

Нехай p – просте число, яке буде фіксованим. Введемо у полі $\mathbb{Q}$ раціональних чисел норму $|x|_p$, покладаючи $|0|_p = 0$, $|x|_p = p^{-\gamma(x)}$, якщо число $x \in \mathbb{Q}$ подано у вигляді

$$x = p^{\gamma}\frac{m}{n},$$

де $\{m, n, \gamma\} \subset \mathbb{Z}$, m, n не діляться на p. Доповнення $\mathbb{Q}_p$ поля $\mathbb{Q}$ утворює поле p-адичних чисел.

Норма $|\cdot|_p$ володіє наступними властивостями: $|x|_p = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$; $|xy|_p = |x|_p \cdot |y|_p$; $|x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$, якщо $|x|_p \neq |y|_p$, то $|x+y|_p = \max(|x_p|, |y|_p)$.

Метрика $\rho(x,y) = |x-y|_p$ перетворює $\mathbb{Q}_p$ у повний сепарабельний локально компактний простір. У просторі $\mathbb{Q}_p$ існує єдина, з точністю до множини, міра dx, яка інваріантна відносно додавання. Якщо $a \in \mathbb{Q}_p$, $a \neq 0$, то $d(xa) = |a|_p dx$. Міра нормується так, що

$$\int\limits_{|x|_p \leq 1} dx = 1.$$

Простір $\mathbb{Q}_p$ – це об'єднання зліченної сім'ї попарно неперетинних множин

$$\mathbb{Q}_p = \bigcup_{\nu=-\infty}^{\infty} \{x : |x|_p = p^\nu\},$$

при цьому

$$\int\limits_{|x|_p = p^\nu} dx = p^\nu \Big(1 - \frac{1}{p}\Big).$$

Більшість інтегралів, що зустрічаються у роботі, знайдені в [4].

Введемо до розгляду клас $\mathfrak{M}_\gamma$ ($\gamma \geq 0$) комплекснозначних функцій $\varphi(x)$ на $\mathbb{Q}_p$, які задовольняють умови:

1) $|\varphi(x)| \leq c(1 + |x|_p^\gamma)$;

2) існує натуральне число $N = N(\varphi)$ таке, що для довільного $x \in \mathbb{Q}_p$

$$\varphi(x + x') = \varphi(x), |x'|_p \leq p^{-N}.$$

Функція φ, яка задовольняє останню умову, називається локальною константою, а число N називається показником локальної сталості функції φ. Якщо φ залежить від параметра t, то будемо вважати, що $\varphi \in \mathfrak{M}_\gamma$ рівномірно по t, якщо константа C і показник N не залежать від t.

Множину фінітних функцій із $\mathfrak{M}_0$ позначимо D. Із [7] відомо, що для довільного компакта $K \subset \mathbb{Q}_p$ і довільного відкритого скінченного покриття $\{u_i\}$ множини K існують такі функції $\varphi_i \in D$, що $\varphi_i(x) \geq 0$, $\operatorname{supp} \varphi_i \subset u_i$, $\sum \varphi_i(x) = 1$ для $x \in K$.

Нехай χ – нормований адитивний характер поля $\mathbb{Q}_p$. Тоді $\chi \in \mathfrak{M}_0$. Перетворення Фур'є локально інтегровної на $\mathbb{Q}_p$ функції φ, $\varphi \in L_1(\mathbb{Q}_p, dx)$, визначається формулою

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \chi(\xi x)\varphi(x)dx, \xi \in \mathbb{Q}_p.$$

Обернене перетворення

$$\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \chi(-\xi x)\tilde{\varphi}(\xi)d\xi, x \in \mathbb{Q}_p,$$

якщо $\tilde{\varphi} \in L_1(\mathbb{Q}_p, dx)$.

Має місце формула, наведена в [1]

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p} \varphi(|x|_p)\chi(\xi x)dx = \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)|\xi|_p^{-1} \times$$

$$\times \sum_{\nu=0}^{\infty} f(p^{-\nu}|\xi|_p^{-1})p^{-\nu} - |\xi|_p^{-1} f(P|\xi|_p^{-1}), \quad (2)$$

де $\xi \neq 0$ та припускається збіжність ряду $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} f(p^{-\nu})p^{-\nu}$.

Оператор D^γ диференціювання $\gamma > 0$ визначений на функціях $\varphi \in D$ формулою [4]

$$(D^\gamma \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma_p(-\gamma)} \times$$

$$\times \Big\{ \int\limits_{|y|_p \leq 1} |y|_p^{-\gamma-1}(\varphi(x-y) - \varphi(x))dx +$$

$$+ \int\limits_{|y|_p > 1} |y|_p^{-\gamma-1}\varphi(x-y)dy + \frac{1-p^{-1}}{1-p^\gamma}\varphi(x)\Big\}, \quad (3)$$

де $\Gamma_p(s) = \frac{1-p^{s-1}}{1-p^{-s}}$ – p-адичний аналог гамма-функції.

Якщо у другому інтегралі формули (3) відняти та додати $|y|_p^{-\gamma-1}\varphi(x)$, і скористатися тим, що

$$\int\limits_{|y|_p > 1} |y|_p^{-\gamma-1}dy = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int\limits_{|y|_p = p^\nu} |y|_p^{-\gamma-1}dy =$$

$$= \Big(1 - \frac{1}{p}\Big) \sum_{\nu=1}^{\infty} p^{-\nu\gamma} = \frac{p-1}{p(p^\gamma - 1)},$$

отримаємо

$$(D^\gamma \varphi)(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma_p(-\gamma)} \int\limits_{\mathbb{Q}_p} |y|_p^{-\gamma-1}(\varphi(x-y) - \varphi(x))dy. \quad (4)$$

Якщо $\varphi \in D$, то перетворення Фур'є функції $D^\gamma \varphi$ дорівнює $|\xi|^\gamma \tilde{\varphi}(\xi)$.

2. Аналогічно як і в евклідовому випадку, перший крок полягає у вивченні фундаментального розв'язку для рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + a(t)(D^{\alpha}u)(t,x) = 0.$$

Покладемо

$$G(t,x) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \chi(-x\sigma) \exp\Big\{-|\sigma|_p^{\alpha} \int\limits_0^t a(\tau)d\tau\Big\} d\sigma. \tag{5}$$

Згідно формули (2) для $x \neq 0$, отримаємо

$$G(t,x) = \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)|x|_p^{-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} p^{-\nu} \times$$

$$\times \exp\Big(- p^{-\alpha\nu}|x|_p^{-\alpha} \int\limits_0^t a(\tau)d\tau\Big) -$$

$$-|x|_p^{-1} \exp\Big(- p^{\alpha}|x|_p^{-\alpha} \int\limits_0^t a(\tau)d\tau\Big).$$

Розкладаючи експоненти у ряд, міняючи порядки сумування та просумувавши геометричну прогресію, отримуємо, що для $x \neq 0$

$$G(t,x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1 - p^{\alpha m}}{1 - p^{-\alpha m - 1}} \times$$

$$\times \Big(\int\limits_0^t a(\tau)d\tau \Big)^m |x|_p^{-\alpha m - 1}. \tag{6}$$

Із формули (5) легко побачити, що функція $G(t,x)$ неперервна для $x \in \mathbb{Q}_p$, $t > 0$. Оцінимо $|G(t,x)|$ [5].

Лема 1. *Нехай $a(t) \geq \mu > 0$, тоді має місце нерівність*

$$|G(t,x)| \leq C \cdot t(t^{1/\alpha} + |x|_p)^{-\alpha-1},$$

$$x \in \mathbb{Q}_p, t > 0, \tag{7}$$

де C не залежить від t, x.

Доведення. Згідно формули (5)

$$|G(t,x)| \leq \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \exp(-\mu t|\sigma|_p^{\alpha}) d\sigma.$$

Нехай ціле число k таке, що $p^{k-1} \leq t^{1/\alpha} \leq p^k$. Виберемо $\tau \in \mathbb{Q}_p$ так, щоб $|\tau|_p = p^{k-1}$. Тоді

$$|G(t,x)| \leq \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \exp(-\mu p^{\alpha(k-1)}|\sigma|_p^{\alpha}) d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \exp(-\mu|\tau\sigma|_p^{\alpha}) d\sigma = |\tau|_p^{-1} \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \exp(-\mu|\eta|_p^{\alpha}) d\eta =$$

$$= p^{-k} p \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \exp(-\mu|\eta|_p^{\alpha}) d\eta \leq C t^{-1/\alpha}.$$

З іншої сторони, із (6) отримаємо, що для $t > 0$, $|x|_p \geq t^{1/\alpha}$

$$|G(t,x)| \leq |x|_p^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{m!} (t|x|_p^{-\alpha})^m \leq Ct|x|_p^{-\alpha-1}.$$

Із двох останніх нерівностей отримуємо (7), тобто якщо $|x|_p \geq t^{1/\alpha}$, то

$$|x|_p^{-\alpha-1} \leq \Big(\frac{1}{2}|x|_p + \frac{1}{2}t^{1/\alpha}\Big)^{-\alpha-1} =$$

$$= 2^{\alpha+1}(|x|_p + t^{1/\alpha})^{-\alpha-1}.$$

Якщо $|x|_p < t^{1/\alpha}$, то

$$(t^{1/\alpha} + |x|_p)^{-\alpha-1} \geq 2^{-\alpha-1} \cdot t^{-1-1/\alpha},$$

або

$$t^{-1/\alpha} \leq 2^{\alpha+1}(t^{1/\alpha} + |x|_p)^{-\alpha-1}.$$

Лема доведена.

Лема 2. *Нехай виконуються умови леми 1, тоді мають місце нерівності*

$$\Big|\frac{\partial}{\partial t} G(t,x)\Big| \leq c(t^{1/\alpha} + |x|_p)^{-\alpha-1}, \tag{8}$$

$$|(D_x^{\gamma} G)(t,x)| \leq c(t^{1/\alpha} + |x|_p)^{-\gamma-1}, \tag{9}$$

де c не залежить від t, x.

Нерівності (8), (9) доводяться аналогічно, як і нерівність (7).

3. Перейдемо до побудови періодичного розв'язку рівняння (1). В образах Фур'є розв'язок (1) запишеться у вигляді

$$V(t,\sigma) = cQ(t,0,\sigma) + \int\limits_0^t Q(t,\tau,\sigma)\tilde{f}(\tau,\sigma)d\tau,$$

де

$$Q(t,\tau,\sigma)=\exp\Big\{-|\sigma|_p^\alpha\int\limits_\tau^t a(s)ds\Big\},$$

$$\tilde f(t,\sigma)=\int\limits_{\mathbb{Q}_p}\chi(x\sigma)f(t,x)dx.$$

Для знаходження періодичного розв'язку скористаємося умовою

$$V(t+\omega,\sigma)=V(t,\sigma). \qquad (10)$$

Оскільки (10) виконується при довільних $t\geq 0$, то покладаючи $t=0$ отримаємо

$$c=(1-Q(\omega,0,\sigma))^{-1}\int\limits_0^\omega Q(\omega,\tau,\sigma)\tilde f(\tau,\sigma)d\tau.$$

Маємо

$$V(t,\sigma)=\int\limits_0^\omega Q(t,0,\sigma)(1-Q(\omega,0,\sigma))^{-1}\times$$
$$\times Q(\omega,\tau,\sigma)\tilde f(\tau,\sigma)d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t Q(t,\tau,\sigma)\tilde f(\tau,\sigma)d\tau. \qquad (11)$$

Застосовуючи до (11) обернене перетворення Фур'є, будемо мати зображення періодичного розв'язку рівняння (1)

$$u(t,x)=\int\limits_0^\omega d\tau\int\limits_{\mathbb{Q}_p}G_1(t,\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi+$$
$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{Q}_p}G(t,\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi, \qquad (12)$$

де введено таке позначення

$$G_1(t,\tau,x)=\int\limits_{\mathbb{Q}_p}\chi(-\sigma x)Q(t,0,\sigma)\times$$
$$\times(1-Q(\omega,0,\sigma))Q(\omega,\tau,\sigma)\tilde f(\tau,\sigma)d\sigma,$$

а $G(t,\tau,x)$ визначається формулою (5).

Будемо припускати, що

$$1-Q(\omega,0,\sigma)\neq 0,$$

тоді допустиме розвинення у ряд

$$(1-Q(\omega,0,\sigma))^{-1}=\sum_{k=0}^\infty(Q(\omega,0,\sigma))^k.$$

Використовуючи лему 1, для функції $G_1(t,\tau,x)$ буде правильна оцінка

$$|G_1(t,\tau,x)|\leq C\cdot(t+\omega-\tau)\times$$
$$\times((t+\omega-\tau)^{1/\alpha}+|x|_p)^{-\alpha-1}, \qquad (13)$$

де $x\in\mathbb{Q}_p$, $t\geq 0$.

Перейдемо безпосередньо до розгляду розв'язку рівняння (1). Будемо припускати, що $f\in\mathfrak{M}_\beta$ рівномірно відносно t і неперервна по (t,x), $0\leq\beta<\alpha$. Розв'язок рівняння будемо шукати у класі функцій $u(t,x)$ неперервних періодичних на $\mathbb{Q}_p\times[0,+\infty)$, неперервних диференційовних за змінною t, які належать за змінною $x\in\mathbb{Q}_p$ класу $\mathfrak{M}_\beta$ рівномірно відносно t.

Правильна теорема.

Теорема. *Періодичний розв'язок рівняння (1) існує і подається у вигляді (12), а для G, G_1 мають місце оцінки (5), (8), (9), (13).*

Доведення теореми випливає із леми 1 та леми 2.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Арефьева И.Я., Волович И.В.* Суперсимметрия: теория Калуцы-Клейна, аномалии, суперструны // УФН-1985. Т. 146, вып. 4. – С. 655–681.

2. *Боревич З.И., Шафаревич И.Р.* Теория чисел. – М.: Наука, 1985. – 504 с.

3. *Владимиров В.С., Волович И.В.* Суперанализ. I. Дифференциальное исчисление // ТМФ. – 1984. – Т. 59, № 1. – С. 3–27.

4. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции над полем p-адических чисел // УМН. 1988. – Т. 43, вып. 5. – С. 17–53.

5. *Кочубей А.Н.* Параболические уравнения над полем p-адических чисел. Мат. УССР. Известия, 1991. – Т. 55, № 5. – С. 1312–1330.

6. *Гельфанд И.М., Граев М.И., Пятнецкий-Шапиро И.И.* Теория представления и автоморфные функции. – М.: Наука, 1966. – 321 с.

7. *Bruhat F.* Distributions sur un groupe localement compact et applications á l'étude des représentation des groupes p-adiques // Bull. Soc. Math. France. 1961. V. 89, N 1. – P. 43–75.